

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1899)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** BIBLIOGRAPHIE

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

---

G. LAZZERI e A. BASSANI, professori nella R. Accademia Navale. — **Elementi di Geometria**, seconde édition améliorée ; 1 vol. in-8°, 312 figures dans le texte ; prix : 5 L. ; Livourne, R. Giusti, 1898.

Les *Éléments de Géométrie*, dont deux savants professeurs de l'académie navale d'Italie, MM. Lazzeri et Bassani, viennent de publier la 2<sup>e</sup> édition (la première a paru en 1891), sont établis d'après des principes entièrement nouveaux, résultant de deux idées fondamentales.

La première est la nécessité de rendre l'étude de la géométrie *indépendante de l'Arithmétique et de l'Algèbre*. Les auteurs pensent, avec les éminents professeurs Sannia et d'Ovidio, que c'est le moyen le plus propre à ramener à l'antique pureté l'enseignement de la Géométrie élémentaire, que Legendre et ses imitateurs avaient, disent-ils, obscurci en employant souvent le calcul arithmétique à démontrer des vérités que quelques arguments, fondés sur la simple intuition, servent suffisamment à faire accepter d'une manière plus directe et plus appropriée. Ils observent d'ailleurs que cette nécessité a été depuis longtemps reconnue par tous ceux qui s'occupent de l'enseignement classique, par exemple par Houel et par Duhamel.

La seconde idée fondamentale, — et peut-être la plus importante, — consiste dans l'application franche à l'enseignement de la *fusion intime et systématique* de la géométrie plane avec celle de l'espace. Cette fusion, dont l'idée n'est pas nouvelle, a été tentée pour la première fois en Italie, par de Paolis, dans ses *Éléments de Géométrie*, publiés en 1884. Elle était, disent les auteurs, considérée comme une utopie à l'époque de la publication de la première édition de leur livre ; mais, en peu d'années, l'idée a fait beaucoup de chemin. Les auteurs, qui professent depuis douze ans la géométrie d'après cette idée à l'académie navale, ont rallié à elle un grand nombre de professeurs italiens. L'Association *Mathesis* pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires italiennes a proposé à tous les professeurs, comme thème de discussion, l'opportunité de la fusion des deux géométries, et le vœu qu'il soit pris une décision à cet égard est exprimé, dans le rapport présenté au nom de ladite association, en mai 1897, au ministre de l'instruction publique, par le professeur Bettazzi.

En Allemagne, la question de la fusion des deux géométries commence également à s'agiter, comme le prouve le rapport fait par le Dr Rohn à la 44<sup>e</sup> réunion des philologues et professeurs allemands, tenue à Dresde en 1897.

En France, l'on est moins avancé et la question ne semble pas avoir pénétré jusqu'à présent dans les sphères officielles. Il convient cependant de rappeler une tentative très curieuse faite en 1844. Nous avons entre les mains, depuis longtemps déjà, un volume devenu rare, intitulé : « *Les Analo-*

« gies de la Géométrie élémentaire, ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la Géométrie plane, ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de lui-même, s'élever immédiatement et presque sans effort, à tous les cas semblables de la géométrie dans l'espace », par A. MAHISTRE, licencié ès sciences, professeur de mathématiques, etc. Paris, Hachette, 1844.

Le titre un peu long de cet ouvrage, qui a été autorisé le 14 mai 1844 par le Conseil de l'instruction publique, montre bien que son principe était le deuxième principe fondamental de MM. Lazzeri et Bassani. Le livre de Mahistre comprend deux parties : 1<sup>o</sup> *Géométrie plane et ses analogies avec la Géométrie dans l'espace*, exposée en 261 pages ; 2<sup>o</sup> *Géométrie dans l'espace (partie indépendante)*, exposée en 9 pages. Ces nombres 261 et 9 (ou 29 et 1) ne sont peut-être pas loin d'exprimer la proportionnalité vraie de la Géométrie élémentaire fusionnée et de la Géométrie de l'espace indépendante.

MM. Lazzeri et Bassani font remarquer d'ailleurs que la fusion des deux Géométries n'est pas en réalité une nouveauté. Son utilité est reconnue sans contestation pour la Géométrie projective. Monge est le premier qui, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, en a donné des exemples, en démontrant à l'aide des figures à trois dimensions, un grand nombre de théorèmes relatifs aux figures planes, avec une simplicité et une évidence desquelles on resta bien loin quand on voulut faire usage des seuls éléments du plan. Beaucoup d'autres, notamment Brianchon et Poncelet, suivirent les traces de Monge, et aujourd'hui l'on voit la méthode de fusion universellement appliquée en Géométrie projective et en Géométrie supérieure, et préconisée par les plus illustres Géomètres, comme Chasles, Bellavitis et Cremona.

Si la Géométrie élémentaire a été la dernière à utiliser cette méthode, ce n'est pas qu'elle soit moins susceptible d'en tirer parti : mais cela tient peut-être à ce que les géomètres, attirés par les questions neuves qui se présentent en foule à la suite des extraordinaires développements de la Géométrie supérieure, ont trouvé une plus grande satisfaction dans la recherche de nouvelles propriétés que dans l'étude des moyens de perfectionner les méthodes d'enseignement : et peut-être aussi à ce que les anciennes traditions et l'habitude de plus de vingt siècles ont été un obstacle à une transformation radicale de ces méthodes. Mais l'utilité de la méthode de fusion n'en est pas moins certaine pour la Géométrie élémentaire, comme pour toutes les autres branches de la Géométrie.

L'ouvrage est divisé en cinq livres. Dans les trois premiers sont exposées, d'une manière absolument indépendante de l'idée de *nombre*, les propriétés de position et de grandeur des figures du plan et de l'espace, qui dérivent de la notion fondamentale de l'*égalité* : le quatrième livre établit la théorie des *grandeur équivalentes*, abstraction faite également de toute idée de nombre ; enfin, le cinquième livre, qui seul implique cette idée, expose la théorie des *grandeur proportionnelles* et de la *mesure*.

Quelques préliminaires définissent la *proposition*, les diverses variétés et interprétations que ce mot comporte, puis le *problème* et ses opérations, et montrent que la découverte d'un théorème, la résolution d'un problème ou la démonstration d'une proposition énoncée se ramènent à trois méthodes principales : 1<sup>o</sup> l'*analyse* ; 2<sup>o</sup> la *synthèse* ; 3<sup>o</sup> la *réduction à l'absurde*.

Le chapitre I<sup>er</sup> du livre I<sup>er</sup> définit les *figures géométriques* et aborde leur étude par celle de la *droite* et du *plan*. Les auteurs établissent sept *postulatum*s, de l'énoncé desquels ils déduisent ensuite des définitions ; puis, quand il y a lieu, des corollaires, théorèmes ou propriétés. La forme *postulatum*, à laquelle les auteurs ont recours, n'est autre que l'application du premier principe qu'ils ont posé : « Supprimer toute dépendance de l'arithmétique et faire accepter, par quelques arguments, fondés sur la simple intuition, les vérités primordiales de la Géométrie. »

Le chapitre II du livre I<sup>er</sup> étudie, d'après les mêmes principes, et au moyen de deux nouveaux postulatum, dont l'un est attribué par les auteurs à Archimède (<sup>1</sup>), les *segments*, les *angles* et les *dièdres*. Le chapitre III est consacré aux premières notions sur le *cercle* et sur la *sphère*. Le chapitre IV étudie les *droites parallèles*, la *droite parallèle à un plan* et les *plans parallèles* ; il repose sur un dixième postulatum qui n'est autre que le postulatum d'Euclide (<sup>2</sup>). Enfin le chapitre V expose la théorie des *droites et plans perpendiculaires*, et le livre I<sup>er</sup> se termine par les énoncés de 74 *exercices proposés*.

Il nous paraît inutile de donner autant de détails sur le livre II (*Polygones : angles polyèdres : polyèdres : distances : 237 exercices*), sur le livré III (*Relations entre la droite, le plan et la sphère ; relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère ; géométrie sur la sphère ; surfaces et solides de rotation : 294 exercices*), et sur le livre IV (*Théorie générale de l'équivalence ; équivalence des polygones et surfaces polyédriques ; équivalence des polygones sphériques et pyramides sphériques : équivalence des prismes : grandeurs limites ; équivalence des polyèdres : équivalence du cercle et des corps ronds : 235 exercices*). Ces sommaires et l'index que l'on trouvera ci-après donnent une idée suffisante de l'étendue et de la variété des matières traitées et de l'unité du plan de l'ouvrage. Nous rappelons seulement, parce que cela est essentiel, que ces quatre premiers livres sont complètement indépendants de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

En ce qui concerne le livre V (*Théorie des proportions ; homothétie et similitude ; mesure des longueurs, aires ou volumes ; applications de l'algèbre à la géométrie : 227 exercices*), les auteurs se sont préoccupés de l'objection qui pourrait leur être faite, qu'ils ne se sont pas conformés à leur premier principe fondamental, puisqu'ils font dépendre les théories de ce livre de la théorie des proportions numériques ; ils ont exposé pourquoi, après de mûres réflexions, ils ne croient nullement être en contradiction avec eux-mêmes. Les très intéressantes considérations qu'ils présentent à cet égard, dans leur préface, peuvent se résumer ainsi : il est dangereux et erroné, au point de vue didactique, de démontrer les propriétés relatives à la position et à l'équivalence des figures par des considérations arithmétiques, parce que, en employant un tel système, l'idée de nombre, qui leur

(<sup>1</sup>) Ce postulatum, que nous reproduisons à cause de son importance, et aussi pour donner un exemple de la manière dont les auteurs entendent la *fusion*, est le suivant : « Si, sur un segment (ou angle ou dièdre), on porte une suite de segments (ou angles ou dièdres) égaux, de manière que chacun d'eux soit adjacent au précédent et que le premier ait une extrémité (ou un côté ou une face) en commun avec celui qui est donné, on finira par trouver un point (ou un côté ou une face) qui tombera en dehors du segment (ou angle ou dièdre) donné. »

(<sup>2</sup>) Par un point on ne peut mener qu'une droite parallèle à une droite donnée..

est complètement étrangère, fait perdre de vue leur véritable signification. Mais une proportion, quel que soit l'aspect sous lequel on la considère, exprime en substance que le résultat de la comparaison de deux autres grandeurs homogènes, faites suivant une certaine loi, est égal à celui de la comparaison de deux autres grandeurs également homogènes, faite suivant la même loi. Ces résultats, considérés en eux-mêmes, peuvent être exprimés complètement et clairement par l'idée de rapport, qui implique incontestablement celle de nombre, et ne peuvent être exprimés d'une autre manière.

La 2<sup>e</sup> édition, actuellement publiée, ne diffère de la première que par quelques modifications, dont la principale est le développement donné au postulatum d'Archimète (ci-dessus énoncé) et à ses conséquences, et par la suppression de quelques matières qui ne s'enseignent pas ordinairement dans les écoles, suppression faite dans le but de réduire l'étendue du volume. Telles sont, par exemple, les propriétés des centres, axes et plans radicaux et des centres de similitude, que les auteurs déclarent d'ailleurs n'avoir retranchées qu'à regret, parce que les chapitres y relatifs étaient une des preuves les plus manifestes du grand avantage que présente la fusion de la Géométrie plane avec celle de l'espace.

En résumé, le livre de MM. Lazzeri et Bassani, bien pensé, écrit avec méthode et rigueur, nous paraît devoir appeler l'attention la plus sérieuse de toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement. Le principe de la fusion des deux Géométries, considéré hier encore comme une utopie, aujourd'hui devenu une idée dont l'étude s'impose, est destiné peut-être à se transformer, dans un avenir rapproché, en méthode classique pour l'enseignement de la Géométrie élémentaire, en attendant son adoption dans toutes les branches de la Géométrie<sup>(1)</sup>. Si ce progrès se réalise, le livre des professeurs de l'académie navale italienne, déjà appuyé par douze années d'enseignement, y aura puissamment contribué.

L. RIPERT (Paris).

## INDEX

PRÉLIMINAIRES. — LIVRE I<sup>e</sup>. — CHAP. I<sup>er</sup>. *Les figures géométriques. Droite et plan.* — CHAP. II. *Segments, angles et dièdres.* — CHAP. III. *Premières notions sur le cercle et sur la sphère.* — CHAP. IV. *Droites parallèles. Droite parallèle à un plan. Plans parallèles.* — CHAP. V. *Droites et plans perpendiculaires.* — EXERCICES.

LIVRE II. — CHAP. I<sup>er</sup>. *Polygones.* Egalité des triangles et des polygones.

<sup>(1)</sup> Dans un ouvrage paru à peu près en même temps que celui dont il est ici rendu compte, on lit: « On comprend que la plupart des notions générales de la Géométrie analytique....., surtout en ce qui touche la méthode des coordonnées cartésiennes, sont susceptibles d'une extension à la Géométrie de l'espace..... L'analogie est tellement manifeste, surtout au point de vue du calcul, qu'il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une exposition doctrinale un peu complète de la Géométrie analytique, à présenter l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans l'espace, et en s'élevant tout naturellement d'une notion à l'autre; de rares tentatives ont été timidement faites jusqu'ici dans cet ordre d'idées; nous serions étonné si quelque jour elles ne finissaient pas par produire des résultats efficaces, sous l'influence d'efforts nouveaux et plus énergiques. » (G.-A. LAISANT, *La Mathématique, Philosophie. Enseignement.* p. 112; Carré et Naud, 1898.)

Constructions des triangles et des polygones. Quadrangles. — CHAP. II. *Angoloïdes* (angles polyèdres). Egalité des trièdres et des angoloïdes. Construction des trièdres et des angoloïdes. — CHAP. III. *Polyèdres*. Pyramide. Prisme. Parallélépipède. — CHAP. IV. *Distances*. Quelques problèmes. — EXERCICES.

LIVRE III. — CHAP. I<sup>er</sup>. *Relations entre droites, plans et sphères*. Relation d'une droite avec un cercle et d'un plan avec une sphère. Relations des angles avec un cercle. Relations de deux cercles dans un plan ou sur une sphère. Quelques problèmes. — CHAP. II. *Relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère*. Polygones réguliers. Polyèdres réguliers. — CHAP. III. *Géométrie sur la sphère*. Angles et polygones sphériques. Cercles sur la sphère. Polygones inscrits ou circonscrits à un cercle sur la sphère. — CHAP. IV. *Surfaces et solides de révolution*. Surface conique et cône. Surface cylindrique et cylindre. — EXERCICES.

LIVRE IV. — CHAP. I<sup>er</sup>. *Théorie générale de l'équivalence*. — CHAP. II. *Équivalence de polygones et surfaces polyédriques*. Transformation des polygones en rectangles équivalents d'une même série. Relation des rectangles, ou carrés, construits sur les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère. Quelques problèmes. Équivalence de quelques surfaces polyédriques. — CHAP. III. *Équivalence des polygones sphériques et des pyramides sphériques*. — CHAP. IV. *Équivalence des prismes*. — CHAP. V. *Grandeurs limites*. — CHAP. VI. *Équivalence des polyèdres*. — CHAP. VII. *Équivalence du cercle et des corps ronds*. Équivalence du cercle. Équivalence du volume et de la surface du cylindre. Équivalence de la surface et du volume du cône rond (droit). Équivalence de la surface et du volume de la sphère. — EXERCICES.

LIVRE V. — CHAP. I<sup>er</sup>. *Théorie des proportions*. Grandeurs commensurables et incommensurables et grandeurs proportionnelles. Proportionnalité des segments, des surfaces et des volumes. — CHAP. II. *Homothétie et similitude*. Figures homothétiques. Figures semblables. Quelques problèmes. — CHAP. III. *Mesure*. Unité de mesure. Circonférence du cercle. Aires des surfaces. Volumes des solides. — CHAP. IV. *Application de l'algèbre à la Géométrie*. Relations algébriques des éléments d'un triangle, d'un quadrangle inscrit dans un cercle et d'un tétraèdre. Mesure des côtés, des apothèmes et de la surface de quelques polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle en fonction du rayon. Mesure des surfaces et des volumes des polyèdres réguliers. Calcul du nombre  $\pi$ . — EXERCICES.

L. R.

P. APPEL, membre de l'Institut. **Éléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs et des physiciens**. Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Prix 24 fr.; Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine; 1898.

Le style général des traités mathématiques de notre époque a été fixé par les travaux de Lagrange, Laplace, Legendre, Lacroix, Poisson et d'autres mathématiciens français. Ils y ont introduit toutes les ressources de puissance et de délicatesse dont la langue française est si bien pourvue, pour exprimer clairement et logiquement les idées.

Les traditions de ces écrivains sont conservées actuellement avec tant de

soin que tous les travaux qui concernent les méthodes d'instruction destinées aux mathématiciens français, comme le livre dont nous voulons parler, sont étudiées avec ardeur par les étrangers, soucieux et désireux d'en profiter dans leur propre intérêt.

La première chose qui nous frappe, c'est le grand avantage que possède l'étudiant français, d'avoir été initié, dès ses premiers pas en Algèbre, à la conception fondamentale d'une quantité variable et de ses dérivées. L'auteur est ainsi dispensé d'une foule de définitions préliminaires : il n'a pas besoin d'expliquer de nombreuses notations, et se trouve en état de procéder dès l'abord, avec raffinement, aux démonstrations fondamentales, ce qu'il ne saurait faire s'il s'adressait à un commençant.

Il est malheureux que la tradition newtonienne ne soit pas encore éteinte chez nous, en Angleterre : il en résulte que nos étudiants ont été jusqu'ici détournés d'une étude du calcul infinitésimal par trop de propositions géométriques préliminaires, dans la méthode d'enseignement suivie pour éviter le calcul : on a l'idée de les amener à reconstituer la suite géométrique des raisonnements employés par Newton.

Une recherche dans les documents de Newton, effectuée par feu le professeur J.-C. Adams, a révélé que Newton, ainsi que chacun de nous, employa la méthode analytique comme moyen d'invention : et que ses démonstrations furent reprises sous une forme géométrique grecque, pour donner satisfaction au pédantisme académique de son temps ; ainsi se trouve entièrement justifiée cette critique de Laplace, reproduite par Schopenhauer, que les démonstrations newtoniennes *manquent de sincérité*.

La remarque historique de la page 5, qui fait ressortir la priorité de la notion de l'intégrale sur celle du coefficient différentiel, est d'un grand intérêt : cela montre à la fois l'un des côtés singuliers de l'esprit humain, et l'importance de la méthode moderne suivie dans ce livre, où l'on traite simultanément le calcul intégral et différentiel, de préférence à l'ancien plan, divisant ces deux sujets, à part, dans des volumes séparés. Les progrès de la science ne se constatent qu'à la longue : c'est ainsi qu'il est aisé de reconnaître la croissance d'une plante ou d'un arbre après une certaine période de temps : au contraire, la vitesse actuelle de croissance est imperceptible à nos sens, à moins qu'on ne la représente par une série de photographies dans un cinématoscope, avec une échelle réduite des temps, comme les photographies astronomiques de M. Flammarion.

L'auteur, suivant M. Bertrand, débute d'après la manière conventionnelle par l'exposé des infiniment petits : mais je dois avouer cette opinion hérétique, que cette méthode laisse certainement dans plusieurs esprits l'impression que les résultats atteints sont seulement approchés. Dans la démonstration du numéro 8, où l'on prouve que l'intégrale représente une aire, la preuve peut être rigoureusement faite sans l'introduction des infiniment petits, au moyen des Lemmes I et II des *Principes*.

Vient maintenant la notion d'un coefficient différentiel, ou dérivée : ce nom français de *dérivée* est préférable à notre désignation plus longue de *coefficient différentiel*, qui n'a aucun sens au point de vue étymologique, à moins de l'interpréter comme le coefficient qui affecte la différentielle de la variable indépendante dans le développement de la variable dépendante. Ces différentielles, lorsqu'il y a plusieurs variables, et qu'elles varient isolément, sont les *vitesses virtuelles* de Lagrange si nous les supposons qualifiées

par une dénomination symbolique  $dt$ , et leurs coefficients sont les dérivées partielles définies au numéro 18. Un desideratum à formuler dans cette partie du sujet est une notation plus définie pour les divers sens qu'on peut donner à  $\partial z$ , selon les variations de la variable qui l'engendre, spécialement quand on effectue un changement ayant pour effet de passer à de nouvelles variables indépendantes ; les exemples tirés de la théorie mécanique de la chaleur servent à montrer cette nécessité.

On a plaisir à trouver l'égalité de  $f''_{yx}$  et  $f''_{yx}$  présentée presque comme un axiome : « On démontre, dans les éléments de l'algèbre, que ces deux quantités sont égales » (p. 26). Trop souvent on donne une très longue démonstration, comme pour permettre de considérer certains cas exceptionnels qui ne se rencontrent jamais dans les applications pratiques.

Il est curieux pour nous que la notation  $\sin^{-1}x$ ,  $\cos^{-1}x$ ,... que nous employons pour  $\text{arc } \sin x$ ,  $\text{arc } \cos x$ ,... n'ait jamais été adoptée en France ; elle est justifiée par son usage dans la théorie des substitutions, et présente l'avantage d'être applicable à toutes les fonctions ; ainsi, lorsque

$$fx = y, \text{ on a } x = f^{-1}y.$$

Par exemple, la transformation de M. Hermite  $t = -\frac{H}{X}$ , où  $X$  est une fonction quartique, et  $H$  son hessien, montre que nous pouvons écrire l'intégrale elliptique générale de première espèce :  $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2} P^{-1}\left(-\frac{H}{X}\right)$ , formule où  $P$  représente la fonction de Weierstrass. M. Clifford emploie couramment les fonctions inverses des fonctions elliptiques de Jacobi. Par exemple,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}} = F\varphi = \operatorname{sn}^{-1}x,$$

formule où  $F\varphi$  est l'intégrale de Legendre, et où  $x = \sin \varphi$ .

La notation est utile pour les fonctions inverses des fonctions hyperboliques  $\operatorname{Ch} x$ ,  $\operatorname{Sh} x$ ,... lorsqu'on emploie l'écriture adoptée dans les « Fonctions elliptiques » de MM. Tannery et Molk ; elle permet de présenter les résultats des intégrales élémentaires d'une manière plus systématique ; par exemple,

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \cos^{-1} \frac{x}{a}, \quad \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a};$$

toute analogie se perd si l'on exprime le second résultat sous la forme logarithmique  $\log \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ , et la notation est beaucoup plus condensée que  $\operatorname{sect}$ ,  $\operatorname{cos hyp.} \frac{x}{a}$ , employée dans le « Calcul intégral » de M. Bertrand.

Si l'on prend les expressions de l'aire de l'ellipsoïde de révolution, cherchée au n° 65, elles sont contenues dans la suivante :

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \cos^{-1} \frac{b}{a}, \quad (1)$$

(1) La notation  $a^2+b^2$  représente la valeur absolue de  $a^2-b^2$ .

la formule effective devant être choisie suivant que  $b$  est plus petit ou plus grand que  $a$ .

On a encore (p. 21),

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{x+k}{x-k} = \frac{1}{k} \operatorname{Th}^{-1}\left(\frac{x}{k}, \text{ ou } -\frac{k}{x}\right).$$

On pourrait mentionner plusieurs autres applications, spécialement celles qui concernent la chaînette; qu'il nous soit permis de citer encore la substitution

$$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C}$$

appliquée à l'intégrale générale (chap. v)

$$\int \frac{Hx + K}{(Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} dx$$

qui la décompose en deux parties, des formes

$$\int \frac{dy}{\sqrt{[y(y_1-y)]}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{[y(y-y_2)]}},$$

où  $y_1$  et  $y_2$  représentent le maximum et le minimum de  $y$ ; ces intégrales sont données par les fonctions

$$2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ ou } 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ et } 2 \operatorname{Ch}^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_2}}, \text{ ou } 2 \operatorname{Sh}^{-1} \sqrt{\frac{y}{y_2}};$$

nous supposons  $AC-B^2$  positif, pour assurer la réalité de  $y_1$  et  $y_2$ .

Dans la notation que je recommande, on a pour l'intégrale (p. 139)

$$\int \sec x dx = \operatorname{Ch}^{-1} \sec x,$$

et l'on établit ainsi un lien entre les valeurs numériques des fonctions hyperboliques et les tables des fonctions circulaires; par exemple, au moyen de la table des parties méridionales dans la projection de Mercator, employée par M. le capitaine Guyou dans son nouveau système de navigation. L'intégrale plus générale où  $\sec x$  est remplacée par

$$\frac{1}{a + b \cos x + c \sin x}, \text{ ou } \frac{1}{a + b \operatorname{Ch} x + c \operatorname{Sh} x},$$

est immédiatement réduite à une simple intégrale type par la substitution d'une nouvelle variable  $y$  à l'une ou l'autre de ces expressions.

Les intégrales elliptiques  $E_\varphi$  et  $F_\varphi$  de Legendre sont introduites dans le chapitre vi, la seconde intégrale elliptique  $E_\varphi$  (bien que la première dans l'ordre historique) donnant la longueur de l'arc elliptique; et la première intégrale elliptique  $F_\varphi$ , dans le traité de Legendre, donnant le temps des oscillations finies d'un pendule. M. Appell n'a pas cru devoir introduire les fonctions elliptiques d'Abel et de Jacobi: nous le regrettons, car nous perdons ainsi sa belle illustration mécanique de la double périodicité des

fonctions elliptiques ; cette périodicité devient pratiquement réalisable par l'addition ou la soustraction de poids au pendule, à la fin d'une oscillation, de manière à obliger le centre d'oscillation à passer d'un côté à l'autre du centre de suspension à la même distance.

La résolution d'une fonction arbitraire en termes d'une série de Fourier est considérée au chap. vii. Cette partie est d'un grand intérêt pratique pour les élèves de M. le professeur Appell, en ce qui concerne les projets de machines à rotation rapide, telles que les exige l'électricité, ou la propulsion des navires à vapeur ; le succès ou l'insuccès dépendant de la somme des vibrations produites. Les ingénieux instruments employés dans l'analyse des marées pour effectuer mécaniquement les intégrations, mériteraient d'être mentionnés, spécialement ceux qui ont été récemment perfectionnés par M. le professeur Michelson, de Chicago.

Les applications géométriques, dans les chapitres ix à xv, donnent la théorie des tangentes, des normales et des plans tangents ou normaux aux courbes et aux surfaces ; et la théorie de la courbure, comprenant en même temps celle des maximums et minimums des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Nous rencontrons ici plusieurs nouveautés élégantes, telles que l'hélice osculatrice d'une courbe gauche, le tore osculateur d'une surface, aussi bien que le paraboloïde osculateur ordinaire ; les lignes asymptotiques d'une surface, et enfin (p. 313) la définition du *point central*, que, par exemple, j'avais vainement cherchée dans la Géométrie cinématique de M. le colonel Mannheim. Ce dernier ouvrage est spécialement attrayant dans les parties concernant la théorie de M. Darboux sur la polhodie, l'herpolhodie et ses inflexions, et l'hyperboloïde articulé déformable associé, au sujet duquel M. Mannheim, partant des travaux géométriques de Poinsot, se trouve conduit à l'étude approfondie de questions dynamiques.

La théorie de la courbure géodésique, développée ici au n° 307, appliquée à l'herpolhodie et au cône de l'herpolhodie, éclaire la méthode purement géométrique de M. Mannheim.

La distinction entre la différentielle exacte et l'intégrale prise le long d'une courbe, si importante dans la théorie mécanique de la chaleur, est discutée dans le chapitre xvii, avec des exemples et des diagrammes appropriés ; et dans le chapitre suivant, les diagrammes, illustrations d'une intégration double ou triple, montrant comment un solide est considéré dans le calcul intégral comme composé de briques infinitésimales, sont dessinés avec un grand soin. La question se pose de savoir s'il est avantageux de représenter de tels diagrammes d'une façon stéréoscopique, comme il est possible, avec un peu de pratique, et d'obtenir l'effet de relief sans le secours du stéréoscope. De grandes vues stéréoscopiques projetées sur un mur, selon l'idée de M. d'Oagne, donneront l'impression de la figure solide si les yeux se portent sur un point à moitié distance ; on voit quelle peut être l'utilité de ces images dans les démonstrations de la géométrie solide. Considérant l'importance, en électricité et en magnétisme, du théorème de Green et la simplicité de son interprétation physique, l'auteur a bien fait de consacrer quelques pages à la fin du chapitre xviii, à la démonstration des principes essentiels ; l'extension aux espaces à connexions multiples se fait aisément et est rendue intelligible par les analogies hydrodynamiques.

Nous avons conservé peu de place pour rendre compte des 150 pages restantes du livre, lesquelles sont consacrées aux équations différentielles,

sujet poussé aussi loin qu'il est vraisemblablement nécessaire pour les élèves de l'auteur.

La méthode graphique indiquée au n° 356, pour prouver l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle générale du premier ordre, a été employée pratiquement, avec une échelle et un pivot mobile, inventés par M. C.-V. Boys, pour tracer des courbes, inabordables analytiquement, comme la courbe élastique (p. 610), la courbe capillaire et les trajectoires d'un projectile avec la loi de résistance quadratique, en représentant graphiquement les tables dressées dans la Théorie balistique d'Euler. Les ellipses de Lissajous, avec les hyperboles associées (fig. 199) donnent une interprétation géométrique élégante de l'équation différentielle  $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ .

La remarque de la p. 574, que « les courbes représentées par une équation différentielle homogène du premier ordre sont homothétiques par rapport à l'origine », aide à élucider la théorie : de même, les équations différentielles du quatrième type (n° 364) représentent une famille de courbes telles que toutes les tangentes pour une même valeur de  $x$  passent par un même point.

Dans la discussion (chap. XXI) des équations différentielles linéaires à coefficients constants, les termes extraits de la théorie des engins à vapeur et des dynamos aident à donner des idées concrètes aux étudiants techniques et aux électriciens. Ainsi, par exemple, une simple différentiation ou intégration de  $\cos mx$  donne une *avance* ou un *retard* d'un angle droit, et multiplie ou divise l'amplitude par  $m$ ; l'opération

$$\frac{a \frac{d}{dx} + b}{c \frac{d}{dx} + d}$$

sur  $\cos mx$ , multiplie l'amplitude par  $\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ , et donne une avance de  $\text{tang}^{-1} \frac{am}{b}$ ; et divise l'amplitude par  $\sqrt{(c^2m^2 + d^2)}$  et donne un retard de  $\text{tang}^{-1} \frac{cm}{d}$ ; semblablement pour les vibrations avec un module d'extinction, représenté par  $e^{-pt} \cos mx$ , comme dans l'équation du galvanomètre de la page 625.

Les équations générales de la Dynamique sont exposées dans le chapitre XXII et dans le chapitre XXIII, qui donne la solution de l'équation aux différentielles partielles du premier ordre  $Xp + Yq = Z$ ; où montre comment on représente les surfaces engendrées par les courbes données par

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

avec des applications spéciales aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution.

Le dernier chapitre, XXIV, donne la théorie de la quadrature et de la cubature approximatives, telle que l'exigent l'art de l'ingénieur civil et celui de l'Architecture navale, et le livre se termine par une élégante démonstration de la théorie des planimètres. Pour écarter toute trace de doute des esprits dont j'ai parlé plus haut, qui ne sont pas convaincus par la méthode des

infiniment petits et qui disputent sur le motif en vertu duquel on néglige l'élément  $BB'B''$  dans la figure 218, il est bon d'étendre la méthode employée dans la figure 217, appliquée aux aires finies, au planimètre d'Amsler, en prenant un contour fini qui est déerit par le mouvement des articulations O et A, isolément.

Une modification du planimètre d'Amsler a été récemment introduite d'Amérique : c'est l'invention de M. Lippincott : dans cet instrument, la roulette est libre de glisser sur une barre graduée fixée à angle droit sur le bras AB, de sorte que le mouvement de cette roulette sur le papier est un pur roulement, sans aucun glissement latéral (*ou dérapage*), par conséquent plus doux : le mouvement de la roulette sur la barre graduée enregistre l'aire.

C'est avec un grand plaisir que j'ai parcouru consciencieusement les chapitres de ce livre suggestif, et que j'ai noté les nombreuses nouveautés de cette exposition : trop nombreuses assurément pour qu'on puisse les citer toutes dans ce compte rendu ; le petit nombre de celles que j'ai choisies pour la discussion servira, il faut l'espérer, à indiquer le but général, fort intéressant et utile, de M. Appell.

A.-G. GREENHILL (Woolwich).  
Artillery College.

**G. OLTRAMARE.** — **Calcul de généralisation** ; 1 vol. gr. in-8°. Prix : 6 fr.; Paris, Hermann, 1899.

Depuis de longues années déjà, l'éminent doyen de la faculté des sciences de Genève a consacré ses efforts à répandre les principes du calcul de généralisation créé par lui, et à montrer l'étendue et la fécondité des applications de ce procédé analytique. Il nous le présente aujourd'hui sous une forme définitive. Nous ne saurions mieux faire, pour en donner une idée générale, que d'emprunter quelques extraits à sa courte préface.

« Le calcul de généralisation, dit-il, a pour base la représentation des fonctions uniformes, sous une forme symbolique telle que l'on puisse effectuer sur ces fonctions les principales opérations auxquelles elles sont soumises, comme leur différentiation et leur intégration, à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer... Un des principaux avantages qu'il présente consiste dans l'application qu'on en peut faire à l'intégration des équations.

« Après avoir établi quelques principes généraux, nous nous sommes appliqué à déterminer une intégrale particulière de toute équation différentielle, ou aux différences et différentielles partielles linéaires à coefficients constants avec un second membre ; nous nous sommes également occupé de l'intégration des équations simultanées, des équations aux différences mêlées, et de certaines classes d'équations aux différentielles partielles avec coefficients variables ; enfin nous avons reconnu que dans plusieurs cas on pouvait déterminer la fonction qui figure dans une intégrale définie dont la valeur est donnée.

« En résumé, le calcul de généralisation nous semble devoir occuper une place importante dans l'analyse supérieure. L'uniformité et la simplicité de ses procédés, son application à la solution d'une multitude de questions d'une grande importance, nous font espérer qu'il pourra trouver place dans l'enseignement et se substituer avec avantage aux différentes méthodes

beaucoup plus compliquées auxquelles il faut avoir recours dans les questions que le calcul différentiel et intégral est appelé à résoudre. »

Nous ne pouvons que joindre nos vœux à ceux qu'exprime l'auteur, et nous croyons que son nouvel ouvrage pourra contribuer dans une large mesure au résultat qu'il poursuit. Il est vrai de dire que les habitudes d'enseignement ne se transforment pas d'un jour à l'autre ; mais ce qui serait désirable, et ce qui pourrait se faire immédiatement, ce serait au moins l'initiation aux premiers éléments du calcul de généralisation, à côté des méthodes en usage. Quelques applications bien choisies permettraient, sans aucune perte de temps, bien au contraire, de juger en connaissance de cause du degré de puissance de cet instrument nouveau, digne assurément d'attirer l'attention des mathématiciens.

C.-A. LAISANT.

**L'Education mathématique**, journal publié par J. GRIESS et H. VUIBERT, paraissant le 1<sup>er</sup> et le 15 de chaque mois ; 1<sup>re</sup> année, 1898-1899 : prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. : Etranger, 6 fr. Paris, Nony.

Voici un Recueil dont le titre ressemble bien au nôtre, et cependant il n'y a eu, chez les fondateurs, aucune connaissance réciproque de leurs projets respectifs. Du reste, si le but à atteindre n'est pas sans analogie de part et d'autre, les moyens mis en œuvre sont bien différents, comme on va s'en rendre compte. La création de l'*Education mathématique* a pour raison d'être l'abandon actuel des classes de mathématiques en France, et l'abaissement du niveau moyen, qu'on peut malheureusement constater avec trop de facilité. Ainsi qu'ils le disent eux-mêmes, les rédacteurs voudraient, par leur publication « seconder l'action éducative du professeur de mathématiques ». L'*Education mathématique* s'adresse aux élèves, en restant dans le domaine exclusivement élémentaire ; elle publie surtout des questions et des exercices, et en outre des articles dont les professeurs pourront souvent tirer un utile profit. Nous signalerons par exemple, dans le premier numéro, de très judicieuses « Remarques générales sur la démonstration des théorèmes de Géométrie ». Enfin, le nouveau Recueil se propose de faire une petite place à l'histoire des mathématiciens célèbres.

Nous croyons, en résumé, qu'il y a là une tentative utile et fort intéressante, à laquelle nous souhaitons très sincèrement le succès qu'elle mérite.

**Annuaire pour l'an 1899**, publié par le bureau des longitudes : avec des notices scientifiques. 1 vol. in-18 de VI-784 p., 2 cartes magnétiques. — Prix : 1 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars.

Ce petit volume compact, qui vient, comme chaque année, de paraître dans le courant du mois de décembre dernier, contient une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur constructeur P. GAUTIER, sur le *Sidérostat à lunette de 60 mètres de foyer et de 1<sup>m</sup>, 25 d'ouverture* (qu'il construit pour l'exposition de 1900) ; la notice sur les ballons-sondes par M. BOUQUET DE LA GRYE ; et la notice sur la Géodésie moderne en France, par le colonel BASSOT.