Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1899)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES RAPPORTS DU CALCUL INTÉGRAL ET DE LA GÉOMÉTRIE

Autor: Franz Meyer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1241

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

reproduire. C'est en effet la partie la plus essentielle, et nous partageons complètement ses opinions sur ce sujet. Mais, quant au développement ultérieur de l'instruction géométrique, il y aurait encore beaucoup de remarques à faire et beaucoup de critiques à exercer. Soit par la méthode suivie (et dont beaucoup d'auteurs et de professeurs tentent visiblement de se dégager), soit par le choix souvent absurde des innombrables propositions entassées sous le nom de théorèmes, soit par l'omission de notions essentielles qui sont systématiquement passées sous silence, on paralyse les élèves, on anéantit à l'avance les résultats, on se donne beaucoup de peine pour en retirer peu de profit. C'est un sujet sur lequel j'espère pouvoir revenir, non pas dans un article, mais dans vingt peut-être, car le sujet est vaste, sinon inépuisable. Mais ce sujet, je ne veux pas même l'effleurer ici, et je préfère livrer simplement à la méditation des professeurs les réflexions du savant dont j'ai essayé ci-dessus de me faire l'interprète.

C.-A. LAISANT.

SUR QUELQUES RAPPORTS

DU CALCUL INTÉGRAL ET DE LA GÉOMÉTRIE [1]

Les applications du calcul intégral élémentaire, à la Géométrie des courbes et des surfaces sont bien connues. Cependant la Géométrie peut être utilisée directement et avec avantage comme principe heuristique et quelquefois comme moyen de démonstration d'anciennes et de nouvelles formules d'intégration; ces dernières en acquièrent une signification immédiatement saisissable, ce qui, au point de vue pédagogique, n'est pas sans importance. Quelques relations de ce genre vont être développées plus bas. Dans la plupart des cas, la preuve en est tellement évidente, qu'elle peut être négligée.

---

[1] Conférence faite le 9 décembre 1898, à la Section des Sciences Mathématiques et Physiques de la *Physikal-Oekonom. Gesellschaft* à Kœnigsberg.

Nous commençons par les formules fondamentales de la théorie des quantités irrationnelles quadratiques :

$$(1) \qquad 2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + arc\ sin\ x,$$

$$(2a) \qquad 2\int\sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - l(x+\sqrt{x^2-1}),$$

$$(2b) \qquad 2\int\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} + l(x+\sqrt{x^2+1}).$$

La formule (1) est géométriquement évidente. Considérons un point (x, y), dans le premier quadrant, sur la circonférence du cercle

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Traçons le rayon vecteur r, désignons par Σ le secteur de cercle compris entre r et la partie positive de l'axe des y, par J_y la surface comprise entre x, y, l'axe positif des y et l'arc de cercle, enfin par Δ le triangle rectangle de côtés x, y, la formule (1) dit assurément que

$$(1') \qquad J_y = \Sigma - \Delta.$$

Dans le cas d'une ellipse, il ne se présente pas de transformation importante ; des facteurs constants s'introduisent dans les deux membres de (1) mais n'en altèrent pas la signification géométrique. — La formule (2a) ou son équivalente (2b) se rapporte d'une manière analogue à la figure d'une hyperbole équilatère ou aussi d'une hyperbole quelconque.

Soit

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'hyperbole, O le centre, S le sommet [1], P (x, y), un point de l'hyperbole que nous pouvons supposer dans le premier quadrant ; soient X, Y les pieds de x, y sur les axes. Le rayon vecteur limite avec O S et l'arc d'hyperbole P S $= s$ un secteur Σ ; x, y sont les côtés d'un triangle rectangle Δ. L'arc s

[1] Au lieu de l'abscisse a du sommet, qui n'est choisie que par raison de commodité, on peut prendre, dans toutes les formules d'intégral, l'abscisse d'un point quelconque de l'hyperbole.

limite avec les coordonnées x et y, et les deux axes, deux surfaces J_x et J_y.

Enfin soient a_1 et a_2 les asymptotes dans le premier et le quatrième quadrant; construisons par P et S des parallèles à a_2 jusqu'à leurs points d'intersection P_1 et S_1 avec a_1; appelons la surface « A » limitée par s et les segments PP_1, SS_1, P_1S_1 la *surface asymptotique* [1] de s. Les formules $(2a)$ et $(2b)$ expriment comme le montre un calcul simple que

$$(2a)' \quad J_x = \Delta - A, \qquad\qquad (2b)' \quad J_y = \Delta + A.$$

Mais inversement, l'existence de cette relation peut être rendue visible au moyen de la Géométrie élémentaire pure. Car d'après une propriété fondamentale de l'hyperbole (qui peut aussi passer pour une définition) les triangles OSS_1 et OPP_1, possèdent la même surface, qui est la moitié du « parallélogramme asymptotique » Π de surface constante dans l'hyperbole et égale à $\frac{ab}{2}$.

Mais la surface limitée par s et les segments SO, OP_1, P_1P est décomposée d'abord par r en deux parties Σ et OPP_1, puis d'un autre côté par SS_1 en deux parties A et OSS_1 de sorte qu'on en déduit

$$(5) \qquad \Sigma = A.$$

D'ailleurs la figure montre au premier coup d'œil que

$$(6) \qquad J_y + J_x = 2\Delta, \qquad\qquad \Sigma + J_x = \Delta,$$

donc aussi que

$$(7) \qquad J_y - J_x = 2\Sigma, \qquad\qquad J_y - \Sigma = \Delta,$$

Relations vraies pour tout arc de courbe PS (non seulement pour un arc d'hyperbole).

Au moyen de (6), (7), on reconnaît que la relation (5) est équivalente à $(2a)'$ ou aussi à $(2b)'$ et peut enfin prendre la forme

$$(8) \qquad J_y - J_x = 2A.$$

---

[1] Si l'on exécute la même construction, en intervertissant les asymptotes, on obtient une deuxième « surface asymptotique », qui a la même surface que A, comme le montre la figure.

Nous avons donc ce résultat :

« Le théorème de la constance du parallélogramme asymptotique dans l'hyperbole est *équivalent* [1] aux relations $(2a)'$, $(2b)'$, (5), (8) et représente en même temps la valeur des formules intégrantes $(2a)$, $(2b)$ « Y ».

La même figure, ainsi que le calcul permettent de vérifier que l'une quelconque des quatre propriétés $(2a)'$, $(2b)'$ (5), (8) est une caractéristique de l'hyperbole. En effet la différentielle de $J_y - J_x - 2A$ par rapport à x est égale, à un facteur constant près, à la différentielle de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ par rapport à x, comme on s'en aperçoit si on utilise les asymptotes comme axes de coordonnées obliques.

Ce théorème se laisse généraliser.

Soit un système d'axes rectangulaires O_x, O_y ainsi que deux droites a_1, a_2 également inclinées sur l'axe des x. Si l'on construit d'après l'indication donnée plus haut, la surface A pour tout arc de courbe P S et si l'on cherche toutes les courbes P S pour lesquelles J_x, J_y, A sont liées par une relation linéaire à coefficients constants :

$$nJ_y + mJ_x = kA, \tag{9}$$

on obtient une équation différentielle de la forme :

$$y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \tag{10}$$

qui est intégrable par une méthode connue, et inversement la signification géométrique d'une équation différentielle (10) pour des valeurs quelconques de α, β, γ, δ (les signes étant convena-

---

[1] D'autre part, le théorème dont il s'agit est aussi équivalent aux théorèmes, soit sur l'égalité des deux surfaces asymptotiques, soit sur la propriété dont jouit le segment de tangente compris entre les asymptotes, d'être divisé en deux parties égales, au point de contact, ainsi qu'à ce théorème sur la proportionnalité de la sous-normale à l'abscisse (les signes étant choisis convenablement), puis au théorème qui dit que II est la moitié du triangle D, que forme la tangente avec les asymptotes, enfin (dans le cas où les droites sont repoussées comme solution non satisfaisante) au fait que D a, en tous cas, une surface constante. Car toutes ces suppositions conduisent de la même manière, à l'équation différentielle $yy' = k^2x$. On se rend compte, comment on peut employer le principe fondamental dans les propriétés des courbes.

blement choisis) est une relation (9) dans laquelle les rapports de n, m, k sont déterminés. On remarquera qu'au moyen des formules générales (6), (7) la relation (9) peut être transformée en six formes d'apparence différente, mais équivalentes quant au fond [1].

Considérons exclusivement cette formule générale (6) ou aussi (7).

La première des formules (6) écrite explicitement

$$\int x dy + \int dy x = xy \tag{6a}$$

n'est pas autre chose qu'une forme particulière de l'intégration partielle, qui pratiquement a pour but de réunir deux par deux, des intégrales dont les fonctions sont inverses.

Cette singularité de la forme n'est cependant qu'apparente. Supposons x et y fonctions d'une troisième variable t ce qui ne change pas du tout la signification géométrique des deux membres de (6a), mais (6a) prend alors la forme :

$$\int x \frac{dy}{dt} dt + \int y \frac{dx}{dt} dt = xy \tag{6a'}$$

et l'on reconnaît aussitôt que cela représente la règle générale de l'intégration partielle.

« La loi de l'intégration partielle reçoit ainsi un sens géométrique commun. »

La seconde des formules générales (6) $\Sigma + J_x = \Delta$ s'écrit dans le calcul intégral

$$\int r^2 d\varphi = xy - 2\int y dx. \tag{6b}$$

---

[1] On déduit de (9) par un calcul facile, les cinq relations :

$$J_x (m+n) - 2m\Delta + 2\varrho A = 0, \qquad J_y (m+n) - 2n\Delta - 2\varrho A = 0,$$
$$\Sigma (m+n) + \Delta (m-n) - 2\varrho A - 0,$$
$$J_y (m-n) + 2m\Sigma - 2\varrho A = 0, \qquad J_x (m-n) + 2n\Sigma - 2\varrho A = 0,$$

qui restent valables dans les cas d'exception

$$(m = 0, \quad n = 0, \quad \varrho = 0, \quad (m+n) = 0, \quad (m-n) = 0);$$

On peut encore augmenter le nombre des formes équivalentes, en introduisant les quantités présentées dans la remarque sur la formule (8).

En effet il est facile de démontrer analytiquement que la formule (6*b*) apparaît, quand on introduit dans l'intégrale $\int y\,dx$ les coordonnées polaires r, φ au lieu des rectangulaires x, y. Car si r' représente la différentielle de r par rapport à φ on a immédiatement :

$$(11)\qquad \begin{cases} J_x = \int y dx = \int r \sin\varphi\,(-r\sin\varphi + r'\cos\varphi)\,d\varphi \\ J_y = \int x dy = \int r\cos\varphi\,(r\cos\varphi + r'\sin\varphi)\,d\varphi \end{cases}$$

d'où par soustraction :

$$(12)\qquad J_y - J_x = \int r^2 d\varphi$$

et ainsi, à cause de (6*a*), on obtient la relation (6*b*) dont il est question. Le calcul précédent est de nouveau susceptible d'une généralisation importante. Si l'on traite de même manière les intégrales $\int x^m y^n dx$ et $\int x^n y^m dy$, on obtient de suite au moyen de (6*a*)

$$(12)\quad (m+1)\int r^{m+n+1}(\cos\varphi)^m(\sin\varphi)^{n-1}d\varphi = x^{m+1}y^n - (m+n+1)\int x^m y^n\,dx.$$

m, n signifient ici des exposants quelconques (excepté $m+1=0$) et y est une fonction quelconque de x. La formule est susceptible de nombreuses applications ; si, en particulier, m et n sont des nombres entiers, x et y liés par une équation du deuxième degré, l'intégrale de droite se ramène par des méthodes connues aux fonctions logarithmiques et cyclométriques. La même méthode régit aussi l'intégrale de gauche qui représente une classe étendue d'intégrales trigonométriques, difficiles à effectuer directement.

Dans le cas où $m=0$, $n=2$ on obtient la formule utile aux surfaces de révolution :

$$(13)\qquad \int r^3 \sin\varphi d\varphi = xy^2 - 3\int y^2 dx$$

(cette formule peut aussi se déduire de la règle de Guldin).

On se demandera si la deuxième méthode principale du calcul intégral élémentaire, la méthode, dite de substitution, n'est pas aussi susceptible d'une représentation géométrique simple.

Il est bon de prendre pour point de départ la règle équivalente du calcul différentiel, c'est-à-dire, si x, y, z sont des fonctions de t, la formule :

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 1. \tag{14}$$

Le point P (x, y, z) parcourt une courbe gauche; si l'on projette la tangente en P sur les plans des (xz), (zy), et si l'on désigne par γ_x, β_z, α_y les angles de ces projections avec la direction positive des axes des x, des y et des z, la relation (14) dit que :

$$tg\gamma_x . tg\beta_z . tg\alpha_y = 1. \tag{15}$$

Mais c'est une formule générale (jusqu'ici peu considérée, semble-t-il) des éléments de la géométrie analytique. En effet si une droite quelconque, dans l'espace, formant avec les axes les angles α, β, γ, est projetée comme ci-dessus, on a immédiatement :

$$tg\gamma_x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \; tg\beta_z = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \; tg\alpha_y = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}, \tag{16}$$

d'où l'on déduit (15); inversement il est clair que (15) est la condition nécessaire et suffisante pour que trois directions sur les plans de coordonnées soient la projection d'une direction dans l'espace. Remarquons, en passant, que la détermination d'une direction dans l'espace, par les angles γ_x, β_z α_y offre plusieurs avantages sur la méthode ordinairement employée, qui consiste à utiliser les angles γ, β, α; il en est de même en Géométrie descriptive et surtout dans les cas où le sens de la direction n'importe pas [1].

La formule (15) peut encore avoir une autre signification. Si à la place des angles γ_x, β_z, α_y, on introduit leurs suppléments, c'est-à-dire les angles des projections avec les axes négatifs, ou bien encore leurs compléments c'est-à-dire les angles des projections avec les axes négatifs des y, des x et des z, et si l'on

[1] Ainsi par exemple dans la détermination des différents angles W dans l'espace, quand il existe une ou plusieurs relations entre la quantité W, et les valeurs des trois angles de projection; particulièrement quand les quatre angles sont donnés d'une manière quelconque.

désigne les tangentes de ces six angles par t_γ, t_β, t_α, t'_γ, t'_β, t'_α, on aura les relations :

$$(17) \qquad t_\gamma t_\beta t_\alpha = -1, \quad t'_\gamma t'_\beta t'_\alpha = -1, \quad t_\gamma = \frac{1}{t'_\gamma}, \quad t_\beta = \frac{1}{t'_\beta}, \quad t_\alpha = \frac{1}{t'_\alpha}.$$

On obtient ainsi une généralisation directe de la notion du rapport anharmonique dans le cas de deux variables indépendantes.

En effet, la relation (17) existe entre les 6 valeurs d'un rapport anharmonique; il est vrai qu'il s'en présente une autre (formant avec celle-ci un rapport anharmonique) qui peut s'écrire, symétriquement, au moyen des angles α, β, γ :

$$(18) \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

En d'autres termes : pour un faisceau de rayons pris dans le plan $x + y + z = 0$, et dont le sommet est à l'origine O, les six quantités t, t' représentent les six valeurs du rapport anharmonique, comme paramètres [1] du faisceau de rayons.

Si la condition (18) disparaît, les quantités t, t' deviennent les paramètres du faisceau de rayons O.

W. Franz Meyer (Königsberg).

(Traduit de l'allemand par Alph. Bernoud.)

DE LA NOMOGRAPHIE

ET DE LA NÉCESSITÉ DE L'INTRODUIRE DANS L'ENSEIGNEMENT

Quel qu'il soit, physicien, chimiste, astronome, ingénieur, peu importe, un homme de science qui n'est pas théoricien pur doit très souvent rechercher les résultats numériques auxquels con-

[1] Cela ressort immédiatement du fait que les six valeurs d'un rapport anharmonique, quand l'une d'elles est égalée au carré de la tangente d'un angle, coïncident avec les carrés (pris avec le signe convenable) des six fonctions trigonométriques fondamentales. Ceci a un rapport très étroit avec la définition d'un angle dans la géométrie projective.