Pierre Fermat

Autor(en): **Itard, Jean**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **8/9/10 (1950)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-5642

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Pierre Fermat

Pierre Fermat fut baptisé le 20 Août 1601, à Beaumont de Lomagne, actuellement chef-lieu de canton du département du Tarn et Garonne.

Son père, Dominique Fermat, bourgeois, était second consul de Beaumont, sa mère, Claire de Long, était d'une famille de robe. Elève chez les Cordeliers de Beaumont, il termina ses études à Toulouse, où il s'inscrivit comme avocat au Parlement. Il fit ensuite une carrière de magistrat, entièrement à Toulouse: Commissaire aux requêtes le 14 Mai 1631, Conseiller de la Chambre des enquêtes le 30 Décembre 1634, Conseiller de la Chambre de l'édit en Août 1648. Il s'était marié le 1er Juin 1631 avec une cousine de sa mère, Louise de Long, dont il eut cinq enfants: Clément-Samuel qui fut comme lui magistrat et qui devait éditer partiellement ses œuvres; Jean qui fut archidiacre de Fimarens; Claire dont un petit-fils, Jean Gaillard, devait succéder comme conseiller à Jean-François, fils de Samuel, et Catherine et Louise qui devaient entrer toutes deux en religion. Il mourut à Castres, où l'appelaient souvent les devoirs de sa charge, le 12 Janvier 1665.

Il ne nous est véritablement connu qu'à travers ses écrits et sa correspondance. Ce qui nous reste de celle-ci débute par une lettre adressée au Père Mersenne, le 26 Avril 1636. Il a déjà 35 ans, est en pleine possession de son génie, et a acquis une certaine notoriété par ses travaux mathématiques. Nous ignorons donc tout de ses premiers maîtres, et de la formation scientifique qu'il a reçue. Il apparaît cependant comme très versé dans les langues anciennes, et imprégné de culture classique. Lorsque sa correspondance commence il a déjà profondément médité sur les mathématiciens de l'antiquité et a subi par ailleurs très fortement l'influence de Viète, aux méthodes et aux notations duquel il restera fidèle jusqu'à la fin de sa vie. C'est un point où il se différencie de Descartes, plus influencé par les mathématiciens flamands, et dont les notations, plus évoluées, devaient finir par triompher.

La célébrité de Fermat, de son vivant, fut restreinte aux milieux scientifiques: milieux universitaires en Italie, dans les Flandres, en Angleterre, milieux d'amateurs éclairés, en France, principalement formés de juristes et de prêtres, et où les universitaires, comme Roberval, étaient l'exception. Il ne fut jamais mathématicien de métier, et n'accordait à la science que ses moments de loisir, qu'elle devait partager avec les vers latins et d'abondantes lectures, et qui étaient d'ailleurs peu nombreux pour un Parlementaire chargé d'une nombreuse famille. Il n'a pour ainsi dire pas rédigé d'ouvrage complet, et la plupart de ses essais sont demeurés manuscrits de son vivant. Ils circulaient entre ses amis et correspondants, qui en prenaient des copies plus ou moins fidèles. Jamais ou presque jamais il ne pousse à fond une démonstration, mais il se contente d'en indiquer le principe et la marche générale, laissant à la sagacité de ses

lecteurs le soin de développer les cas particuliers et de discuter les problèmes. Cette sorte de nonchalance lui fit parfois manquer des découvertes, comme celle des quadriques réglées qu'il laissera à Wren et à Parent.

Lorsque, dans son âge mûr, il s'aperçut que ses découvertes risquaient d'être perdues, il chercha des collaborateurs capables de les mettre au point et de les éditer. C'est ainsi qu'il pensa à Carcavi, son principal correspondant à Paris et le dépositaire de la plupart de ses manuscrits, et à Pascal. Il écrit à Carcavi le 9 Août 1654: «J'ai été ravi d'avoir eu des sentiments conformes à ceux de M. Pascal, car j'estime infiniment son génie et je le crois très capable de venir à bout de tout ce qu'il entreprendra. L'amitié qu'il m'offre m'est si chère et si considérable que je crois ne devoir point faire difficulté d'en faire quelque usage en l'impression de mes Traités.

«Si cela ne vous choquoit point, vous pourriez tous deux procurer cette impression, de laquelle je consens que vous soyez les maîtres; vous pourriez éclaircir ou augmenter ce qui semble trop concis et me décharger d'un soin que mes occupations m'empêchent de prendre. Je désire que cet Ouvrage paroisse sans mon nom, vous remettant, à cela près, le choix de toutes les désignations qui pourront marquer le nom de l'auteur que vous qualifierez votre ami.»

Ces tentatives d'édition échouèrent. Ce que n'avait pu réaliser Fermat lui-même, son fils aîné Samuel le tenta, et le réalisa en partie. Malheureusement Samuel, érudit et lettré, n'était pas mathématicien, et ses éditions s'en ressentent. Il publia en 1670 une nouvelle édition du Diophante de Bachet de Méziriac, augmentée de remarques de son père, et complétée par le traité du Père de Billy «Doctrinæ analyticæ inventum novum». En 1679 enfin il put faire paraître les «Varia Opera», qui sont bien loin de contenir la totalité des découvertes de Fermat.

Raconter la vie du grand mathématicien se résume à étudier ses divers écrits. Dans l'impossibilité de les analyser tous, nous devrons faire un choix, ne retenant que ceux qui, à tort peut-être, nous apparaissent comme les plus importants.

Une de ses premières œuvres fut une reconstitution des Lieux Plans d'Apollonius, reconstitution dont le livre deux, le plus ancien, était déjà composé en 1629, alors que l'auteur n'avait que 28 ans. Il avait à sa disposition la traduction latine par Commandin de la Collection Mathématique de Pappus, ouvrage qui exercera sur lui une grande influence, et où se trouvent résumés les énoncés des propositions d'Apollonius. Ce traité, comme tous ceux qu'il composera, à l'exception de sa correspondance, est rédigé en latin. Nos citations seront tirées pour ce traité comme pour les suivants de la traduction française de Paul Tannery.

Les lieux plans sont des lieux géométriques qui ne comprennent que des droites et des cercles. En langage moderne la plus grande partie du livre I de l'ouvrage d'Apollonius peut se résumer ainsi: l'homothétie, la translation, la rotation, la similitude et l'inversion transforment un lieu plan en un lieu plan. Le livre II, qui fut le premier restitué par Fermat, comprend les lieux des points dont la différence des carrés des distances à deux points donnés est constante, ou dont le rapport des distances aux deux points est constante, dont les carrés des distances à ces deux points ont entre eux une

relation linéaire, ou dont les carrés des distances à plusieurs points ont entre eux une relation linéaire homogène, etc. . . .

Ce travail, commencé comme nous l'avons signalé plus haut avant 1629, et qui n'apporte rien de nouveau, mais qui montre déjà de profondes connaissances en Géométrie ancienne, semble avoir occupé Fermat à plusieurs reprises jusqu'en 1636. «La question la plus difficile et la plus belle» n'a guère dû être trouvée que vers cette époque. Il s'agit de la 7e du livre I: «Soient en nombre quelconque des droites données de position, auxquelles on mène d'un point des lignes droites sous des angles donnés; si le produit d'une ligne donnée et d'une des menées, avec le produit de la ligne donnée et d'une autre menée etc. . . ., est égal au produit d'une donnée et de la dernière des menées, le point sera sur une ligne droite donnée de position». Cette proposition est difficile par les procédés des anciens. Fermat ne l'établit que pour trois droites. Sa démonstration est synthétique. Elle est pénible à suivre, et ne saurait être une méthode de découverte. Son intérêt historique réside dans le fait qu'elle prouve qu'au moment où Fermat la rédigeait, moment antérieur, mais de peu, au 26 Avril 1636, il n'était pas en possession de sa géométrie analytique. D'ailleurs il écrit lui-même, après sa découverte de cette géométrie: «Si cette découverte eût précédé notre restitution déjà ancienne des deux livres des lieux plans, les constructions des théorèmes et des lieux en eussent été rendues beaucoup plus élégantes; cependant nous ne regrettons pas cette production, quoique précoce et insuffisamment mûrie. Il y a en effet pour la Science un certain intérêt à ne pas dérober à la postérité les travaux encore informes de l'esprit; l'œuvre d'abord simple et grossière se fortifie et grandit par les nouvelles inventions. Il est même important pour l'étude de pouvoir contempler pleinement les progrès cachés de l'esprit et le développement spontané de l'art.»

Un autre court traité géométrique de Fermat sur «Les Contacts Sphériques» est difficile à dater. Il généralise à l'espace la reconstitution par Viète du traité d'Apollonius sur les contacts. Ce mémoire traite quinze problèmes qui correspondent aux quinze combinaisons obtenues en prenant quatre éléments parmi l'ensemble de quatre points, quatre plans, quatre sphères. Il s'agit de construire une sphère passant par les points et tangente aux plans et aux sphères. Fermat ne donne jamais le nombre de solutions de chacun de ces problèmes. Il établit cinq lemmes se rapportant à la puissance d'un point par rapport à une sphère ainsi qu'aux points de contact d'une sphère avec deux autres ou avec une autre et un plan. Suivant son habitude, il se refuse à entrer dans les détails, l'examen des divers cas, les discussions etc. . .

Doivent être datées de cette première période, où Fermat apparaît surtout comme un bon disciple des anciens, sa construction de la parabole passant par quatre points, antérieure à 1635, élégante, mais où la raison évoquée pour l'existence de deux solutions est fautive, et sa démonstration du lieu à trois droites, très élégante elle aussi. Le lieu à trois droites est le lieu des points dont le rapport du produit des distances à deux droites au carré de la distance à une troisième est donné. C'est, avec le lieu à quatre droites, un problème célèbre de l'antiquité, que devait reprendre Descartes dans sa Géométrie.

Nous arrivons à l'un des mémoires capitaux de Fermat, son «Ad locos Planos et Solidos Isagoge». Il date de 1636 environ, et se trouve indépendant des méthodes analogues publiées par Descartes dans sa Géométrie de 1637. En fait même, la méthode de Fermat est plus proche de la géométrie analytique actuelle que ne l'est celle de Descartes. Voici l'introduction de ce très court essai:

«Que les anciens aient longuement traité des lieux, on ne peut en douter; nous le savons par Pappus, qui, au commencement du livre VII, témoigne qu'Apollonius avait écrit sur les lieux plans, et Aristée sur les lieux solides. Mais, si nous ne nous trompons pas, la recherche des lieux ne leur était point suffisamment aisée. Nous le conjecturons de ce fait que, pour nombre de lieux, ils n'ont point donné un énoncé assez général, ainsi qu'on le verra plus loin.

«Nous soumettons donc cette théorie à une analyse qui lui est propre et particulière, et qui ouvre la voie générale pour la recherche des lieux.

«Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extrémité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe. La ligne droite est simple et unique dans son genre, les espèces des courbes sont en nombre indéfini, cercle, parabole, hyperbole, ellipse, etc. . . .

«Toutes les fois que l'extrémité de la quantité inconnue qui décrit le lieu suit une ligne droite ou circulaire, le lieu est dit *plan;* si elle décrit une parabole, une hyperbole ou une ellipse, le lieu est dit *solide;* pour les autres courbes, on l'appelle lieu de *ligne.* Nous n'ajouterons rien sur ce dernier cas, car la connaissance du lieu de *ligne* se déduit très facilement, au moyen de réductions, de l'étude des lieux *plans* et *solides.*

«Il est commode, pour établir les équations, de prendre les deux quantités inconnues sous un angle donné, que d'ordinaire nous supposerons droit, et de se donner la position et une extrémité de l'une d'elles; pourvu qu'aucune des deux quantités inconnues ne dépasse le carré, le lieu sera plan ou solide, ainsi qu'on le verra clairement ci après.»

Rappelons que Fermat, disciple de Viète, en adopte les notations. Les inconnues sont représentées par des voyelles, les données par des consonnes. Rappelons aussi, qu'avec tous ses contemporains, il ne manie en général que des quantités positives. Enfin, dans ses essais, les problèmes ne sont jamais discutés, et il n'indique que la solution générale. En utilisant la similitude des triangles, puis en s'appuyant sur les Coniques d'Apollonius, il montre que si:

D in A æquatur B in E ($dx = by$), le lieu est une droite, Z plano — D in A æquatur B in E ($m^2 - dx = by$), le lieu est encore une droite.

Remarquer l'homogénéité des formules; à la façon de Viète, Z plano signifie que la grandeur Z est un plan, une aire.

A in E æq. Z pl. ($xy = m^2$) donne une hyperbole, ainsi que D pl. + A in E æq. R in A + S in E ($m^2 + xy = ax + by$). Fermat détermine le centre et les asymptotes de cette courbe.

A q æquatur D in E ($x^2 = py$) donne une parabole ainsi que B q — A q æq. D in E ($b^2 - x^2 = py$).

L'équation B q — A q æquatur E q ($b^2 - x^2 = y^2$) donne une cercle, comme B q — D in A bis — A q æquale E q + R in E bis ($b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry$), mais B q — A q ad E q habeat rationem datam, [$(b^2 - x^2)/y^2 = p/q$] correspond à une ellipse, tandis que A q + B q est ad E q in data ratione correspond à une hyperbole. Tous ces cas se ramènent en effet aisément aux définitions des diverses coniques dans Apollonius. Fermat traite ensuite des cas plus compliqués comme B q — A q bis æquatur A in E bis + E q ($b^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$). Il effectue alors un véritable changement d'axes de coordonnées. Il ajoute: «Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides». Enfin, «comme couronnement à son traité», il énonce la proposition très générale: «Etant données de position des droites en nombre quelconque, si d'un même point on mène à chacune d'elles une droite sous un angle donné, et que la somme des carrés des droites menées soit égale à une aire donnée, le point est sur un lieu solide donné de position.»

Ce traité capital est d'ailleurs suivi d'un appendice aussi important, et à peu près contemporain: «*Appendix ad Isagogen Topicam, continens solutionem problematum solidorum per locos*». Il y est exposé une méthode générale pour résoudre les problèmes solides c'est-à-dire dépendant d'une équation du 3e ou du 4e degré, par les lieux. On notera ici encore le parallélisme des préoccupations de Fermat et de celles de Descartes dans sa géométrie. Le premier exemple concerne la résolution de l'équation:

A c + B in A q æquari Z pl. in B, c'est-à-dire $x^3 + bx^2 = m^2 b$. On égale chaque membre à bxy, d'où d'une part la parabole $x^2 + bx = by$, et d'autre part l'hyperbole $m^2 = xy$. L'inconnue x sera l'abcisse d'un point commun aux deux courbes. Toute équation du 4e degré après «expurgation de l'affection sur le cube» suivant le procédé de Viète, c'est-à-dire après disparition du terme en x^3, se ramène à un type analogue et donne l'intersection d'une parabole et d'un cercle ou d'une hyperbole. Choisissant alors l'antique problème de l'insertion de deux moyennes, qu'il ramène à l'équation $x^3 = a^2 b$, Fermat en donne deux solutions: en égalant les deux membres à axy il le résout par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole, et, partant de $x^4 = a^2 bx$, et égalant les deux membres à $a^2 y^2$, par l'intersection de deux paraboles. Mieux, il montre ensuite que tout problème solide se résout par l'intersection d'une parabole et d'un cercle, ce qu'il applique à plusieurs exemples, dont, une fois de plus, l'insertion des deux moyennes.

L'Isagoge ad locos ad Superficiem est daté de 1643. La Correspondance montre cependant que plusieurs des propositions qu'il renferme étaient établies depuis 1636, 37 ou 38. C'est dans ce mémoire que l'on sent le mieux dans quel isolement scientifique se trouvait le grand mathématicien. Le moindre disciple qui aurait travaillé à ses côtés, sous sa direction, aurait enrichi ce travail de découvertes précieuses, par exemple celle des quadriques réglées. L'ouvrage est fort court, pas même sept pages dans l'édition des œuvres complètes de 1891, où il fut édité pour la première fois.

«Pour couronner l'*Introduction aux lieux plans et solides*, ainsi débute Fermat, il reste à traiter des *lieux en surface*. Les anciens n'ont fait qu'indiquer ce sujet, mais n'ont pas enseigné de règles générales, ni même donné quelqu'exemple célèbre, à moins

que ce ne soit enseveli depuis longtemps dans ces monuments de l'antique Géométrie où tant de précieuses découvertes ont été abandonnées sans défense aux insectes et souvent anéanties sans laisser de traces.» Il pose, sans démonstrations, six lemmes:

1° Si une surface est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces plans en nombre indéfini soit toujours une ligne droite, la surface en question sera un plan.

2° Si une surface quelconque est coupée par autant de plans quelconques que l'on voudra, et que l'intersection de cette surface et de ces plans en nombre indéfini soit toujours un cercle, la surface en question sera une sphère.

3° Si la section est tantôt un cercle, tantôt une ellipse, mais jamais une autre ligne, la surface sera un sphéroïde (un ellipsoïde).

4° Si la section est tantôt un cercle, tantôt une parabole ou une hyperbole, la surface sera un conoïde parabolique ou hyperbolique (paraboloïde non réglé ou hyperboloïde à deux nappes).

5° Si la section est une droite, un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole, la surface sera un cône. On voit ici que Fermat ne soupçonne pas l'existence des quadriques réglées.

6° Si la section est une droite, un cercle ou une ellipse, la surface sera un cylindre.

Mais, ajoute-t-il, il convient en plus de considérer des cylindres à base parabolique ou hyperbolique, d'autre part, les sphéroïdes et les conoïdes d'Archimède, qui étaient de révolution ne suffisent pas, et il faut en considérer d'obliques. Il établit alors que le lieu des points dont la somme des carrés des distances à des points donnés est donnée est une sphère, lieu qu'il généralise même. Le lieu des points dont la somme des carrés des distances obliques, sous des angles donnés, à des plans donnés est donnée, est un sphéroïde. Mais, quand il généralise à une fonction linéaire quelconque des carrés des distances, il affirme que le lieu est une des quadriques qu'il a énumérées dans ses lemmes. Un seul cas particulier, bien étudié, lui eut cependant ouvert les yeux, par exemple le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux plans surpasse le carré de la distance à un troisième d'un carré donné. Il trouve ensuite que si les distances aux plans donnés ont entre elles une relation linéaire, le lieu est un plan et détermine quelques autres lieux, tous des quadriques, avec la même faiblesse que plus haut. Il conclut: «Les divers cas, les conditions limites pour les données, les problèmes ou théorèmes locaux en nombre infini que nous avons omis pour être plus bref, la démonstration des lemmes énoncés et tout ce qui aurait peut-être besoin d'une plus longue explication, sera facilement supplée par tout géomètre soigneux et réfléchi qui aura lu ce écrit: désormais ce sujet, qui paraissait singulièrement ardu, est rendu aisé à comprendre.»

Mais il nous faut maintenant aborder un autre aspect de l'œuvre multiple de Fermat, et l'étudier comme précurseur du Calcul Différentiel. Dès 1629 il était en possession de sa *Méthode de recherche des maxima et minima.* A la suite de Montucla, beaucoup d'historiens la font reposer à tort sur cette remarque de Képler qu'au voisinage d'un maximum ou d'un minimum la variation est sensiblement nulle. Le point de départ, au

témoignage même de Fermat, est absolument différent. Il consiste en ce que, de part et d'autre de l'extremum, la fonction reprend la même valeur. Prenons un des exemples de l'auteur. Soit à chercher le maximum de $b^2x - x^3$. Prenons les valeurs x et $x + e$, qui encadrent le maximum à chercher, et pour lesquelles la fonction reprend la même valeur. Nous avons $b^2x - x^3 = b^2(x + e) - (x + e)^3$, d'où $b^2e = e^3 + 3x^2e + 3xe^2$, soit encore $b^2 = 3x^2 + 3xe + e^2$. Au maximum lui-même la différence e sera nulle, d'où $b^2 = 3x^2$, $x = \sqrt{b^2/3}$. Dans une lettre à Brulart de Saint Martin, il va plus loin, recherchant une synthèse de sa méthode, pour compléter l'analyse. En particulier il indique comment distinguer un maximum d'un minimum par un procédé qui revient essentiellement à examiner le signe de la dérivée seconde.

Parmi les applications que fit Fermat de sa méthode, la plus géniale est la détermination des tangentes. Soit une courbe algébrique (Descartes et Fermat disaient «géométrique»).

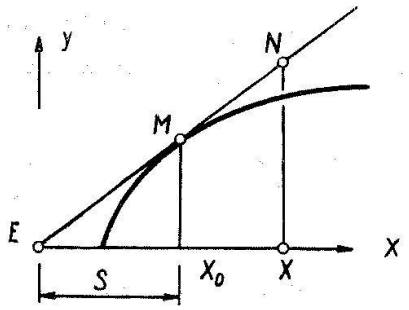


Fig. 1

Son équation s'écrit $P(x, y) = o$, où P est un polynome. La tangente est un point M de coordonnées x_0, y_0, coupe l'axe des x au point d'abscisse $x_0 - s$, si nous désignons par s la sous-tangente. Le point courant N de cette tangente a donc pour coordonnées

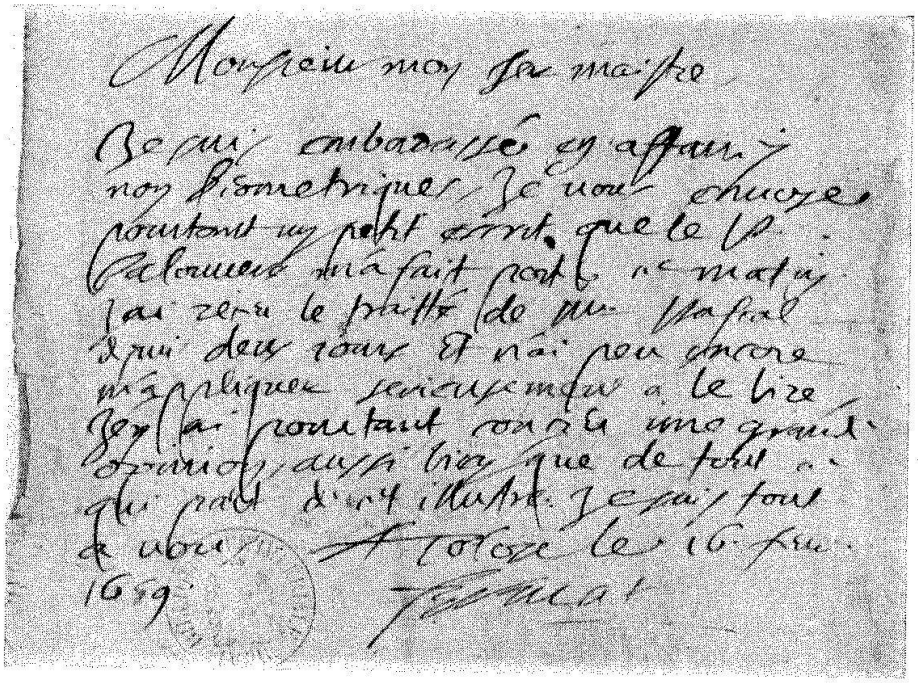
$$x \text{ et } y = \frac{y_0}{s}(x - x_0 + s) \ .$$

Portons cette valeur de y dans P (x, y). Nous obtenons un nouveau polynome en x. *La tangente restant dans la même région par rapport à la courbe au voisinage de* M, ce polynome, qui s'annulera pour $x = x_0$, gardera un signe constant dans ce voisinage. *Il passera donc par un maximum ou par un minimum en* x_0. En exprimant ce fait par la méthode de Fermat on trouvera une équation qui donnera la sous-tangente s.

Cette méthode qu'il fit connaître en 1638, ne fut pas immédiatement comprise par Descartes, un peu par la faute de Fermat, dont le langage mathématique fut toujours d'une très grande concision. Mais si quelqu'un pouvait lui en faire reproche ce n'était certainement pas le philosophe, qui n'aimait pas plus que lui s'étendre en de trop longues explications. La querelle ne s'en envenima pas moins et fut une des plus célèbres du 17e siècle.

La méthode de Fermat, comme celle, beaucoup plus lourde, de Descartes, n'était applicable qu'aux courbes «géométriques», et ne pouvait convenir aux «mécaniques»,

nous dirions aujourd'hui aux transcendantes. Dès 1640 au plus tard, Fermat, par un principe qui crée en fait le calcul différentiel, l'étendit à toutes les courbes. Il écrit déjà à Mersenne le 22 Octobre 1638: «Vous saurez donc que cette même méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées [ordonnées] ou les portions de leur diamètre [abscisses] ont relation à des lignes droites, me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes.» Il choisit plusieurs exemples: le développement de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère, une courbe dont l'ordonnée est égale à un arc de parabole, une autre dont l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la somme de plusieurs arcs de cour-



Fac-similé d'une lettre de Fermat (Bibl. Nat.)

bes et la somme de leurs ordonnées. Le 26 Décembre de la même année, il propose de trouver la tangente à une courbe dont l'ordonnée est la somme de cinq racines carrées de fonctions rationnelles. En 1640 il dévoile sa technique: «Pour éviter les radicaux, il est permis de substituer aux ordonnées des courbes, celles des tangentes» et «aux arcs des courbes les longueurs correspondantes des tangentes trouvées». C'est véritablement là qu'il faut voir le fondement, algorithme en moins, du calcul différentiel. Ce n'est d'ailleurs que dans un écrit de 1660, publié dans le traité de Lalouvère sur la cycloïde, que ses affirmations de 1640 sont justifiées, d'une façon suffisante pour l'époque.

En 1636 Roberval avait soulevé la question des points d'inflexion, à propos de la conchoïde. En 1640 Fermat résout complètement le problème: « ... Il arrive souvent que la courbure change, comme dans la conchoïde de Nicomède et dans toutes les

espèces, sauf la première, de la courbe de M. de Roberval... Pour trouver, par exemple, le point H sur la figure, on cherchera d'abord la propriété de la tangente en un point quelconque de la courbe. Puis, par la doctrine de maximis et minimis, on déterminera

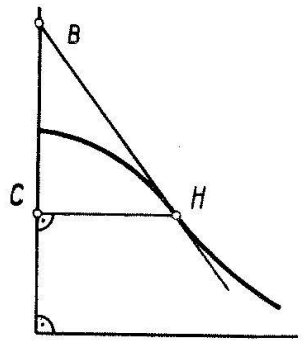


Fig. 2

le point H tel qu'en menant la perpendiculaire HC, et la tangente HB, le rapport HC/CB, soit minimum. Car ainsi l'angle en B sera minimum. Je dis que le point H ainsi trouvé sera celui où commence le changement de courbure.»

La contribution de Fermat à la création du calcul intégral est elle aussi considérable. Sa correspondance nous le montre dès 1636 en possession d'une grande maîtrise dans les méthodes Archimédiennes. Il a déjà généralisé la notion de spirale, à partir de la spirale d'Archimède $\rho = a\,\omega$, étudiant par exemple $\rho = a\,\omega^2$ qu'il a carrée et il sait par ailleurs carrer les paraboles $y = a x^m$, m entier positif. Il indique à Roberval le principe de sa méthode. Elle est fondée sur une de ses découvertes concernant les nombres figurés. Il a en effet établi la formule

$$C_m^p = \frac{m\,(m-1)\,\ldots\,(m-p+1)}{p!},$$

et ce résultat lui permet de trouver la somme des puissances de même ordre des premiers nombres naturels. D'ailleurs Roberval est arrivé au même résultat par un procédé voisin, et Descartes, nous le voyons par sa correspondance, a des conceptions analogues.

Plus tard, probablement même plusieurs années après, Fermat, très ingénieusement, modifie la méthode classique et lui donne une plus grande souplesse. Il fera connaître ce nouveau procédé dans un écrit postérieur à 1660 «De Aequationum localium et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem cui annectitur proportionis Geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus». Dans la recherche d'une intégrale définie (quadrature ou cubature), x variant de o à a et $y = \lambda x^\alpha$, on divisait a en m parties égales; en chacune des divisions $x_p = pa/m$, p entier compris entre o et m, et $y_p = \lambda\, a^\alpha p^\alpha / m^\alpha$. Pour intégrer, il fallait calculer

$$\Sigma\, y_p\,(x_p - x_{p-1}) = (\lambda\, a^{\alpha+1}/m^{\alpha+1}) \sum_1^m p^\alpha\,,$$

et tout revenait, avant de faire tendre m vers l'infini, à sommer Σp^{α}. C'est ainsi qu'entre autres procédait Fermat vers 1636. Sa nouvelle idée est la suivante: si $\alpha > o$, divisons l'intervalle o, a, en une infinité d'intervalles partiels en progression géométrique, c'est-à-dire prenons les abscisses a, x_1, x_2, ... x_p de telle sorte que $a/x_1 = x_i / x_{i+1}$. Les intervalles $a - x_1$, $x_1 - x_2$, ... $x_i - x_{i+1}$ seront en progression géométrique décroissante, ainsi que les ordonnées. Les produits $y_i (x_i - x_{i+1})$ seront aussi en progression géométrique et leur sommation sera aisée. Pour la fonction $y = \lambda x^{\alpha}$, si $x_1 = ar$, $x_{i+1} - x_i = ar^i (1 - r)$, $y_i = \lambda a^{\alpha} r^{i\alpha}$, $y_i (x_i - x_{i+1}) = \lambda a^{1+\alpha} (1 - r) r^{i\alpha + i}$. La somme d'une telle progression sera $\lambda a^{1+\alpha} (1 - r) / (1 - r^{\alpha+1})$.

Nous aurons l'intégrale en cherchant la limite de $(1 - r) / (1 - r^{\alpha+1})$, lorsque r tend vers 1. Il restait là pour l'époque une belle difficulté. Voici comment Fermat la résout pour $\alpha = 2/3$ (Il n'emploie pas en réalité d'exposants fractionnaires mais cherche l'aire de la parabole semi-cubique $y^3 = p x^2$). Si $OB = a$ et si le point d'abscisse ar

Fig. 3

est E, intercalons deux moyens géométriques V et R entre B et E, et prolongeons la nouvelle progression au delà de E. Si T est le cinquième point, nous devons chercher la limite de $(1 - r) / (1 - r^{5/3})$ ou de BE / BT. Or « par notre méthode logarithmique » dit Fermat, les cinq intervalles sont égaux (c'est-à-dire tendent vers l'égalité), la limite cherchée sera donc 3/5.

Dans le cas où α est négatif, qui est en réalité celui qu'il traite en premier lieu dans son mémoire, et qui correspond à ses hyperboles générales $y^p x^q =$ constante, il considère l'espace s'étendant à l'infini entre l'hyperbole $y = \lambda x^{\alpha}$ et l'axe des x, à partir de l'abscisse a, et prend une progression géométrique croissante de raison $r > 1$, $x_1 = ar$, $x_2 = x_1 r$ etc.... La progression à sommer a encore pour raison $r^{\alpha+1}$, et elle sera décroissante si $\alpha < -1$. Il en résulte qu'une hyperbole, sauf celle d'Apollonius $xy = a^2$, a toujours une de ses deux branches infinies carrable, et que, par différence, on pourra toujours carrer un quelconque de ses segments. La méthode échouera donc pour la seule hyperbole d'Apollonius, dont le disciple de Grégoire de Saint Vincent, Sarassa, avait montré, en explicitant les résultats de son maître publiés en 1647, mais fort antérieurs, que sa quadrature se ramenait au calcul d'un logarithme.

A l'époque où Fermat fit connaître sa méthode à un cercle très restreint de correspondants, les progrès du calcul des quadratures lui enlevaient bien de son intérêt. Elle n'en avait pour ainsi dire plus lorsqu'elle fut divulguée au public dans les Varia Opera de 1679. Elle avait cependant rendu de grands services à son inventeur, et lui avait en particulier permis de carrer les hyperboles et de placer leurs centres de gravité, problèmes qu'il n'aborda que vers 1646, lorsqu'il apprit les travaux des Géomètres Italiens sur la question, et qui semblent bien être à l'origine de sa découverte.

Cependant il restait à doter les procédés d'intégration d'un algorithme. L'écrit « de Aequationum localium ... » dont nous venons d'analyser le début paraît un peu dans sa seconde partie comme le testament de Fermat sur la question. Il semble avoir été provoqué par les travaux de la jeune génération formée de Wallis, Pascal, Huygens et leurs émules. Les mathématiciens qui conservaient le style géométrique pur, comme toute l'école Galiléenne en Italie, Grégoire de Saint Vincent en Belgique, Pascal en France, ne sentaient pas l'importance de la question, mais devenaient de plus en plus pénibles à lire, à mesure qu'augmentait la complexité des problèmes. On sent au contraire chez Fermat ce lien si fécond entre l'Algèbre et la Géométrie, qu'en prestigieux disciple de Viète il ne cessa de cultiver. Si sa pièce est nettement inspirée des lettres de Dettonville (Pascal), dont elle suppose connus plusieurs résultats, on est frappé de la différence profonde des deux styles, et du progrès considérable que représente celui de Fermat sur celui de Pascal. L'écart reste pourtant encore immense entre Fermat et Leibniz et la parution tardive du travail du premier lui a enlevé à peu près toute influence sur le développement de la science. Il nous révèle simplement une des méthodes de travail de l'auteur. Nous y voyons en effet comment, par des changements de variables, il passe de quadratures connues à d'autres. Par exemple, dans la courbe $y^2 = b^2 - x^2$ il sait calculer la somme des y^2. Il en déduit la quadrature de la courbe $b^2 x^2 = b^2 y^2 - y^4$. De même dans $y^3 x^3 = b^5 x - b^6$, il sait calculer la somme des y^3. Il en déduit la quadrature du folium de Descartes $x^3 + y^3 = b x y$.

Si cet écrit des dernières années de la vie de Fermat nous rapproche d'une des deux découvertes essentielles de Leibniz dans le calcul intégral, la constitution d'un algorithme, un autre de ses travaux, très antérieur puisqu'il date au plus tard de 1635, nous rapproche de l'autre, la relation entre le calcul différentiel et le calcul intégral. Depuis Archimède la recherche des centres de gravité des aires et des volumes dépendait de l'intégration. Fermat utilise au contraire sa méthode des Maximis et minimis. Voici une analyse de son procédé.

Il veut chercher le centre de gravité O du paraboloïde de révolution engendré par le segment de parabole CAV tournant autour de son axe AI. Il pose $AI = b$, $AO = x$ (nous adoptons les notations modernes). Il coupe par le plan parallèle à la base et dont la trace sur la figure est BNR, et il pose $IN = e$ (même symbole que dans sa méthode des maxima). Les segments de paraboloïde CAV et BAR sont entre eux comme AI^2 et AN^2 (Archimède, livre sur les Sphéroïdes et les Conoïdes). D'autre part Fermat constate que l'on pourrait montrer, comme Archimède l'a fait pour les segments de paraboles, que dans les segments de paraboloïdes le centre de gravité divise l'axe dans un rapport constant. C'est ce rapport qu'il faut trouver. Soit donc E le centre du paraboloïde BAR et M celui de la tranche limitée par les plans de traces CV et BR. Les principes de statique donnent:

$$\frac{OM}{OE} = \frac{\text{Vol. ABR}}{\text{Vol. CAV} - \text{Vol. ABR}} = \frac{(b-e)^2}{2be - e^2}, \text{ d'où } OM = OE \times \frac{(b-e)^2}{2be - e^2}.$$

Par ailleurs $\frac{AO}{AE} = \frac{b}{b-e}$, d'où $OE = \frac{ex}{b}$ et $OM = \frac{ex}{b} \times \frac{(b-e)^2}{2be-e^2}$.

Mais M est entre N et I, ce que Fermat pourrait exprimer par deux inégalités. Il préfère « adégaler » à $OI = b - x$, c'est-à-dire égaler par approximation (expression qu'il emprunte à Xylander, traduction latine du Diophante). Cela lui donne, après une simplification par e:

$$(b - x)\ (2b^2 - eb) \simeq x\ (b - e)^2.$$

En faisant $e = o$, l'adégalité devient égalité $2b^2\ (b - x) = b^2 x$, et $x = 2b/3$.

L'intérêt de ce travail est double. C'est en effet, d'une part, un des premiers exemples de passage à la limite chez Fermat. D'autre part c'est un lien, non aperçu d'ailleurs par l'auteur et ses contemporains, entre les deux branches du calcul infinitésimal. Il eût suffi que Fermat appliquât sa méthode à la recherche, non des centres de gravité, mais des aires des paraboles ou des volumes des paraboloïdes pour anticiper tout au moins partiellement sur la découverte de Leibniz.

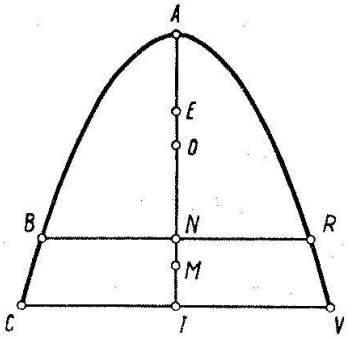


Fig. 4

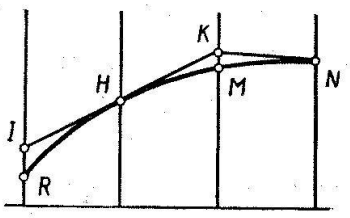


Fig. 5

Les questions sur la Cycloïde, que Pascal posa en Juin 1658 à tous les mathématiciens de quelque renom, ont certainement incité Fermat à publier en 1660, à la suite du traité de Lalouvère sur cette courbe, son traité «De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, Auctore M. P. E. A. S.». Le style en est cette fois géométrique, et les méthodes sont les méthodes rigoureuses d'exhaustion. Il s'agit de la rectification des lignes courbes. Si plusieurs des résultats avaient été trouvés par d'autres quelques temps auparavant, l'ensemble du traité n'en reste pas moins remarquable par sa rigueur et son élégance.

La première proposition montre que dans la figure ci-dessus le segment de tangente I H est inférieur à l'arc R H et le segment H K supérieur à l'arc H M. En utilisant les demandes d'Archimède on voit en effet que I H est inférieur à la corde R H elle-même inférieure à l'arc R H, et que d'autre part la ligne brisée H K N est supérieure à l'arc H M N. Mais on vient de voir que K N est inférieur à l'arc M N, donc le segment H K est supérieur à l'arc H M.

On pourra alors, pour rectifier un arc de courbe, ne se servir que des segments de tangente et jamais des cordes.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, divisons A D en parties égales. L'arc A P est supérieur à U M + V N + W P, et inférieur à A X + M Y + N Z. Mais U M = M Y et V N = N Z. La différence des deux valeurs par excès et par défaut est donc inférieure à A X — W P et peut être rendue aussi petite qu'on le voudra.

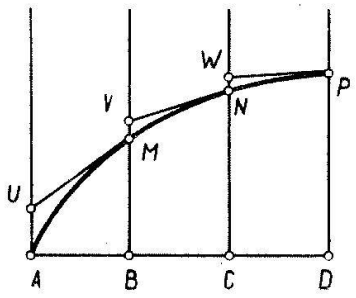


Fig. 6

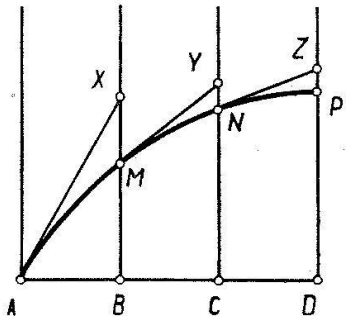


Fig. 7

Ce procédé très élégant de rectification des courbes convexes a été repris par Lagrange (Théorie des fonctions analytiques). Fermat l'utilise pour montrer que la parabole semi-cubique $y^3 = a x^2$ est rectifiable, résultat déjà trouvé par Van Heuraet et par Neil. Il utilise ensuite une transformation qui lui est personnelle et qui permet de passer d'une courbe rectifiable à une nouvelle également rectifiable. Si $y_1 = f_1(x)$ est une première courbe, dont l'arc compris entre les abscisses o et x est $s_1(x)$, il prend $y_2 = s_1(x)$, d'arc $s_2(x)$, puis $y_3 = s_2(x)$ etc... Dans l'étude de cette transformation on le voit justifier rigoureusement le principe qu'il énonçait en 1640: on peut dans la recherche des tangentes remplacer un élément d'arc par l'élément de tangente correspondant.

Mais l'appendice à ce court traité est encore plus important. La proposition I en particulier établit en effet qu'une courbe et sa longueur sont parfaitement déterminées par la seule connaissance de la pente de sa tangente en chacun de ses points. Autrement dit, en langage fonctionnel, une fonction est déterminée à une constante près par sa fonction dérivée. Par là se trouve résolu théoriquement le problème inverse des tangentes. Si l'on remarque que dans le traité lui-même une rectification a été ramenée à une quadrature, on voit combien en 1660 les mathématiciens étaient proches du calcul infinitésimal.

Avant de quitter le domaine des nouveaux calculs signalons l'application qu'en fit Fermat à l'étude de la réfraction. Il n'était pas physicien, et il est fort probable qu'il n'a jamais expérimenté. Lorsqu'au début de sa correspondance il dispute contre Roberval et Etienne Pascal sur la statique, on le sent très en retard sur eux, et il paraît finir par se rendre à leur avis. Cependant dès qu'il a connaissance de la Dioptrique de Descartes il s'élève avec beaucoup de bon sens contre la pseudo-démonstration de la loi de la réfraction donnée par le philosophe. Cette critique fut d'ailleurs la cause de leur brouille et Descartes blessé chercha toutes sortes de mauvaises querelles contre la règle des Maximis. En Août 1657, longtemps après la mort du philosophe, Fermat accuse récep-

tion à Cureau de la Chambre, médecin du roi, de son traité sur la lumière. Il lui écrit: «Je reconnais premièrement avec vous la vérité de ce principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes. Vous en déduisez très bien l'égalité des angles de réflexion et d'incidence.» De la Chambre n'innovait pas, car déjà Héron d'Alexandrie faisait de même. «Mais, puisqu'il a servi à la réflexion, pourrons nous en tirer quelqu'usage pour la réfraction? Il me semble que la chose est aisée et qu'un peu de géométrie nous pourra tirer d'affaire.»

De la Chambre est partisan de la propagation instantanée, Fermat opterait pour une vitesse finie, mais dit-il, avec la propagation instantanée on peut introduire une résistance différente selon le milieu, et faire quand même le calcul. (C'est le point de vue auquel se placera plus tard Leibniz.) «La question se réduit donc à ce problème de Géométrie: Etant donnés les deux points C et A et la droite B D, trouver un point B dans la droite B D auquel si vous conduisez les droites C B et B A, la somme de C B et de la moitié de B A contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises, ou bien que la somme de C B et du double de B A contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises...» «Je vous garantis par avance que j'en ferai la solution quand il vous plaira et que j'en tirerai même des conséquences qui établiront solidement la vérité de notre opinion... De sorte que, si elle n'est pas vraie, on peut dire ce que disoit Galilée en un sujet différent que la nature semble nous l'avoir inspirée *per pigliarsi gioco di nostri ghiribizzi.*»

Il est tout à fait caractéristique de la mentalité de Fermat qu'il n'ait fait le calcul qu'en fin 1661, en constatant avec étonnement qu'il obtenait la même loi que Descartes. «Le fruit de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fut jamais. Car, après avoir parcouru par toutes les équations, multiplications, antithèses et autres opérations de ma méthode, et avoir enfin conclu le problème que vous verrez dans un feuillet séparé, j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions que M. Descartes a établie.»

Il avait également utilisé sa science mathématique pour une autre partie capitale de la physique, la chute des graves. Il avait eu du mal à se faire à l'argumentation de Galilée, tout comme Descartes d'ailleurs qui, lui, ne s'était jamais rendu, et dans ses objections il renouvelait inconsciemment les sophismes de Zénon. Partant du postulat «Nullum motum fieri absque celeritate aliquâ corporis moti» il raisonnait alors ainsi: Un corps est en repos en A. Il tombe jusqu'en B. Galilée dit qu'en A il est sans vitesse. Or il a acquis une vitesse puisqu'il s'est déplacé. S'il a acquis une vitesse au bout d'un certain temps, que ce soit lorqu'il est en B. Si $4\,AE = AB$, en E il avait une vitesse moitié, d'après la loi de Galilée. Donc en E il avait une vitesse, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Comme le mobile ne peut ainsi avoir acquis une vitesse au bout d'un certain temps, il en avait une au départ, contrairement à ce que dit Galilée.

Il ne paraît cependant pas s'être plus obstiné dans ce paradoxe que dans ceux qu'il soutenait en statique vers la même époque, 1636. En 1646, dans une lettre à Gassendi, il réfute très solidement l'hypothèse de Cazré d'après laquelle la vitesse de chute serait propor-

tionnelle à l'espace parcouru. Galilée qui s'était arrêté vers 1604 à cette même hypothèse l'avait rejetée dans ses *Discorsi* en remarquant que, si elle était vraie, le mouvement devrait être instantané, l'espace double devant être parcouru dans le même temps que l'espace moitié. C'est cet argument que Fermat développe en 1646, dans un style à la manière des anciens pour écarter toute objection, et utilisant pour la première fois la série géométrique dans une intégration.

Comme algébriste Fermat garde toute son originalité. Nous donnons deux exemples de sa manière. En 1650 il envoie à son correspondant Carcavi une pièce intitulée « Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usus ». Elle traite essentiellement de l'élimination d'une ou de plusieurs inconnues entre plusieurs équations, théorie où une fois de plus notre mathématicien est un précurseur. Prenons son premier exemple, avec les notations actuelles. Il s'agit d'éliminer y entre les deux équations $x^3 + y^3 = a$, $b\,x + y^2 + c\,y = d$. Il faut isoler dans un membre de chacune des équations les termes contenant y : $y^3 = a - x^3$; $y^2 + c\,y = d - b\,x$, écrire la proportion $(a - x^3) : y^3 : : (d - b\,x) : (y^2 + c\,y)$, égaler le produit des extrêmes à celui des moyens, et simplifier par y, ce qui abaisse le degré en y de la nouvelle équation, recommencer l'opération avec les deux équations de plus bas degrés jusqu'à ce que y ne figure plus qu'au premier degré. On tire alors de cette équation y en fonction de x et l'on porte dans la première.

Telle est la première méthode connue d'élimination, encore lourde, mais fort correcte. Elle semble avoir été élaborée par Fermat vers 1648. En tout cas, contrairement à l'opinion de plusieurs historiens, aucun document ne permet de la faire remonter plus haut.

Dans un appendice, à la manière de Fermat aussi important, sinon plus, que le mémoire lui-même, la méthode est utilisée pour faire disparaître les «asymmétries», nous dirions les radicaux. L'exemple proposé est

$$\sqrt[3]{b\,x^2 - x^3} + \sqrt{x^2 + c\,x} + \sqrt[4]{d x^3 - x^4} + \sqrt{g\,x - x^2} = n\,.$$

Poser $y^3 = b\,x^2 - x^3$; $z^2 = x^2 + c\,x$; $t^4 = d x^3 - x^4$; $u^2 = g\,x - x^2$, et éliminer y, z, t, u successivement entre ces équations et la première $y + z + t + u = n$.

Il y a bien là un procédé absolument général, quoique rapidement fort pénible. Fermat signale l'utilité de sa méthode pour la résolution numérique des équations, la méthode de Viète pour l'approximation des racines, seule connue à l'époque, ne s'appliquant qu'aux équations entières et rationnelles. Puis il signale son application aux problèmes abondants, où il y a plus d'équations que d'inconnues, et là, il tombe dans une étrange erreur, fort instructive pour ceux qui cherchent à le bien connaître. Desargues avait proposé un beau problème: placer un cercle sur un cône dont la base est une conique donnée. « Les mathématiciens, dit Fermat, ont remarqué que ce problème est solide », ils le traitent en cherchant un cercle s'appuyant sur cinq droites issues du sommet. Mais, si l'on prend une sixième droite, le problème devient surabondant, et

se ramènera à une simple division! Il ne voit pas qu'il se trouve dans un cas où la nouvelle équation est une conséquence des précédentes, et où sa méthode ne simplifie rien.

Le second exemple de la manière de Fermat comme algébriste est le court mémoire qu'il adressa à Christian Huygens en 1661 probablement. C'est un complément au travail de Viète sur l'équation d'Adrien Romain, équation du 45e degré qui se ramenait à la division d'un angle en 45 parties égales. Le terme connu étant la corde d'un arc pris sur un cercle de rayon unité, la méthode de Viète ne peut réussir que si ce terme est inférieur à 2. Qu'arrive-t-il quand il dépasse ce nombre? S'appuyant sur le cas simple de la trisection de l'angle où lorsque le terme connu dépasse 2, on peut trouver la seule racine par la méthode de Cardan, Fermat remplace l'inconnue par $y + 1/y$. Tous les termes médians de l'équation d'Adrien Romain disparaissent et la solution unique est la somme de deux racines quarante-cinquièmes. Il y a ici encore une très belle intuition et une anticipation sur les conquêtes futures de la théorie des équations.

Mais le domaine où triomphe Fermat est celui de l'analyse indéterminée. Les mathématiciens du 16e siècle avaient retrouvé les livres Arithmétiques de Diophante qu'avaient traduits Xylander en latin et Stevin en français, et dont s'étaient inspirés entre autres Bombelli, Gosselin, Viète.

Le mathématicien et humaniste Bachet de Méziriac donna en 1621, à Paris, le texte grec des huit livres Arithmétiques, accompagné d'une traduction et d'un abondant commentaire latins. La vogue de Diophante dura tout le dix-septième siècle, puis s'apaisa lorsque l'attention fut accaparée par le Calcul infinitésimal. Ses fidèles furent alors peu nombreux, mais on peut citer parmi eux Euler, et Diophante est encore cultivé de nos jours.

Il ne s'occupe que d'analyse indéterminée, où ne sont acceptées que les solutions rationnelles des équations. Il propose par exemple, liv. II, prop. 11: «Ajouter un même nombre à deux nombres donnés, de manière que chacun d'eux forme un carré.»

Fermat se passionna pour l'analyse Diophantienne. Le Père de Billy a consigné les résultats qu'il obtint dans ses «nouvelles découvertes de la science de l'analyse», œuvre latine publiée dans la réédition du Diophante de Bachet, par Samuel Fermat, en 1670, réédition enrichie de précieuses remarques de son père. On voit dans le travail du Père de Billy Fermat utiliser systématiquement les racines négatives des équations pour poursuivre ses calculs et arriver ainsi à des solutions positives, méthode fort hardie à l'époque. Nous ne pouvons nous étendre sur cet aspect de son œuvre. Voici simplement un exemple des problèmes qu'il traite: On demande un triangle rectangle dont l'aire, ajoutée à l'un des côtés de l'angle droit, fasse un carré. Un des triangles répondant à la question a pour côtés

$$\frac{10988674}{2458624}, \frac{6927424}{2458624}, \frac{8530050}{2458624}.$$

Pour bien comprendre Fermat mathématicien il ne faut pas perdre de vue qu'il se complaisait beaucoup plus dans de telles recherches, qui demandent beaucoup de sub-

tilité mais nous paraissent maintenant un peu vaines, que dans ses recherches de Géométrie pure ou analytique, ou dans les problèmes sur les tangentes et les quadratures. Nous pouvons trouver encore plus futiles des travaux sur les carrés magiques. Rappelons qu'un carré magique est un tableau carré dont chaque case renferme un nombre différent, et tel que les sommes des nombres d'une même ligne, d'une même colonne, de chacune des diagonales, soient toutes égales entre elles. Les carrés magiques dépendent donc de l'analyse combinatoire. Fermat y régna en maître. Il s'y exerça en particulier vers les années 40, comme le montre sa correspondance.

L'analyse combinatoire devait lui être d'ailleurs d'un grand recours lorsque, en 1654, Pascal correspondit avec lui sur des problèmes concernant les jeux de hasard. De cette correspondance, très courte, devait sortir le Calcul des Probabilités. Les procédés des deux fondateurs sont différents, mais ceux de Fermat, qui utilise l'analyse combinatoire et le principe des probabilités composées, sont nettement supérieurs à ceux de son jeune émule.

Cependant les réflexions prolongées de Fermat sur l'analyse Diophantienne, qu'il consignait dans les marges de son exemplaire, aujoud'hui perdu, du Diophante de Bachet, et dont il parsemait sa correspondance, devaient le conduire à créer une nouvelle branche des mathématiques, la théorie des nombres. Ici, la gloire de Fermat s'élève jusqu'à la légende, et ses découvertes auraient amplement suffi à immortaliser son nom.

Lorsque commence sa correspondance, en 1636, il est à peu près ignorant de tout en la matière. Et cependant nous le voyons, dès 1639, essayer le savoir de ses émules, comme Frénicle, en leur proposant des problèmes qu'il sait impossibles, comme «trouver un triangle rectangle duquel l'aire soit un nombre carré, trouver deux carrés carrés desquels la somme soit carré carrée, trouver quatre carrés en proportion arithmétique continue, trouver deux cubes desquels la somme soit cube».

En 1640, il est en possession des plus importantes de ses découvertes et de ses méthodes. Il sait que $a^{p-1} \equiv 1 \bmod. p$, pour p premier, a non divisible par p. Il a montré que $2^{37} - 1$ n'est pas premier, mais admet le facteur 223, et établi que tout nombre premier de la forme $4k + 1$ est d'une seule façon somme de deux carrés, et il possède sa méthode de démonstration par la descente infinie.

Il résumera dans une lettre à Carcavi d'Août 1659 l'ensemble de ses découvertes: «J'appelai cette manière de démontrer la *descente infinie* ou *indéfinie*...; je ne m'en servis au commencement que pour démontrer les propositions négatives comme, par exemple:

«*Qu'il n'y a aucun nombre, moindre de l'unité qu'un multiple de 3, qui soit composé d'un carré et du triple d'un autre carré;*

«*Qu'il n'y a aucun triangle en nombres dont l'aire soit un nombre carré.*»

Interrompons ici cette citation pour donner, au sujet de cette dernière affirmation, la traduction française de l'Observation sur Diophante où Fermat traite la même question.

«Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence

serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

«Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que chacun de ces deux carrés est plus petit que les deux premiers, dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et inférieurs.

«Par le même raisonnement, on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits...» *

«Je fus longtemps, écrit Fermat dans sa lettre à Carcavi, sans pouvoir appliquer ma méthode aux questions affirmatives. ... De sorte que lorsqu'il me fallut démontrer que *tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux carrés*, je me trouvai en belle peine. Mais enfin une méditation diverses fois réitérée me donna les lumières qui me manquaient, et les questions affirmatives passèrent par ma méthode, à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il fallut joindre par nécessité...

«Il y a infinies questions de cette espèce, mais il y en a quelques autres qui demandent des nouveaux principes pour y appliquer la descente, ... Telle est la question suivante: *Tout nombre est carré ou composé de deux, de trois ou de quatre carrés*». (Il avait énoncé cette proposition plus généralement, dans une lettre datée à tort dans les Œuvres Complètes de Septembre ou Octobre 1636, mais qu'il faut reporter à Mai ou Juin 1638: Tout nombre est la somme de trois nombres triangulaires au plus, ou de quatre carrés, ou de cinq pentagones, de six hexagones, sept heptagones etc...)

«Celle que j'avais proposée à M. Frénicle et autres (Wallis, Lord Brouncker) est d'aussi grande et même plus grande difficulté: *Tout nombre non carré est de telle nature*

---

* On sait depuis Euclide (X, lemme 2 à la prop. 28) qu'un triangle rectangle en nombres, dont les côtés sont premiers entre eux dans leur ensemble, ont pour côtés $2mn$, m^2-n^2 et m^2+n^2, m et n premiers entre eux, de parités différentes. L'aire est donc $mn(m^2-n^2)$. Si elle est un carré parfait, m et n sont carrés ainsi que m^2-n^2. Soient $m=x^2$, $n=y^2$; x^4-y^4 est un carré, d'où $x^2-y^2=t^2$, $x^2+y^2=z^2$, ou encore $z^2=t^2+2y^2$, $x^2=t^2+y^2$. Mais si $z^2=t^2+2y^2$, $(z-t)(z+t)=2y^2$ d'où $z-t=4u^2$, $z+t=2v^2$, et $z=v^2+2u^2$, $t=v^2-2u^2$, $y=2uv$, $x^2=v^4+4v^4$. Donc v^2 et $2u^2$ sont les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'aire v^2u^2 est un carré. Chacun de ces côtés est inférieur à z...

qu'il y a infinis carrés qui, multipliant le dit nombre, font un carré moins 1. Je la démontre par la *descente* appliquée d'une manière toute particulière. (Il s'agit de l'équation dite à tort, depuis Euler, équation de Pell $ax^2 + 1 = y^2$.)

«J'ai ensuite considéré certaines questions qui, bien que négatives, ne restent pas de recevoir très grande difficulté, la méthode pour y pratiquer la *descente* étant tout à fait diverse que les précédentes, comme il sera aisé d'éprouver. Telles sont les suivantes: *Il n'y a aucun cube divisible en deux cubes. Il n'y a qu'un carré en entiers qui, augmenté du binaire, fasse un cube.* Le dit carré est 25.

«*Il n'y a que deux carrés en entiers, lesquels, augmentés de 4, fassent un cube.* Les dits carrés sont 4 et 121.

«*Toutes les puissances carrées de 2, augmentées de l'unité, sont nombres premiers...*» Cette dernière proposition, que Fermat n'a cessé d'énoncer tantôt dubitativement, tantôt comme ici, et vers la fin de sa carrière seulement, d'une façon absolue, et qui porte sur les nombres $2^{2^n} + 1$, est fausse, comme Euler l'a vérifié pour $2^{32} + 1$ divisible par 641. Il est curieux de constater ici l'obstination de Fermat, d'autant plus étrange qu'il avait effectué la factorisation aussi difficile de $2^{37} - 1$. Tant une conviction profonde, ou un préjugé d'inventeur, peut être un obstacle insurmontable.

Mais ce qui frappera le plus dans la Correspondance de Fermat c'est que l'on n'y rencontre jamais son grand théorème sur l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$ pour $n > 2$. Seuls y figurent les deux cas particuliers $n = 3$ et $n = 4$. Il y a là une forte présomption pour croire qu'effectivement il n'avait pas de méthode pour démontrer le cas général, sa descente infinie devenant très pénible dès $n = 5$. C'est dans ses remarques sur Diophante, notes personnelles écrites en marge de son exemplaire, pieusement recueillies et publiées par son fils en 1670, que la proposition est affirmée. Voici la traduction de sa remarque à la proposition 8 du livre II: trouver deux carrés dont la somme soit un carré: «Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.»

Les mathématiciens doivent être reconnaisants à Samuel Fermat de son indiscrétion. La publication de cette note personnelle, que son père n'avait jamais voulu rendre publique, a été un des principaux stimulants pour les théoriciens du nombre et nous lui devons la plupart des grands progrès accomplis depuis dans ce domaine.

On peut se demander, quelle influence exerça Fermat sur le développement des mathématiques. En Géométrie pure elle fut insignifiante. En géométrie analytique, et dans la théorie des équations, elle fut éclipsée par celle de Descartes. Dans l'ancienne analyse Diophantienne au contraire il fut le maître incontesté, et habituant ainsi les spécialistes à jongler avec les fonctions rationnelles il intervint indirectement dans l'épanouissement du début du dix-huitième siècle. La méthode des Maximis et Minimis et celle des tangentes exercèrent une action déterminante dans la naissance du calcul différentiel. Aussi profondes qu'aient été les recherches de Format dans le domaine du calcul intégral, son action s'y fit beaucoup moins sentir et n'eut pas le retentissement de

celles de Cavalieri et de Pascal. Il préside avec ce dernier à la naissance du calcul des Probabilités.

Mais il reste deux domaines des mathématiques où encore de nos jours l'influence du grand mathématicien se fait sentir. Le premier, celui sur lequel l'attention est le moins attirée, est le calcul des Variations et son application à la physique, même la plus moderne. Si ce calcul fut à proprement parler créé par Lagrange en 1759, ce fut une intuition de génie de poser en optique le principe de Fermat sur le trajet de temps minimum, et ce fut pour l'époque un tour de force de le soumettre au calcul. Lorsque l'on étudie la préhistoire de ce calcul des variations, au début du dix-huitième siècle, on est frappé de voir les premiers pionniers, Leibniz et Jean Bernoulli en particulier, ramener les divers problèmes de courbes minima aux méthodes de l'optique de Huygens et au principe de Format. Avec Maupertuis, Euler, Lagrange, la méthode passera de l'optique à la mécanique, et malgré les critiques d'esprits se croyant plus positifs, et rétifs devant la métaphysique des causes finales, les principes de minimum de temps de parcours ou de minimum d'action restent très vivants dans la science de nos jours.

En théorie des nombres, théorie qui n'avait été qu'ébauchée avant lui par l'auteur, à jamais inconnu, des livres arithmétiques d'Euclide, Fermat exerce de nos jours, ne disons pas une influence, mais une vraie fascination. Cela va, au delà du rationnel, du raisonnable, jusqu'à l'idolâtrie, et tel qui, dans tout autre domaine, le considérera comme un homme génial, mais enfin comme un homme, le dotera ici de pouvoirs magiques.

C'est surtout son Grand Théorème, celui qu'il n'a jamais fait connaître au public de son vivant, qui lui a valu ce renom. C'est qu'il reste encore indémontré. Les plus grands mathématiciens s'en sont cependant longuement occupés. Leibniz lui-même s'y essaya, pour la puissance 4, au début de sa carrière. Il appliquait, comme Fermat, et comme les mathématiciens suivants, la Descente Infinie. Euler résolut les deux cas des puissances 3 et 4, les seules, rappelons-le, sur lesquelles Fermat s'était prononcé publiquement. Legendre et Dirichlet arrivèrent à bout, en 1825, de la puissance 5. Lamé et V. A. Lebesgue, en 1840, triomphèrent de la puissance 7.

Mais on aboutissait à une impasse. Déjà, pour la troisième puissance, Euler faisait appel aux nombres complexes. En 1832 Gauss avait prouvé que les lois ordinaires de l'arithmétique s'appliquaient aux nombres $a + bi$, où a et b sont entiers. Il en avait fait une brillante application dans ses recherches sur les résidus biquadratiques. Lamé, Wantzel, Cauchy, Kummer lui-même, admettant que les nombres plus particuliers $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^{n-1}$ (où les a sont des entiers ordinaires et r une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité) jouissent eux aussi des propriétés arithmétiques courantes, croyaient arriver à établir le théorème. C'est alors qu'en 1847, grâce à Kummer, le monde mathématique prit définitivement conscience du fait que les entiers algébriques ne jouissent pas des propriétés arithmétiques courantes, n'ont pas en particulier une décomposition unique en facteurs premiers. Kummer, qui soulevait ainsi une difficulté formidable, l'écartait aussitôt par sa géniale découverte des Idéaux. «Cette restauration d'une loi au milieu du chaos, écrit L. E. Dickson dans son histoire de la théorie des Nombres, est un des plus grands triomphes de la science dans le siècle dernier.» La théorie des Corps de

nombres algébriques, qui devait prendre par la suite une si grande extension, était fondée, et le Grand Théorème de Fermat était largement dépassé. Dépassé, mais non vaincu, car si Kummer en a pu établir l'exactitude pour une très large classe de nombres, s'il est vrai en particulier pour les cent premières puissances entières, la seconde exceptée bien entendu, sa démonstration générale n'est pas encore connue.

Ainsi, comme la duplication du cube, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle, la résolution algébrique de l'équation générale du cinquième degré, le Grand Théorème est un de ces paradoxes qui de tous temps ont exercé une action profonde sur le progrès des mathématiques. Mais, et c'est ce qui le distingue des autres grands problèmes cités, il reste au milieu du vingtième siècle une énigme non résolue de la science.

JEAN ITARD, Paris.

LISTE ALPHABÉTIQUE DES MATHÉMATICIENS CITÉS

Apollonius, 2e moitié du 3e siècle avant J. C.
Archimède, mort en 212 avant J. C.
Aristée, 4e siècle avant J. C.
Bachet de Méziriac, érudit et mathématicien, 1581—1638.
Jean Bernoulli, 1667—1748.
Billy (le Pèrede) S. J., 1602—1679.
Bombelli, 2e moitié du 16e siècle.
Lord Brouncker, 1620—1684.
Brûlart de Saint Martin, correspondant occasionnel de Fermat.
Carcavi, de l'Académie des Sciences en 1666, mort en 1684.
Cardan, 1501—1576.
Cauchy, 1789—1857.
Cavalieri, créateur de la théorie des Indivisibles, 1598—1647.
Cazré (le Père) S. J., 1589—1664.
Commandin, célèbre traducteur des mathématiciens grecs, 1509—1575.
Cureau de la Chambre, médecin ordinaire du roi, 1597—1669.
Desargues, 1593—1662.
Descartes, 1596—1650.
Diophante, 2e partie du 3e siècle après J. C.?
Dirichlet, 1805—1859.
Euclide, début du 3e siècle avant J. C.
Euler, 1707—1783.
Frénicle, membre de la première Académie des Sciences 1605—1675.
Galilée, 1564—1642.
Gauss, 1777—1855.
Gosselin, algébriste français, 2e moitié du 16e siècle.
Héron d'Alexandrie, vécut à une époque indéterminée entre 150 avant et 250 après J. C.
Van Heuraet, mathématicien flamand né en 1633.
Huygens, 1629—1695.
Képler, 1571—1630.
Kummer, 1810—1893.
Lagrange, 1736—1813.
Lalouvère (le Père) S. J., 1600—1664.
Lamé, 1795—1870.
V. A. Lebesgue, math. français du milieu du 19e siècle.
J. M. Legendre, 1752—1834.
Leibniz, 1646—1716.
Maupertuis, 1698—1759.
Mersenne (Le Père), 1588—1648.
Montucla, historien des mathématiques, 1725—1799.
Neil, math. anglais, 1637—1670.
Nicomède, 1e moitié du 2e siècle avant J. C.
Pappus d'Alexandrie, 1e moitié du 4e siècle après J. C.
Parent, membre de l'Académie des Sciences, 1666—1716.
Blaise Pascal, 1623—1662.
Etienne Pascal, père de Blaise.
Pell, math. anglais, 1610—1685.

Roberval, 1602—1675.
Adrien Romain, math. flamand, 1561—1615.
Grégoire de Saint Vincent (le Père) S. J., 1584—1667.
Sarassa (le Père) S. J., 1617—1667.
Stevin, 1548—1620.
Viète, 1540—1603.
Wallis, 1584—1667.
Wantzel, 1814—1848.
Wren, math. anglais, 1632—1723.
Xylander, traducteur de Diophante, 1532—1576.

BIBLIOGRAPHIE

Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani, Toulouse 1670.

Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat Senatoris Tolosani, Toulouse 1679. Edition réimprimée par heliotypie, Berlin 1861.

Œuvres de Fermat, publiées par le soins de Paul Tannery et Charles Henri:
t. I Œuvres mathématiques diverses, observations sur Diophante, Paris 1891.
t. II Correspondance, Paris 1894.
t. III Traductions par P. Tannery des écrits et fragments latins de Fermat, de l'Inventum novum de Jacques Billy, du commercium epistolicum de Wallis, Paris 1896.
t. IV Compléments, par Charles Henry, Paris 1912.
Supplément aux t. I — IV par M. C. de Waard, Paris 1922.

L. E. Dickson, History of the theory of numbers, 3 vol., New York réédition de 1934.

Paul Tannery, Mémoires Scientifiques VI, Paris 1926.

Zeuthen, Sur les quadratures avant le Calcul intégral et en particulier sur celles de Fermat, Bulletin de l'Académie royale des Sciences et des lettres de Danemark, 1895.
Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert, édition allemande, Leipzig 1903.

L. J. Mordell, Le dernier Théorème de Fermat, trad. française, Paris 1929.

R. Noguès, Théorème de Fermat, son histoire, Paris 1932.

J. Sommer, Vorlesungen über Zahlentheorie, 1907, Edition française par A. Lévy, Paris, 1911.

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Berlin 1894, traduction française, Paris 1913.