

Langsam keimt ein Gedanke

Autor(en): **Voellmy, Erwin**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **3/4/5 (1948)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Langsam keimt ein Gedanke

Die Geschichte der Mathematik kennt fruchtbare Gedanken, die langsam Wurzel fassen, unterirdisch keimen und mit Macht durchbrechen, wenn ihre Zeit gekommen ist, sei es in einem Kopf, sei es in mehreren Köpfen zugleich. Doch nur wenigen Gedanken eignet eine so lange Entwicklungszeit wie den Logarithmen.

Wer immer ernsthaft rechnet, sucht seine Arbeit zu erleichtern, schon um Mühe, aber auch Zeit zu sparen, endlich um der Nachprüfung willen. Der auch nur 28 mit 6 vervielfacht, zerlegt die Rechnung und fügt die Teilergebnisse zusammen. Er hat dabei die Multiplikation wenigstens teilweise durch eine Addition ersetzt, anders gesagt, eine Rechenart zweiter Stufe durch eine Rechenart erster Stufe bewältigt und damit erleichtert. Aber gänzlich hat er die höhere Stufe nicht auf die niedrigere herabsetzen können. Und doch ist das möglich!

Die erste Ahnung davon findet sich schon im Altertum, im einfallsreichen Gehirn des *Archimedes* (287 bis 212 v. Chr.); kein Wunder, weil dieser bedeutende Mathematiker und Physiker gern neue Wege wandelte, die traditionellen Schranken zwischen abstrakter Wissenschaft und angewandter Wissenschaft bewußt durchbrach, und seiner Zeit um viele Jahrhunderte, sogar um mehr als ein Jahrtausend voraus war: in seinen tiefsten Gedanken findet er Fortsetzer in Leibniz und Newton.

Dieser Prometheus der Mathematik hat einen langen Brief geschrieben, schon mehr eine Abhandlung, beginnend mit den Worten: «Etliche glauben, König Gelon, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei». Damit hat Archimedes nicht allein den damaligen Beherrscher von Syrakus unsterblich gemacht, sondern auch das griechische Zahlensystem erweitert, Meßapparate beschrieben, die Größe der Erde mit guter Annäherung geschätzt und dem heliozentrischen Weltbild des Aristarch von Samos das Wort geredet; vergriffen hat er sich allein in der Annahme über die Größe der Fixsternwelt. Er kam zum Schluß, daß die Zahl der Sandkörner nicht unendlich sei, weil sich eine Zahl angeben liesse, die größer wäre, als die Zahl der Sandkörner, die das Weltall ausfüllen würden; als diese Zahl nannte er, was wir heute 10^{63} schreiben, das ist eine Eins mit 63 angehängten Nullen, ein richtiges Zahlenungeheuer! Die inhaltsreiche Schrift, die den großen Geist des Archimedes widerspiegelt, wird kurz als «Sandzahl» zitiert.

In den zugehörigen Betrachtungen kommt Archimedes auf rasch ansteigende Zahlenfolgen zu sprechen wie

1 2 4 8 16 32 64 128 usw.
oder

1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000 usw.;

wir nennen solche heutzutage *geometrische Folgen* mit dem Anfangsglied 1.

Man kann sie heute allgemein schreiben, z. B.:

1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 usw.,
wobei $a = 2$ das erste und $a = 10$ das zweite Zahlenbeispiel liefert. Diese allgemeine Schreibweise war Archimedes noch versagt, weil die Griechen ihre Buchstaben als feste

Zahlen benützten: $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, usw. So war ihnen aus Mangel an besonderen Zahlzeichen (Ziffern) der Aufstieg zur Buchstabenrechnung verrammelt, ein Hemmnis von schwerwiegenden Folgen. Auch der große Geist des Archimedes überwand diese Schranke nicht. Dennoch fand er heraus: *«Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in festem Verhältnis stehen, irgend zwei miteinander multipliziert werden, so wird auch das Produkt derselben Zahlenfolge angehören, und zwar wird dieses von dem größeren der beiden Faktoren ebenso weit abstehen, wie der kleinere von der Einheit in der Zahlenfolge absteht; von der Einheit aber wird es um eine Stelle weniger weit abstehen, als die Abstandszahlen beider Faktoren von der Einheit aus zusammen betragen»* ¹⁾.

Obwohl das gründlich gedacht und deutlich gesagt ist, sei es doch am ersten unserer Zahlenbeispiele und am Buchstabenbeispiel erläutert; denn es enthält nach heutiger Erkenntnis den ersten Keim des logarithmischen Rechnens.

Unter Abstandszahl versteht Archimedes die Nummer; daher sei diese klein über die Glieder der Folge gesetzt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Das Produkt $16 \cdot 32 = 512$ läßt sich so finden: 16 ist die 5. Zahl, 32 die 6. Zahl; 256 steht von 32 ebenso weit ab, wie 16 von 1. Oder die Summe der Nummern $5 + 6 = 11$, vermindert um 1, liefert die Nummer 10, zu welcher das Produkt 512 gehört.

Noch deutlicher wird das am allgemeinen Beispiel:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}	a^{13}

Nach der Wahrnehmung des Archimedes gehört $a^3 \cdot a^8 = a^{11}$ ebenfalls der Folge an; $4 + 9 - 1 = 12$ ist die zugehörige Nummer. Weil er die Potenzschreibweise $a \cdot a \cdot a = a^3$; $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$ nicht kennen konnte, ging er um Haaresbreite neben dem einfacheren Gesetz vorbei, welches mit $3 + 8 = 11$ unmittelbar das Produkt a^{11} anzeigt.

Hätte Archimedes auch das gefunden, so wären die Logarithmen schon im 3. vorchristlichen Jahrhundert entdeckt worden, zu einer Zeit also, die für eine so gewaltige Entdeckung noch gar nicht reif war!

Die antike Welt ging unter. Nur zögernd entwickelte das Mittelalter eine Kunst des Rechnens, gehemmt auch durch die römischen Ziffern, welche wirklich für die Praxis wenig taugen: wer es nicht glaubt, möge 967 mit 23 multiplizieren oder durch 37 dividieren, aber alles in römischen Zahlzeichen! Man stand allgemein in der Rechenfertigkeit nicht viel höher als unsere Primarschüler, wenn sie am Zählrahmen üben; mit einem Verfahren dieses Gerätes, dem Abacus, behalf sich auch das Altertum, und hernach die mittelalterliche Welt mit Rechentischen und Rechenpfennigen; das Rechenbrett spielt noch eine sprichwörtliche Rolle in den Redensarten: bei jemand einen Stein im Brett haben; jemanden einen Stein in den Garten(!) werfen. Erst der arabische Einfluß half weiter; er brachte dem Abendland die indischen Ziffern mitsamt der vorher entbehrten Null.

Es ist ungewiß, ob jemand die angefangene Entdeckung des Archimedes wieder ausgrub und verwendete. Eine schwache Spur findet sich bei *Johannes Nemorarius*, der mit dem deutschen Dominikanergeneral *Jordanus Saxo* († 1237) identisch sein soll,²⁾ und dessen wenige Bücher arabischen Einschlag bekunden. Er verwendet die archimedische Regel beim Multiplizieren von Sexagesimalbrüchen wie $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, den babylonischen Vorläufern unserer Dezimalbrüche; dabei scheint er einem schon vorhandenen Brauch zu folgen, der die «Nummern» des Archimedes um 1 erniedrigt und so die Regel vereinfacht³⁾, ohne indessen die Potenzen zu kennen. Für diese gab es noch 1494 bei dem berühmten *Luca Pacioli*, in dessen Hauptwerk «Summa» erst Wortbezeichnungen: cosa für x , censo für x^2 , cubo für x^3 .

Aber ein Zeitgenosse des Italieners, der französische Arzt und Mathematiker *Nicolas Chuquet*, um 1484 in Lyon, gelangte weiter. In seinem handschriftlich überlieferten, niemals gedruckten Werk «*Triparty en la science des nombres*» schrieb er kühn 12^0 , 12^1 , 12^2 , 12^3 und meinte damit 1 , $12x$, $12x^2$, $12x^3$; er benannte die Potenzen mit nombres premiers, seconds, tiers, quartz usw. Folgerichtig stellte er eine Doppelfolge auf wie

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & 3^7 & \dots \end{array}$$

Die oberen Zahlen nannte Chuquet die «dénominations»⁴⁾ der untern, also ungefähr ihre «Nenner». So kam er zum Satz: *Das Produkt zweier Glieder der unteren Folge ist ein Glied derselben Folge und zwar ist sein Nenner gleich der Summe der Nenner der Faktoren.* Aus der einfachen Folge des Archimedes wird bei Chuquet eine doppelte Zahlenfolge!

Damit ist der langsam aufwärts drängende Keim des logarithmischen Rechnens schüchtern ans Tageslicht getreten. Zum heutigen Baum fehlen ihm aber noch Stamm und Krone.

Ungeachtet der schwachen Verbreitung von Chuquets Werk ging die einmal gewonnene Regel nie mehr ganz verloren. Sie tauchte bei einem halben Dutzend oder mehr «Cossisten» (so benannt nach der Unbekannten, der «cosa», also Algebraiker oder auch Rechenmeister) wieder auf⁵⁾, doch eben nur als Regel. Einen Sonderfall kennt auch heute jeder Rechner: wenn man Stufenzahlen wie 10 000 und 100 000 zu multiplizieren hat, so zählt und addiert man vorteilhaft die Nullen; $4 + 5 = 9$, also 1 000 000 000. Das aber ist gleichbedeutend mit der Rechnung $10^4 \cdot 10^5 = 10^9$, d. h. man hat mit den Zehnerlogarithmen der Potenzen eine Addition anstelle einer Multiplikation ausgeführt.

Einen wichtigen Fortschritt in der Einsicht erzielte 1544 der ehemalige Augustinermönch und nachmalige lutherische Wanderprediger *Michael Stifel* (Esslingen 1486 oder 1487 — Jena 1567), ein gar merkwürdiger Geselle und hochstehender Mathematiker. In seiner «*Arithmetica integra*» setzte er die Doppelfolge auch nach links fort:

$$\begin{array}{cccccccccc} \dots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \dots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \end{array}$$

Er nannte die oberen Zahlen «exponentes», die Ausgesetzten. Es ist leicht wahrzunehmen, daß die Regel noch gilt. Damit verband Michael Stifel ein tieferes Eindringen:

«Addition in der arithmetischen (oberen) Folge entspricht der Multiplikation in der geometrischen, ebenso Subtraktion in jener der Division in dieser. Die einfache Multiplikation in der arithmetischen Folge wird zur Multiplikation in sich (Potenzierung) bei der geometrischen Folge. Die Division in der arithmetischen Folge ist dem Wurzelziehen in der geometrischen Folge zugeordnet, wie die Halbierung dem Quadratwurzelausziehen.»⁶⁾

Das ist nicht weniger als eine vollständige Aufzählung der Regeln des logarithmischen Rechnens mit der klaren Einsicht in die Erniedrigung der Rechenoperationen. Michael Stifel ist der erste Mathematiker, der die Theorie des logarithmischen Rechnens klar eingesehen und ausgedrückt hat.

Was fehlt denn noch? Vom rein theoretischen Standpunkt aus der einwandfreie Beweis, vom praktischen aus aber weit mehr! Die beiden Zahlenfolgen sind für das wirkliche Rechnen zu lückenhaft; man kann mit dem vorigen Beispiel nicht einmal $2 \cdot 5$ oder $3 \cdot 3$ bewältigen; zuviele Zahlen fallen in die gewaltigen Zwischenräume, z. B. zwischen 32 und 64; man denke dabei nicht allein an die Ganzen, sondern auch an die unerschöpfliche Menge der Brüche zwischen 1 und 2! Es mangelt die *Verdichtung* der Zahlenfolgen, ein für jene Zeit noch zu schwieriges Problem. Es fehlten die zweckmäßigen Zeichen für die einzuschiebenden Zahlen: die Dezimalbrüche. Um 1544 waren die Männer noch nicht geboren, welche diese technische Aufgabe bewältigen sollten.

Über die Zwischenzeit hinweg die tiefere Einsicht Stifels gerettet zu haben, ist das Verdienst des Mathematikers *Simon Jacob* († 1564); er hat die Bemerkungen Stifels genau und für die damalige Zeit leicht verständlich wiedergegeben, schließend mit: «... letztlich was dort ist Radicem extrahieren, das ist hie schlechts Diuidiern mit der zal die der Radix in Ordnung zeigt.»

Was man von Jost Bürgis Leben weiß

„Wir Wilhelm von gotts gnaden landgrave zu Hesse, grave zue Carzenelnpogen etc., thun kunth und bekennen hirann, das wir unsern lieben getreuen Joist Burgk von Liechtensteig aus Schweitz zu unserm auermacher und diehner auß und angenommen haben, und thun dasselbig hirmitt und in craft dis brifs, derogestalt und also, das ehr unser auermacher und diener unser auerwerk klein und groß allesampt in gang erhalten, anrichten und keinswegs in abgang kommen lassen und was daran zerbricht oder zu bessern ist, uff seinen coisten jederzeit wider machen, das darann durchaus kein mangel seie, und sonsten in sachen, darzue wir ihne seiner kunst nach zu geprauchten wissen, sich jederzeit wilffährig, unverdroßen und vleißig befinden lassen, unser treu, hold, gehorsam und gewertig sein und alles dasjenig thun, so ein treuer auermacher und diener seinem hern schuldig und pflüchtig ist, in maßen er uns solches gelobt und geschworen und deßen seinen reversbrief ubergeben hatt. Darentgegen und von solches seins diensts wegen sollen und wollen wir ihme jedes jars, so lange diße unsere Bestallung wehret, handreichden und geben lassen dreißig gulden gelts durch