

Assistentenzeit (1880 - 1890)

Autor(en): **Kennedy, Hubert C.**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **14 (1974)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

rem ein Heim für berufstätige Mädchen und Arbeiterinnen. Angeregt durch St. Giovanni Bosco, entschloß er sich in seinem fünfzigsten Lebensjahr, Priester zu werden. 1876 erfolgte die Ordination. 1881 gründete Faà di Bruno einen Frauenorden.

In seinem vierten Universitätsjahr besuchte Peano Kurse über höhere Geometrie (wieder mit D'Ovidio), höhere Mechanik (mit Siacci) und mathematische Physik (mit Basso). Francesco Siacci (1839–1907) zeigte schon früh eine ausgesprochen mathematische Begabung. In Rom unterstützte ihn sein Gönner, Prinz Baldassare Boncompagni. Schon 1861 emigrierte Siacci jedoch aus politischen Gründen nach Turin. Dort unterrichtete er viele Jahre als Professor für Ballistik an der Militärakademie. Ab 1875 hielt er gleichzeitig den für ihn geschaffenen Lehrstuhl für höhere Mechanik an der Universität Turin. Siacci galt als ausgezeichnete Lehrer.

Am 16. Juli 1880 legte Peano seine Abschlußprüfungen ab. Seine Leistungen werden mit maximaler Punktzahl bewertet. Er erhielt den Titel eines «Dottore di matematica».

ASSISTENTENZEIT (1880–1890)

Während 10 Jahren versah Peano die Stelle eines Assistenten an der mathematischen Fakultät der Universität Turin; zuerst ein Jahr bei D'Ovidio und in der folgenden Zeit bei Genocchi. Peano übernahm als Assistent während mehrerer Jahre stellvertretend die Funktion des Professors, bis zum Tod Genocchis im Jahr 1889. Vermutlich erstrebte Peano von Anfang an die Professur. 1890 stand ihm dieser Posten auf Grund seiner bisherigen Verdienste durchaus zu. Trotzdem erwartete Peano voller Spannung den Ausgang der Wahl des Nachfolgers Genocchis. Sicher schien die Ernennung Peanos den meisten seiner Kollegen als selbstverständlich. Peano hatte zu dieser Zeit bereits die Axiome für die natürlichen Zahlen und die berühmte raumfüllende Kurve entdeckt.

Peanos erste vier Publikationen waren unbedeutend im Hinblick auf seine künftige Entwicklung. Sie lieferten lediglich Beiträge zu den Forschungsarbeiten seiner Lehrer D'Ovidio und Faà di Bruno. Im Frühjahr 1882 machte Peano die erste einer ganzen Serie von Entdeckungen, welche auf die Entwicklung und die Lehre der höheren Analysis bahnbrechend wirkten. Gegen Ende April 1882 mußte Genocchi aus gesundheitlichen Gründen seine Lehrtätigkeit unterbrechen. Peano übernahm stellvertretend die Fortführung der Vorlesungen. Als er die Theorie der krummen Flächen zu erklären hatte, entdeckte er einen Fehler in der bisher als allgemein anerkannt geltenden Definition J. A. Serrets über den Inhalt einer krummen Fläche. In seiner Vorlesung vom 22. Mai gab Peano die richtige Definition. Der Irrtum war auch H. A. Schwarz aufgefallen. Er hatte bereits an verschiedene Sachverständige darüber geschrieben, auch an Genocchi, aber noch nichts darüber veröffentlicht. Peano brachte offenbar die erste korrigierte Definition.

Weitere solche Entdeckungen während der Zeit, da er höhere Analysis dozierte – er vertrat Genocchi ununterbrochen während fast zweier Jahre –, veranlaßten Peano zu seiner ersten großen, aufsehenerregenden Veröffentlichung: *Calcolo differenziale*. Das Werk erschien 1884. Bei der Herausgabe dieses Buches geschah etwas für die Geschichte der Mathematik Außerordentliches. Auf der Titelseite steht nicht Peanos, sondern Genocchis Name. Was war geschehen? Der Verlag Fratelli Bocca hatte Genocchi um die Ausarbeitung eines Textbuches für höhere Analysis gebeten. Nach-

dem Genocchi den Auftrag abgelehnt hatte, wandte sich der Verlag an Peano. Der Assistent bat seinen Professor, den Text unter Verwendung seiner – Genocchis – Vorlesungen schreiben zu dürfen. Genocchi stimmte zu. Als das Buch herauskam, stand Genocchis Name auf dem Titelblatt und unter dem Namen des <Verfassers>: <Herausgegeben mit Anmerkungen von Dr. Giuseppe Peano>. Im Vorwort werden Peanos <Anmerkungen> als <wichtige Ergänzungen> erwähnt. Genocchi ärgerte sich über diesen Lapsus. Er ließ in verschiedenen mathematischen Zeitschriften einen Artikel erscheinen, in dem er unmißverständlich Peano als Urheber und Verfasser des Buches hervorhob. Das Textbuch enthält tatsächlich auch keine genauen Wiedergaben aus Genocchis Vorlesungen. Peano hatte sie verbessert! – Die 32 Seiten der <Anmerkungen> enthalten den wertvollsten Teil des Buches. Die *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* erwähnt unter vielen andern interessanten Themen dieses Werks: Lehrsätze und Bemerkungen über die Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke; Hinweise auf Fehler in den besseren der damals gebrauchten Textbüchern; eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes für Ableitungen; einen Lehrsatz über die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion mit mehreren Variablen; Lehrsätze über Existenz und Differenzierbarkeit impliziter Funktionen; ein Beispiel einer Funktion, dessen partielle Ableitungen nicht kommutativ sind; Bedingungen, um eine Funktion mehrerer Variablen mit einer Taylorschen Reihe auszudrücken; ein Gegenbeispiel für die allgemein anerkannte Theorie der Minima; Regeln für die Integration rationaler Funktionen, deren Nennerwurzeln unbekannt sind.

Als Kuriosität darf auch die Funktion erwähnt werden, die für rationales x gleich 0 ist und für irrationales x gleich 1. P. G. L. Dirichlet hatte diese Funktion bereits in Erwägung gezogen, doch Peano war der erste, der sie mit einem analytischen Ausdruck benannte. Gottlob Frege hatte dies noch 1891 für unmöglich gehalten. Adolf Mayer schrieb 1899 im Vorwort zur deutschen Ausgabe des Buches von Peano:

Das im Herbst 1884 von G. Peano herausgegebene Werk *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* bot nicht bloß ein mustergültiges Beispiel präziser Darstellung und strenger Schlußweise dar, dessen günstiger Einfluß in fast allen seitdem erschienenen größeren Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung unverkennbar zutage tritt, es gab namentlich auch durch die Hervorhebung alteingewurzelter Irrtümer in den vorangestellten Noten der Wissenschaft selbst Anstoß zu neuer fruchtbarer Entwicklung.

Peano besaß die geradezu phänomenale Begabung, Irrtümer in den Lehrsätzen über Differential- und Integralrechnung aufzudecken und Unklarheiten in Lehrsätzen und Definitionen zu beseitigen. Er fand stets gut verständliche, überzeugende Gegenbeispiele. Es gelang ihm, Lehrsätze durch Vereinfachung klar und präzise zu formulieren. Das *Calcolo differenziale* ist eine Fundgrube für solche Musterbeispiele. Schon vor der Drucklegung seines Buches hatte Peano in einem Brief an den Verleger von *Nouvelles Annales de Mathématiques* den im Text über Differential- und Integralrechnung von Jordan und Hoüel gelieferten Beweis des Mittelwertsatzes kritisiert. Er bemerkte zum Beispiel, daß die Formel $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h)$ ohne die Annahme der Stetigkeit der Ableitung bewiesen werden kann.

Integralrechnung führt zu Differentialgleichungen. 1886 lieferte Peano Darstellung und Beweis des Lehrsatzes, daß die Gleichung $y' = f(x, y)$ nur durch die Annahme, daß f stetig ist, gelöst werden kann. Dieser Beweis, obwohl nicht vollständig,

stimmte grundsätzlich. 1890 lieferte Peano den genaueren Beweis für die Verallgemeinerung dieses Lehrsatzes. Eine Beschränkung von f scheint unumgänglich, um zu einer sicheren Lösung zu kommen. Dabei stellt sich die mathematische Frage nach der schwächsten Bedingung. Peanos Entdeckung ist hinsichtlich der weit zurückgreifenden Geschichte dieses für die Differentialgleichungen grundsätzlichen Lehrsatzes von besonderer Bedeutung. 1887 fand Peano ebenfalls die Methode für die Lösung linearer Differentialgleichungen durch aufeinanderfolgende Annäherungen. Aber diesen Weg fand er nicht, wie er glaubte, als erster. H. A. Schwarz hatte bereits etwas über dieses Verfahren, das durch Emil Picard aufgegriffen und in Frankreich und anderswo als Picardsche Methode bekannt wurde, veröffentlicht.

Peanos zweites Buch, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, erschien 1887. Das Material dafür trug er aus seinen Vorlesungen an der Universität zusammen. In diesem Werk glänzte Peano durch sein Wissen über das Maß einer Punktmenge. Cantor hatte sich bereits mit diesem Problem befaßt, aber seine Definition des <Maßes> war so, daß das <Maß> der Vereinigung zweier disjunkter Mengen weniger sein konnte als die Summe der <Maße> der zwei Mengen. Peano beseitigte diese Schwierigkeit durch die Definition, daß eine Punktmenge A nebst dem Cantorschen Maß $m(A)$ in einem Intervall I zum Beispiel ihr <inneres Maß> enthält, $m(I) - m(I - A)$. Peano bezeichnete A als meßbar, sofern die zwei Zahlen zusammentreffen. Zur selben Erkenntnis kam im gleichen Jahr, jedoch unabhängig von Peano, auch C. Jordan. Viele bekannte Punktmenge waren jedoch bei dieser Definition nicht meßbar, so zum Beispiel die in einem abgeschlossenen Intervall enthaltenen rationalen Zahlen. Solche Mengen wurden erst meßbar, als H. Lebesgue 1902 auf Anraten E. Borels vorschlug, an Stelle der in Peanos Definition verwendeten endlichen Menge von Mengen eine abzählbar unendliche Menge von Mengen zu setzen.

Peanos Zukunft schien nun gesichert. Seine Tätigkeit an der Universität fand Anerkennung. Seit 1886 unterrichtete Peano auch – als Professor – an der Militärakademie. Am 21. Juli 1887 verheiratete er sich mit Carola Crosio, der Tochter des anerkannten Genremalers Luigi Crosio (1835–1915). Crosio stellte vor allem pompejanische Szenen dar und malte Bilder des Alltagslebens aus dem 17. Jahrhundert.

1888 kam Peanos drittes Buch heraus, das *Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Dieses Werk war die Frucht der Überarbeitung und Neufassung der 1844 von Grassmann veröffentlichten Ausdehnungslehre. Peano erhob keinen Anspruch auf Originalität der in diesem Buch enthaltenen Gedanken. Es steht jedoch fest, daß Peanos scharfe, exakte Formulierungen dem als schwer lesbar berüchtigten Werk und den Ideen Grassmanns zum Durchbruch und zur weiteren Verbreitung verholfen. Peano setzte seine Arbeit auf diesem Gebiet fort. 1891 veröffentlichte er ein Heft von 42 Seiten über die Grundbegriffe des geometrischen Kalküls. In der ebenfalls 1891 herausgegebenen deutschen Ausgabe heißt es: <Der geometrische Calcul behandelt die geometrischen Fragen, indem er die analytischen Operationen direkt mit den geometrischen Dingen vornimmt, ohne es nöthig zu haben, sie immer mittelst der Coordinaten zu bestimmen.> 1896 schrieb Peano wieder eine Arbeit über den geometrischen Kalkül. Auf das Drängen seiner Kollegen wandte er sich darin an Professoren, nicht an Studenten. Wenn sich Peano auch nicht direkt an der Forschung, die die Vektoranalysis in eine neue Richtung führte, beteiligte, wirkten seine Gedanken doch offensichtlich

stimulierend auf andere. Heutzutage kann man sich kaum vorstellen, mit welcher Opposition damals die neue Vektorentheorie aufgenommen wurde. Burali-Forti wurde die Privatdozentur entzogen, weil er beharrlich nicht auf die Verwendung von Vektoren verzichten wollte. Peano gehörte dem das Urteil aussprechenden Gremium an. Vergeblich setzte er sich mit Vehemenz für seinen Kollegen und für den Gebrauch der Vektoren ein.

Das erste Kapitel des 1888 erschienenen *Calcolo geometrico* bezieht sich kaum auf den übrigen Teil des Buches, ist aber insofern interessant, als Peano darin zum erstenmal etwas über mathematische Logik veröffentlichte. Beim Studium der Werke von E. Schröder, G. Boole, C. S. Peirce und anderen war Peano auf die Analogie der algebraischen und geometrischen Operationen mit den Operationen der mathematischen Logik gestoßen. Er schuf zwar vorerst wenig Neues; einige seiner Bezeichnungen wurden nie verwendet. Hingegen brachte Peano in der zu Anfang des folgenden Jahres (1889) erschienenen 36seitigen Broschüre *Arithmetices principia, nova methodo exposita* eine Menge sensationeller Enthüllungen. Diese Schrift enthält seine erste Auseinandersetzung mit den heute berühmten Axiomen für die natürlichen Zahlen.

Dedekind hatte bereits 1888 *Was sind und was sollen die Zahlen?* veröffentlicht, in der das Wesentliche der Peanoschen Analysis enthalten war. Dedekinds Heft gelangte jedoch erst in Peanos Hände, als seine eigene Arbeit druckfertig war. Peano anerkannte Dedekinds Recht auf Erstpublikation, machte aber in einer Erklärung auf die Tatsache aufmerksam, daß er unabhängig und in völliger Unkenntnis der Dedekindschen Veröffentlichung zu seiner Analysis der natürlichen Zahlen gekommen war.

In seiner Broschüre verwendete Peano zum erstenmal das Symbol ε für das Element einer Menge und das Symbol \supset für Teilmengenbeziehungen. (Die heutige Mathematik verwendet an Stelle dieser Symbole die Zeichen \in und \subset .) Peano wies ausdrücklich auf die Notwendigkeit der Unterscheidung der beiden Zeichen hin. In diesem Heft beginnt Peano die Entwicklung der Arithmetik mit der Aufzählung von vier Grundbegriffen und von neun Axiomen. Vier beziehen sich auf das Symbol $=$ als Grundbegriff. Die andern fünf, heute als die Peanoschen Axiome bekannt, behandeln die drei Grundbegriffe N , 1 , $a + 1$. Peano schrieb 1891 darüber eine Arbeit, auf die später eingegangen wird. Die \langle neue Methode \rangle der Benennung besteht in dem weitgehenden, fast ausschließlichen Gebrauch von Symbolen.

Peano war stolz, als erster ein vollständiges mathematisches System in Symbolen dargestellt zu haben. Das System ist zwar bei weitem nicht vollständig – er definiert zum Beispiel keine negativen Zahlen –, aber er bewies, daß die ganze Arithmetik von Axiomen abgeleitet werden kann.

Der fast ausschließliche Gebrauch von Symbolen war eine Neuigkeit. Im Gegensatz dazu machte Peano durch den Gebrauch der lateinischen Sprache in Vorwort und Erklärungen einen Rückschritt in vergangene Zeiten. Es gibt Meinungen, die im Hinblick auf Peanos spätere linguistische Tätigkeit die Verwendung des Lateins als ersten Versuch zur Schaffung einer internationalen Sprache werten. Gegen diese Behauptung spricht, daß Peano sicher wußte, daß die Zeit des Lateins als internationale Sprache vorbei war. Wahrscheinlicher ist, daß Peano die geschichtliche Bedeutung seines Werks erkannte und ihm einen \langle klassischen \rangle Anstrich geben wollte. Auch seine Bewunderung für Newton dürfte mit im Spiel gewesen sein. Schon der Titel des Buches tönt merkwürdig. Peano setzte an Stelle des gebräuchlichen lateinischen

«arithmetica» die griechische Umschreibung «arithmetices». Vielleicht finden wir hier den einzigen Einbruch eines romantischen Zugs in Peanos wissenschaftliche Karriere.

Nach gelungener Vervollständigung seiner axiomatisch-symbolischen Behandlung der natürlichen Zahlen versuchte Peano, seine neue Methode auf die Geometrie anzuwenden. Das Ergebnis, das er im Juni 1889 veröffentlichte, war nicht so bahnbrechend wie sein vorheriges Buch; es zeigte weniger Originalität. (Peano gab offen zu, sich auf die *Vorlesungen über Geometrie* [Leipzig 1882] von Moritz Pasch gestützt zu haben.) Beide Arbeiten setzten unter Verwendung der Symbolsprache die neue Axiomtheorie in die Praxis um. Hilbert verhalf ihr später durch seine volkstümliche Erklärung, «Man muß jederzeit an Stelle von «Punkten, Geraden, Ebenen» «Tische, Stühle, Bierseidel» sagen können», zum Durchbruch.

Peanos Flair für eingewurzelte Irrtümer in der Mathematik und das Finden von überzeugenden Gegenbeispielen ist bereits erwähnt worden. Sein aufsehenerregendstes Beispiel war 1890 die Entdeckung seiner raumfüllenden Kurve. Schon 1878 hatte Georg Cantor durch den Beweis der Möglichkeit einer eindeutigen Entsprechung der Punkte einer Linie und derjenigen einer Fläche die bisherige Annahme, daß es «mehr» Punkte gibt in einem Raum als in einer Fläche, als falsch entlarvt. E. Netto zeigte kurz darauf, daß eine solche Korrespondenz auf jeden Fall unstetig sein muß. Man glaubte damals, daß eine stetige Kurve mit parametrischer Funktion einer einzigen Variablen $x = f(t)$ und $y = g(t)$ im Bereich einer beliebigen Fläche eingeschlossen werden könne. Peano fand jedoch die stetigen Funktionen f, g , so daß, da sich t über dem Intervall $[0,1]$ verändert, die beschriebene Kurve jeden Punkt eines Quadrats durchläuft.

1891 veröffentlichte Hilbert das erste intuitive geometrische Beispiel einer Folge von Kurven, dessen Grenzkurve die «Peanokurve» ergibt. Wahrscheinlich gelangte Peano auf Grund derselben Überlegungen zur Konstruktion seiner Kurve. Dies läßt sich aus Peanos Veröffentlichung einer Folge solcher Kurven in der letzten Ausgabe des *Formulario Mathematico* (1908) nachweisen. Peano ließ auf der Terrasse seines im Sommer 1889 gekauften Hauses eine der Kurven dieser Folge mit schwarzen Fliesen auf weißem Grund anbringen.

Eine weitere, ebenfalls 1890 erschienene Publikation Peanos in den *Mathematischen Annalen* gab den Beweis der Existenz einer Lösung eines Systems von Differentialgleichungen, einzig auf Grund der Annahme, daß die in Betracht gezogenen Funktionen stetig sind. Das war die Verallgemeinerung seines 1886 formulierten, bereits erwähnten Lehrsatzes. In seiner Schrift führte Peano die Unterscheidung zwischen einem Element und einer sich nur aus diesem Element zusammengesetzten Menge ein und brauchte dafür den griechischen Buchstaben Iota. Wenn also b ein Element ist, ist ιb die Menge, welche dieses Element enthält. Infolgedessen kann die Identität $a = b$ als $a \varepsilon \iota b$ aufgezeichnet werden. Diese Veröffentlichung ist auch deshalb von Interesse, weil sie die erste deutliche Aussage des Auswahlaxioms enthält, 14 Jahre vor dem Erscheinen der Darstellung durch Zermelo. Peano verwarf das Auswahlaxiom mit der Begründung, daß es außerhalb der in der Mathematik angewandten Logik stünde. Nach der Einführung des Auswahlaxioms 1904 durch Zermelo ging Peano 1906 nochmals gründlicher darauf ein. Peano bestand darauf, daß ein Beweis, der das Auswahlaxiom gebraucht, kein gültiger «Beweis» im herkömmlichen Sinne des Wortes sei.

Angelo Genocchi starb im Frühjahr 1889. Es wurde eine Kommission zur Ernennung seines Nachfolgers gebildet. Peano reichte im September ordnungsgemäß sein Bewerbungsschreiben ein. Man ließ ihn über ein Jahr auf die Entscheidung warten. Als Peano Casorati um Nachricht über den Stand der Dinge und über Angabe des vorgesehenen Datums der Wahl bat, konnte Casorati noch keine bestimmte Antwort geben. Er fügte seinem Antwortbrief bei: «Unterdessen geschieht in Turin nichts Schlechtes, da es dem gegenwärtigen *Incaricato* weder an Fähigkeit noch an Wissen noch an Begabung zum Unterrichten fehlt.» Die Mitteilung, daß «in Turin nichts Schlechtes geschah», war sicher ein schlechter Trost. Aber – *pazienza!* Endlich fiel die Entscheidung. Am 1. Dezember 1890 wurde Giuseppe Peano zum Extraordinarius für Differential- und Integralrechnung ernannt.

AUSSERORDENTLICHER PROFESSOR (1891–1895)

Neues in der Mathematik findet oft schwer den Weg zur Presse, besonders wenn es viel neue Symbole enthält. Diese Schwierigkeit stand unverkennbar hinter Peanos Entschluß, eine eigene Zeitschrift, die *Rivista di Matematica*, ins Leben zu rufen. In Zusammenarbeit mit Filiberto Castellano (1860–1919), seinem Assistenten an der Universität und Kollegen an der Militärakademie, mit Enrico Novarese (1858–1892), ebenfalls Professor an der Militärakademie und Assistent an der Universität, und dank der finanziellen Unterstützung durch den Kollegen von der Militärakademie, Francesco Porta, und durch Francesco Porro, Professor für Astronomie an der Universität, brachte Peano 1891 seine erste Fachzeitschrift in eigener Regie heraus. Im ersten zehnsseitigen Artikel gibt Peano eine Zusammenfassung seiner bisherigen Arbeiten auf dem Gebiet der mathematischen Logik. Er sieht darin die Verwirklichung von Leibnizens «Traum» einer *characteristica universalis*. Um diesem Anspruch mehr Gewicht zu verleihen, zitiert Peano – etwas übertreibend – Ernst Schröder, daß das «Ideal der Pasigraphie für die Zwecke der Wissenschaft bereits in ganz erheblichem Umfange *verwirklicht ist*».

In «Formule di logica matematica» zeigt Peano den ersten Versuch, die Logik auf dem Weg, den er schon auf dem Gebiet der Arithmetik und der Geometrie beschritten hatte, anzugehen, indem er den Aussagenkalkül anhand der vier Grundbegriffe, dargestellt durch die Symbole \supset , \cap , $-$, \wedge , und der 12 Axiome aufbaut. Diese Axiome waren nicht unabhängig. Später änderte Peano seine Aufstellung ab. In «Sul concetto di numero» bewies er anhand der Grundbegriffe, N (Zahl), 1 , a^+ (die auf a folgende Zahl), die Unabhängigkeit seiner 5 Axiome für die natürlichen Zahlen. Das heißt:

1. 1 ist eine Zahl.
2. Es sei a eine Zahl; die auf a folgende ist auch eine Zahl.
3. Wenn auf zwei Zahlen a und b dieselbe Zahl folgt, so sind sie gleich.
4. Die Zahl, welche auf eine beliebige Zahl folgt, ist niemals 1.
5. s sei eine Klasse: wir wollen annehmen, 1 gehöre dieser Klasse an, und jedesmal, wenn ein Element x dieser Klasse angehört, gehöre auch das ihm folgende ihr an; alsdann gehören alle Zahlen dieser Klasse an.

Durch die Anwendung dieses letzten Axioms (das Axiom der Induktion) gelang es