Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1970)

Artikel: Nachruf auf Emmy Noether

Autor: Waerden, B.L. van der

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8496

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nachruf auf Emmy Noether.

Von

B. L. van der Waerden in Leipzig.

Ein tragisches Geschick hat unserer Wissenschaft eine höchst bedeutsame, völlig einzigartige Persönlichkeit entrissen. Unsere treue Annalen-Mitarbeiterin Emmy Noether ist am 14. April 1935 an den Folgen einer Operation gestorben. Geboren war sie in Erlangen am 23. März 1882 als Tochter des bekannten Mathematikers Max Noether.

Ihre absolute, sich jedem Vergleich entziehende Einzigartigkeit ist nicht in der Art ihres Auftretens nach außen hin zu erfassen, so charakteristisch dieses zweifellos war. Ihre Eigenart erschöpft sich auch keineswegs darin, daß es sich hier um eine Frau handelt, die zugleich eine hochbegabte Mathematikerin war, sondern liegt in der ganzen Struktur dieser schöpferischen Persönlichkeit, in dem Stil ihres Denkens und dem Ziel ihres Wollens. Da nun dieses Denken in erster Linie ein mathematisches Denken und das Wollen in erster Linie auf wissenschaftliche Erkenntnis gerichtet war, so müssen wir zuerst ihr mathematisches Schaffen analysieren, wenn wir ihre Persönlichkeit einigermaßen erfassen wollen.

Die Maxime, von der sich Emmy Noether immer hat leiten lassen, könnte man folgendermaßen formulieren: *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.* Dieser Leitsatz war für sie nicht etwa ein Ergebnis ihrer Erfahrung über die Tragweite wissenschaftlicher Methoden, sondern ein apriorisches Grundprinzip ihres Denkens. Sie konnte keinen Satz, keinen Beweis in ihren Geist aufnehmen und verarbeiten, ehe er nicht abstrakt gefaßt und dadurch für ihr Geistesauge durchsichtig gemacht war. Sie konnte nur in Begriffen, nicht in Formeln denken, und darin lag gerade ihre Stärke. Sie wurde so durch ihre eigene Wesensart dazu gezwungen, diejenigen Begriffsbildungen ausfindig zu machen, die geeignet waren, als Träger mathematischer Theorien aufzutreten.

Als Material für diese Denkmethode boten sich ihr die Algebra und die Arithmetik dar. Als grundlegend erkannte sie die Begriffe Körper, Ring, Ideal, Modul, Restklasse und Isomorphismus. Das Vorbild aber für ihre begrifflichen Entwicklungen fand sie in erster Linie in der

Dedekindschen Modultheorie, aus der sie immer neue Ideen und Methoden zu schöpfen wußte und deren Anwendungsgebiet sie nach jeder Richtung hin erstaunlich erweitert hat.

Von der Gordanschen Invariantentheorie ist sie ausgegangen. Ihre Dissertation [1][1]), mit der sie 1907 in Erlangen promovierte, behandelt das Problem, die von Gordan für das binäre und ternäre Gebiet ausgebildeten Methoden auf das n-äre Gebiet zu übertragen. Von den n-ären Reihenentwicklungen der Invariantentheorie hat sie später noch schöne Anwendungen gegeben [4], [12].

Sehr bald jedoch kommt sie in den Bann der Hilbertschen Methoden und Fragestellungen. Dem Hilbertschen Problemkreise gehören ihre Endlichkeitsbeweise für Invarianten endlicher Gruppen [3] und für ganzzahlige Invarianten binärer Formen an. Ihre wichtigste Arbeit aus dieser Periode ist die über Körper und Systeme rationaler Funktionen [2], in welcher sie durch Kombination der Methoden der Hilbertschen Endlichkeitsbeweise mit denen der Steinitzschen Körpertheorie die Existenz einer endlichen Rationalbasis für jedes System von rationalen Funktionen von n Veränderlichen beweist. Auf Grund davon löst sie einen Teil des Hilbertschen Problems der relativganzen Funktionen. Mit den Methoden derselben Arbeit [2] liefert sie dann auch einen wesentlichen Beitrag — den wichtigsten, der bisher überhaupt erzielt wurde — zum Problem der Konstruktion von Gleichungen mit vorgegebener Gruppe [7].

Während des Krieges kam Emmy Noether nach Göttingen, wo sie sich 1919 habilitierte und bald darauf einen Lehrauftrag erhielt. Unter dem Einfluß von Klein und Hilbert, die sich in dieser Zeit beide sehr mit der allgemeinen Relativitätstheorie beschäftigten, kamen ihre Arbeiten über Differentialinvarianten [8], [9] zustande, welche für dieses Gebiet von großer Wichtigkeit geworden sind. Sie zeigt in ihnen zum ersten Male die allgemeinen Methoden auf, die zur Erzeugung sämtlicher Differentialinvarianten geeignet sind. In der ersten Arbeit wird der fundamentale Begriff des Reduktionssystems geprägt: eines Systems von Differentialinvarianten, von denen alle übrigen algebraische Invarianten sind. In der zweiten werden die Methoden der formalen Variationsrechnung zur Bildung von Differentialinvarianten herangezogen.

Das Studium der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen [10] machte sie näher mit der Dedekindschen Modul- und Idealtheorie bekannt, welche Bekanntschaft für ihr weiteres Schaffen richtunggebend werden sollte. In der gemeinsamen Arbeit mit Schmeidler [13] werden die modultheoretischen Begriffe: Direkte Summen- und Durchschnittsdarstellung, Restklassenmoduln und Modulisomorphie entwickelt und erprobt, welche

[1]) Die Nummern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis auf Seite 40.

sich wie rote Fäden durch ihr späteres Werk ziehen. Hier werden auch zum ersten Male Eindeutigkeitsbeweise mit Hilfe der Austauschmethode geführt und Durchschnittsdarstellungen auf Grund einer Endlichkeitsbedingung gewonnen.

Der erste große Erfolg dieser Methode wurde in der jetzt schon klassischen Arbeit von 1921 „Idealtheorie in Ringbereichen" [15] erzielt. In ihr wird zunächst, nachdem die Begriffe Ring und Ideal definiert sind, aus dem Hilbertschen Satz von der endlichen Idealbasis eine äquivalente Endlichkeitsbedingung, der Teilerkettensatz, hergeleitet. Die Darstellung beliebiger Ideale als Durchschnitte von Primäridealen, die E. Lasker für den Fall des Polynombereichs mit den Hilfsmitteln der Idealtheorie erhalten hatte, wird als Folge des Teilerkettensatzes allein erkannt. Neben dem Begriff des Primärideals (einer abstrakten Fassung des Laskerschen Begriffs, zugleich Verallgemeinerung des Dedekindschen Begriffs des einartigen Ideals) wird der des irreduziblen Ideals geprägt, und mit den schon erwähnten Modulmethoden werden vier Eindeutigkeitssätze bewiesen.

Diese Arbeit bildet die unverrückbare Grundlage der heutigen „allgemeinen Idealtheorie". Ihre Ergebnisse bedurften eines Ausbaus nach zwei verschiedenen Richtungen hin. Einmal galt es, die Eliminationstheorie der allgemeinen Idealtheorie unterzuordnen und die Nullstellentheorie der Polynomideale von diesem Standpunkte aus neu zu begründen. In ihrer Bearbeitung der Hentzeltschen Eliminationstheorie [17] und in zwei weiteren Arbeiten, [19] und [20], hat Emmy Noether mit diesem Problem gerungen; aber erst in ihren Vorlesungen 1923/24 gab sie der Lösung die endgültige Form. Es zeugt von ihrer Großzügigkeit, daß sie, als ich ein Jahr später im Anschluß an ihre Arbeiten dieselbe Begründung der Nullstellentheorie fand, mir die Publikation überlassen hat.

Das zweite Notwendige war die Herstellung der Beziehung der allgemeinen Idealtheorie zur klassischen Dedekindschen Idealtheorie der Hauptordnungen in Zahl- und Funktionenkörpern. Es galt die Bedingungen aufzustellen, die ein Ring erfüllen muß, damit jedes Ideal nicht nur Durchschnitt von Primäridealen, sondern Produkt von Primidealpotenzen wird. Auch diese Aufgabe wird vollständig gelöst [25]. Als wesentlich stellt sich dabei neben den Endlichkeitsbedingungen (Teiler- und Vielfachenkettensatz) die Bedingung der „ganzen Abgeschlossenheit" heraus. Durch Übertragung der Endlichkeitsbedingungen auf endliche Erweiterungen eines Ringes kam sie gleichzeitig mit Hilfe ihrer älteren invariantentheoretischen Methode zu einem Endlichkeitssatz für modulare Invarianten [24].

Die großen idealtheoretischen Arbeiten [15] und [25] bilden den Ausgangspunkt einer langen Reihe ergebnisreicher Arbeiten, meistens von

Emmy Noethers Schülern, über welche W. Krull in seinem Bericht „Idealtheorie“ (Ergebn. Math. 4, 3, 1935) zusammenfassend berichtet hat.

Inzwischen war Emmy Noether selbst schon mit einem weiteren Problemkreis beschäftigt. Dieselben Modulbegriffe, aus denen heraus sie die kommutative Idealtheorie entwickelt hatte, sollten ihre Kraft auch im Nichtkommutativen zeigen. Zunächst gelang es, die Darstellungstheorie der Gruppen und hyperkomplexen Systeme der Modultheorie unterzuordnen. Es entspricht nämlich jeder Darstellung eines Systems $\mathfrak{R}$ durch lineare Transformationen eindeutig ein $\mathfrak{R}$-Modul, der *Darstellungsmodul*. Der Äquivalenzbegriff der Darstellungstheorie ordnet sich nunmehr dem Modul-Isomorphiebegriff unter; ebenso erweisen sich die Begriffe reduzibel, irreduzibel und vollständig reduzibel als modultheoretische Begriffe. Als zentrales Theorem der Darstellungstheorie kristallisiert sich nun folgender Satz heraus: Jeder irreduzible $\mathfrak{R}$-Modul ist äquivalent einem Ideal des Ringes $\mathfrak{R}$.

Diese enge Verknüpfung von Darstellungstheorie, Modultheorie und Idealtheorie hat Emmy Noether schon ab 1924 in ihren Vorlesungen entwickelt (vgl. die Note [23]); sie liegt auch ihrer Diskriminantenarbeit [26] zugrunde. In voller Klarheit und Allgemeinheit wurde dieser Zusammenhang aber erst in der Göttinger Vorlesung von 1927/28 und in der daraus entstandenen Arbeit [29] erklärt. Diese enthält außerdem eine systematische Idealtheorie der hyperkomplexen Systeme, gipfelnd in dem Satz: Die halbeinfachen hyperkomplexen Systeme im Sinne von J. H. Maclagan-Wedderburn sind direkte Summen von einfachen Rechtsidealen; ihre Darstellungen sind ebenfalls vollständig reduzibel. Aus diesen Sätzen wird nun die ganze Frobeniussche Darstellungstheorie entwickelt und sogar verallgemeinert. Während nämlich die Frobeniussche Darstellungstheorie vom Körper der komplexen Zahlen ausging, gestattet die Noethersche Theorie, Darstellungen in beliebigen Körpern direkt zu behandeln. Es entstand nun die Frage nach den Beziehungen zwischen den Darstellungen in verschiedenen Körpern (die sogenannte arithmetische Theorie der Gruppen linearer Substitutionen), insbesondere die Frage nach den *Zerfällungskörpern*, in denen eine gegebene Darstellung in absolut-irreduzible zerfällt. In der Noetherschen Theorie ordnen sich diese Fragen der allgemeineren Frage nach der Struktur des Produktes von zwei einfachen hyperkomplexen Systemen unter, welche Frage sich wieder mit modultheoretischen Methoden erschöpfend beantworten ließ [35]. Dabei ergab sich insbesondere eine Charakterisierung der Zerfällungskörper einer Divisionsalgebra als maximale kommutative Unterkörper der Algebra selbst oder eines vollen Matrixringes über dieser Algebra [27]. Diese Einbettung der Zerfällungskörper gibt gleichzeitig einen tiefen Einblick in die Struktur der Algebra selbst: Diese läßt sich darstellen als „verschränktes Produkt" des Zerfällungskörpers mit dessen Galoisscher Gruppe [2]).

Der einfachste Fall des verschränkten Produktes ist die „zyklische Algebra", die entsteht, wenn der Zerfällungskörper zyklisch und in der Algebra selbst eingebettet ist. Die Struktur einer solchen zyklischen Algebra hängt davon ab, ob gewisse Elemente des Grundkörpers Normen von Elementen des Zerfällungskörpers sind. Ist nun insbesondere der Grundkörper ein algebraischer Zahlkörper, so ist die Normentheorie der zyklischen Erweiterungen ein Gegenstand der Klassenkörpertheorie, welche in dieser Weise als eng mit der Algebrentheorie verknüpft erscheint [34]. Die weitere Auswertung dieser Verknüpfung durch Noether, H. Hasse, R. Brauer und C. Chevalley in ständiger Wechselwirkung führte einerseits zu einer Neubegründung gewisser Teile der Klassenkörpertheorie mit hyperkomplexen Methoden, andererseits auch zum Beweis eines lange vermuteten „Hauptsatzes der Algebrentheorie", der besagt, daß jede Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper zyklisch ist [33].

Die Betrachtung beliebiger verschränkter Produkte an Stelle der zyklischen Algebren ermöglichte schließlich die Übertragung von Sätzen der Klassenkörpertheorie, insbesondere des „Hauptgeschlechtssatzes", auf nichtabelsche Körper [36].

Mit der begrifflichen Durchdringung der Klassenkörpertheorie war ein Ziel erreicht, das Emmy Noether schon seit vielen Jahren, unbeirrt durch die Skepsis der Zahlentheoretiker, beharrlich anstrebte. Die Erreichung dieses Zieles war aber keineswegs ein Endpunkt ihrer Forschungen. Unermüdlich und über alle äußeren Umstände erhaben, schritt sie auf dem ihr durch ihre Begriffsbildungen gezeigten Wege fort. Auch als sie 1933 in Göttingen die Lehrberechtigung verlor und an die Frauenhochschule in Bryn Mawr (Pennsylvania) berufen wurde, wußte sie dort und in dem nahen Princeton in kurzer Zeit wieder eine Schule um sich zu sammeln. Ihre Forschung, die die kommutative Algebra, die kommutative Arithmetik und die nichtkommutative Algebra durchlaufen hatte, wandte sich jetzt der nichtkommutativen Arithmetik zu [37], wurde dann aber durch ihren Tod jäh abgebrochen.

Als charakteristische Wesenszüge haben wir gefunden: Ein unerhört energisches und konsequentes Streben nach begrifflicher Durchdringung des Stoffes bis zur restlosen methodischen Klarheit; ein hartnäckiges Festhalten an einmal als richtig erkannten Methoden und Begriffsbildungen, auch wenn diese den Zeitgenossen noch so abstrakt und un-

[2]) Die Noethersche Theorie der verschränkten Produkte ist dargestellt bei H. Hasse, Theory of cyclic algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 34, S. 180—200, sowie in dem Bericht von M. Deuring, Algebren, Ergebn. Math. 4, 1, S. 52—56.

fruchtbar vorkamen; ein Streben nach Einordnung aller speziellen Zusammenhänge unter bestimmte allgemeine begriffliche Schemata.

Ihr Denken weicht in der Tat in einigen Hinsichten von dem der meisten anderen Mathematiker ab. Wir stützen uns doch alle so gern auf Figuren und Formeln. Für sie waren diese Hilfsmittel wertlos, eher störend. Es war ihr ausschließlich um Begriffe zu tun, nicht um Anschauung oder Rechnung. Die deutschen Buchstaben, die sie in typisch-vereinfachter Form hastig an die Tafel oder auf das Papier warf, waren für sie Repräsentanten von Begriffen, nicht Objekte einer mehr oder weniger mechanischen Rechnung.

Diese völlig unanschauliche und unrechnerische Einstellung war wohl auch eine der Hauptursachen der Schwierigkeit ihrer Vorlesungen. Sie hatte keine didaktische Begabung, und die rührende Mühe, die sie sich gab, ihre Aussprüche, noch bevor sie ganz zu Ende gesprochen waren, durch schnell gesprochene Zusätze zu verdeutlichen, hatte eher den umgekehrten Effekt. Und doch: Wie unerhört groß war trotz allem die Wirkung ihres Vortrags! Die kleine, treue Hörerschar, meistens bestehend aus einigen fortgeschrittenen Studenten und häufig ebensovielen Dozenten und auswärtigen Gästen, mußte sich ungeheuer anstrengen, um mitzukommen. War das aber gelungen, so hatte man weit mehr gelernt als aus dem tadellosesten Kolleg. Es wurden fast nie fertige Theorien vorgetragen, sondern meistens solche, die erst im Werden begriffen waren. Jede ihrer Vorlesungen war ein Programm. Und keiner freute sich mehr als sie selbst, wenn ein solches Programm von ihren Schülern ausgeführt wurde. Völlig unegoistisch und frei von Eitelkeit, beanspruchte sie niemals etwas für sich selbst, sondern förderte in erster Linie die Arbeiten ihrer Schüler. Sie schrieb für uns alle immer die Einleitungen, in denen die Leitgedanken unserer Arbeiten erklärt wurden, die wir selbst anfangs niemals in solcher Klarheit bewußt machen und aussprechen konnten. Sie war uns eine treue Freundin und gleichzeitig eine strenge, unbestechliche Richterin. Als solche war sie auch für die Mathematische Annalen von unschätzbarem Wert.

Wie schon erwähnt, fanden ihre abstrakten, unanschaulichen Begriffsbildungen anfangs wenig Anerkennung. In dem Maße, wie die Erfolge ihrer Methoden auch den anders eingestellten klar wurden, änderte sich das, und seit etwa acht Jahren kamen prominente Mathematiker des In- und Auslandes nach Göttingen, um ihren Rat zu holen und ihre Vorlesungen zu hören. 1932 erhielt sie mit E. Artin zusammen den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis für Arithmetik und Algebra. Und heute scheint der Siegeszug der von ihren Gedanken getragenen modernen Algebra in der ganzen Welt unaufhaltsam zu sein.