

Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8/9/10 (1950)

Artikel: Gaspard Monge
Autor: Taton, René
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-5641>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Gaspard Monge

Parmi les grands créateurs qui, dans la seconde moitié du XVIII^e siècle et le début du XIX^e siècle, préparèrent l'éclosion de la mathématique moderne, Gaspard Monge occupe une place toute spéciale. Si, par la tendance générale de leurs travaux, Lagrange, Legendre, Laplace et même Gauss peuvent être considérés comme les disciples d'Euler et les continuateurs de son œuvre de systématisation toujours plus rigoureuse des mathématiques, l'essentiel de l'apport de Monge réside dans une claire vision des liens qui unissent l'analyse et la géométrie. Comme Euler, Monge fut un chef de file et de nombreux mathématiciens du début du XIX^e siècle subirent très nettement son influence et progressèrent dans les diverses voies qu'il avait ouvertes.

La différence d'inspiration entre ces deux grands mathématiciens est parfois assez subtile. Monge, dont l'œuvre est fortement influencée par un sens remarquable de l'espace, n'en négligeait pas pour autant les ressources de l'analyse, ni l'application des mathématiques aux problèmes concrets. De même Euler ne dédaignait ni l'étude des problèmes géométriques, ni l'application de l'analyse à la pratique. Néanmoins, la différence de tendance entre ces grands créateurs apparaît à chaque pas, spécialement quand ils étudient le même problème, tel celui des surfaces développables qu'ils abordent tous deux vers 1770. Cette différence d'esprit est très bien décrite dans un chapitre célèbre de «*La valeur de la science*» où Henri Poincaré distingue deux catégories de mathématiciens: les analystes préoccupés avant tout de rigueur logique et les géomètres qui ne créent de nouveaux concepts qu'en les associant à des images concrètes. Et tandis qu'Euler personnifie par sa méthode et son œuvre l'aspect analytique de la mathématique du XVIII^e siècle, Monge en personnifie l'aspect géométrique.

Une circonstance spéciale confère d'ailleurs à l'œuvre et à l'influence de Monge une valeur particulière. La création de l'application de l'algèbre à la géométrie par Descartes et Fermat, la naissance et le splendide épanouissement de l'analyse infinitésimale semblaient avoir condamné les méthodes purement géométriques à n'être plus que de timides auxiliaires de l'analyse. Monge contribua éminemment au progrès des mathématiques en prouvant par son œuvre et son enseignement que la géométrie n'avait perdu ni de sa puissance ni de son intérêt et que son éclipse n'était que provisoire. Dans cette œuvre faite de propagande et de persuasion autant que de création personnelle son remarquable talent de professeur joua un rôle essentiel et l'on peut dire que Monge fut le premier mathématicien moderne dont l'activité professorale fut aussi riche en résultats que son œuvre écrite.

Gaspard Monge naquit le 9 mai 1746 à Beaune (Côte d'Or). Son père, Jacques Monge, petit commerçant, était originaire de Saint-Jeoire en Faucigny, près de Bonneville (Haute-Savoie); sa mère, Jeanne Rousseau, était la fille d'un voiturier de Beaune. Jacques Monge eut trois fils: Gaspard (1746—1818), Louis (1748—1827) et Jean (1751—1813); malgré ses faibles ressources, il put les placer au collège d'oratoriens de Beaune où ils firent de brillantes études primaires et secondaires.

En juillet 1762, Gaspard Monge, âgé de 16 ans, quitta le collège de sa ville natale pour aller poursuivre ses études au collège d'oratoriens de Lyon. Là, ses qualités d'intelligence et de méthode, son sens pratique très aigu et sa grande habileté manuelle furent si bien remarqués qu'après quelques mois passés comme élève, il devint professeur de physique. Il semble que les oratoriens aient alors quelque peu insisté pour attirer dans leur ordre un sujet aussi brillant et cette pression paraît avoir déterminé Gaspard Monge à quitter le collège de Lyon.

De retour chez lui au cours de l'été 1764, il se trouvait sans situation, quand on lui proposa l'exécution d'un plan détaillé de Beaune. L'habileté et le soin avec lesquels il le réalisa décidèrent de sa carrière future car un officier supérieur de l'Ecole Royale du Génie de Mézières, ayant vu ce plan, admira les qualités de dessinateur de son auteur et engagea celui-ci à venir dans son école où il s'efforcerait de lui trouver un emploi conforme à ses aptitudes. L'école de Mézières, fondée en 1748, avait très rapidement acquis un grand prestige par la qualité de ses élèves, recrutés par un concours difficile, et par le sérieux de l'enseignement scientifique qui y était donné. En effet, si cet enseignement, orienté en vue de son application à l'art militaire, se trouvait de ce fait limité dans son programme, il n'en atteignait pas moins un développement beaucoup plus avancé que dans les universités et les autres écoles techniques françaises. L'offre était donc bien tentante pour un jeune homme intéressé par tous les problèmes scientifiques ou techniques et Gaspard Monge l'accepta avec joie.

A son arrivée à l'Ecole du Génie de Mézières où il devait passer vingt années de sa vie, Monge semble avoir été quelque peu déçu dans l'espoir qu'il devait nourrir d'y faire une carrière scientifique assez rapide. En effet, son origine roturière lui interdisait d'espérer accéder à la qualité d'officier-élève, tandis que son jeune âge et ses titres encore insuffisants l'empêchaient d'enseigner; d'ailleurs, aucune vacance n'était en vue pour les chaires de mathématiques et de physique occupées par deux professeurs réputés: l'abbé Bossut et l'abbé Nollet. Ainsi, pour ses débuts dans cette école, Monge en fut-il réduit à tenir des emplois assez subalternes: dresser quelques plans sommaires destinés à l'instruction des élèves et aider à la confection de modèles d'architecture en plâtre. Les jeunes nobles, élèves de l'école, ne voyant en lui qu'un habile ouvrier, le considéraient alors avec quelque dédain. Aussi garda-t-il de cette époque une certaine amertume: «J'étais mille fois tenté, dit-il, de déchirer mes dessins par dépit du cas qu'on en faisait, comme si je n'eusse pas été bon à produire autre chose.»

Mais cette période fut brève et, à peine un an après son arrivée, Monge réussit à prouver sa haute valeur en mathématiques. Ayant à résoudre un exercice pratique de défilement¹⁾, c'est-à-dire à établir le plan d'une fortification destinée à protéger une place des regards et des coups d'adversaires situés en un point quelconque des alentours, il réussit à remplacer l'ancienne méthode très longue par un procédé graphique rapide inspiré des méthodes de la géométrie descriptive. Ses supérieurs se refusant

¹⁾ *c. f.*: *Géométrie descriptive*, 3e éd., Paris, 1811, pp. 48-50.

d'abord à prendre sa solution au sérieux, pensant qu'il avait travaillé trop rapidement pour avoir résolu le problème, Monge insista et réussit à les convaincre de la supériorité de son procédé. L'abbé Bossut, professeur de mathématiques, s'intéressa alors à ce jeune homme qui venait de fournir la preuve de ses brillantes qualités de géomètre et le prit comme répétiteur. Dans ce nouvel emploi plus proche de ses goûts, Monge obtint de si bons résultats que, deux ans plus tard, quand l'abbé Bossut quitta l'école, ce fut à lui que l'on confia la chaire de mathématiques. L'année suivante, il devint en même temps répétiteur de physique auprès de l'abbé Nollet. Au décès de ce dernier, en 1770, la chaire de physique lui fut confiée et, au début de 1772, Monge fut officiellement le titré de *professeur royal de mathématiques et de physique*. Dans ce double enseignement, partiellement conçu à des fins utilitaires et qui requérait des qualités très variées, Monge se révéla à la fois mathématicien et physicien de valeur, théoricien et expérimentateur habile et professeur de grande classe. Il suscita plusieurs brillantes vocations et donna à tous ses élèves le goût des sciences.

Mais avant de juger de cette influence, il nous faut revenir à ses premiers travaux personnels qui dénotent tout de suite l'originalité et l'importance de son œuvre. Ces travaux de jeunesse s'étagent sur une période de quelques années, de 1766 à 1772; malgré leur extrême variété, ils ont en commun quelques caractères qui seront ceux de l'œuvre entière de Monge: sens aigu de la réalité géométrique, intérêt porté aux problèmes concrets, grande habileté dans l'emploi de l'analyse et harmonisation constante entre les divers aspects d'un même problème: analytique, géométrique et concret. A la création de la géométrie descriptive et à la systématisation rapide de ses principes essentiels, succèdent bientôt différentes recherches de calcul infinitésimal, de géométrie infinitésimale, de géométrie analytique et de calcul des variations. L'abbé Bossut ne semblant s'intéresser que d'assez loin à ses travaux, Monge essaie, au début de 1771, d'entrer en contact avec les savants de l'Académie des Sciences. Il réussit à correspondre avec Condorcet et, sur les conseils de ce dernier, tire de ses différents travaux, une série de mémoires qu'il présente à l'Académie des Sciences. Celle-ci les accueille avec beaucoup d'éloges et l'élection de Monge comme correspondant de l'abbé Bossut en mai 1772 termine cette première période de sa vie, où il jette les bases de son œuvre mathématique sur lesquelles nous allons revenir un peu plus longuement.

Pour beaucoup de personnes, le principal — parfois l'unique — titre de gloire de Monge est celui de créateur de la géométrie descriptive. Mais, en réalité, si effectivement son rôle dans la fondation de cette nouvelle branche de la géométrie est essentiel, d'une part, il ne doit pas, pour autant, faire oublier les patients efforts de nombreux précurseurs et, d'autre part, il ne constitue qu'un chapitre de l'œuvre de Monge.

Le principe de la géométrie descriptive: représenter un corps de l'espace par les projections orthogonales de ses points sur deux plans orthogonaux entre eux, le second de ceux-ci étant ensuite supposé rabattu sur le premier, est si simple que l'on imagine difficilement qu'il puisse être resté si longtemps ignoré des géomètres et des artistes. Monge, d'ailleurs, loin d'affirmer qu'il fut le créateur de la géométrie descriptive, parlant des rapports entre cette science et la géométrie analytique, écrit: «Dans la Géo-

métrie Descriptive, qui a été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps, par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés; et au lieu de la considération des trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux.¹⁾ Une brève esquisse de l'évolution des procédés de représentation des corps de l'espace utilisés par les peintres et les architectes permettra de mieux situer l'apport exact de Monge qui, en fait, s'il est moins total qu'on ne le croit souvent, est cependant beaucoup plus important qu'il ne l'affirme lui-même.

Les projections orthogonales ont été employées par les architectes et les peintres depuis l'Antiquité, mais aucun des documents anciens parvenus jusqu'à nous ne montre de liaison entre deux projections d'une même figure faites sur deux plans orthogonaux entre eux. Cette liaison, qui caractérise nos épures modernes, apparaît pour la première fois semble-t-il chez Albrecht Dürer qui, dans deux de ses ouvrages,²⁾ donne une série de figures géométriques ou anatomiques représentées suivant des procédés très proches de ceux de notre géométrie descriptive. Ses constructions, comme celle de la section d'un cône circulaire droit par un plan de bout, sont élégantes et exactes, mais il leur manque ce caractère de généralité dans l'exposé qui eût transformé cet ensemble de procédés, conçus plus à l'usage des artistes et des techniciens qu'à celui des géomètres, en la présentation rationnelle d'une nouvelle technique géométrique. Toujours est-il que nous nous trouvons avec Dürer devant une étape décisive dans l'élaboration de la géométrie descriptive. Dans l'état actuel de nos connaissances, il semble que l'originalité des procédés de Dürer soit quasi totale, mais nous ignorons leur genèse.

Il est assez curieux de constater que cet apport si substantiel à la technique de représentation des corps de l'espace soit tombé dans l'oubli malgré le prestige de Dürer et les éditions assez nombreuses de ses œuvres. Les ouvrages d'architecture ou de dessin qui se succèdent au cours des XVI^e, XVII^e et XVIII^e siècles l'ignorent absolument et tentent, de façon plus ou moins rationnelle, d'améliorer les procédés de représentation des figures à trois dimensions connus avant lui. C'est ainsi, en particulier, que, chez Philibert de l'Orme (1567), chez Desargues (1640, 1643), chez Jousse (1642), chez le Père Derand (1643), chez de La Rue (1728) et enfin chez Frézier (1737—39), on aperçoit la lente mise au point de procédés qui se trouvaient déjà beaucoup mieux précisés et compris dans l'œuvre de Dürer. Dans certains de ces ouvrages, on rencontre quelques exemples d'épures de géométrie descriptive, mais ils se trouvent noyés au milieu d'autres types de représentation beaucoup plus compliqués, ce qui montre que les différents auteurs n'en ont pas compris l'intérêt. Ce n'est que chez Frézier que ces épures deviennent plus courantes et que leur principe commence à être explicité. Le souci très net qui y apparaît d'établir les principes du dessin architectural sur des bases géométriques sûres dénote un sérieux progrès sur l'empirisme de ses devanciers mais ne lui permet pas encore ni d'atteindre la pureté et la généralité des méthodes de Dürer

¹⁾ *Géométrie descriptive*, nouvelle (troisième) édition, Paris, 1811, p. 9.

²⁾ *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheit in Linienebenen und gantzen Corporen . . .* (Nürnberg, 1525). — *Hierinn sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion . . .* (Nürnberg, 1528)

ni d'envisager le rôle possible des divers modes de représentation comme auxiliaires de la géométrie pure.

Chez Gaspard Monge, au contraire, les méthodes de la géométrie descriptive se trouvent clairement mises en lumière et justifiées par des raisonnements de géométrie pure; leur importance et leur généralité sont explicitées de façon précise tandis que leurs applications sont développées aussi bien dans le domaine des arts et des techniques que dans celui de la science pure. Malheureusement, l'unique publication de Monge en géométrie descriptive est son célèbre traité dont les diverses éditions, à quelques détails insignifiants près, sont conformes au texte des leçons qu'il fit, au cours des premiers mois de 1795, à l'Ecole Normale fondée par la Convention; aussi est-il très difficile de reconstituer quelles furent ses sources d'inspiration et ses étapes successives dans la conception de cette nouvelle branche de la science et de la technique qui nous apparaît codifiée en corps de doctrine dans la *Géométrie Descriptive*. Les biographes contemporains de Monge en ont situé l'origine, ainsi que nous l'avons signalé, en 1766, lors de la résolution d'un problème de défilement. Mais, sur les développements ultérieurs, aucun renseignement précis n'est connu. Monge, semble-t-il, l'introduisit rapidement dans son cours de mathématiques et réussit à la faire utiliser dans une partie des exercices pratiques de dessin de fortification, de coupe des pierres et de coupe des bois exécutés par les élèves de l'Ecole du Génie. Le fait qu'il reste très peu de documents sur l'enseignement qui fut donné dans cette école par Monge et que celui-ci ne fait dans sa correspondance aucune allusion à la géométrie descriptive empêche de savoir à quel moment cette science se trouva, dans son esprit, constituée en un corps de doctrine cohérent. La rivalité qui existait à cette époque entre les diverses écoles militaires françaises contribue aussi à cette ignorance car elle contraignait les élèves de l'école à garder secrets les cours qu'ils avaient recueillis. Une indication donnée par Lacroix montre que ces cours包含, en particulier, la méthode aujourd'hui classique de construction de l'intersection de deux surfaces de révolution à axes concourants au moyen de sphères auxiliaires centrées à l'intersection des axes. Une analyse rapide de la *Géométrie descriptive* sera donnée ultérieurement avec quelques indications relatives à son influence sur le progrès de la géométrie; pour suivre l'ordre chronologique des découvertes de Monge, il nous faut maintenant revenir à l'étude de ses autres recherches de jeunesse.

Il est assez curieux de noter qu'aucune relation autre qu'une certaine conception d'ensemble de la mathématique ne semble exister entre la découverte de la géométrie descriptive et les autres travaux de Monge à ses débuts car aucun de ces derniers n'est orienté vers la géométrie pure. Pour reconstituer dans la mesure du possible l'enchaînement de ces recherches, il nous sera nécessaire, en l'absence d'œuvres complètes, de tenir compte de lettres et de manuscrits partiellement inédits dont nous devons la communication, pour la plupart, à l'extrême obligeance d'un descendant du grand géomètre: le baron de Chabry. Les textes cités sans références proviennent de cette source.

Une courte lettre de 1768 montre déjà Monge en contact avec des problèmes d'analyse et de géométrie infinitésimale comme celui-ci, inspiré par la lecture de Jean Bernoulli: «Trouvez sur une surface courbe donnée la courbe qu'y tracerait un ruban

infiniment étroit (ou une ligne) pliée dans le sens de son épaisseur *infiniment petite* et continuellement appliquée sur cette surface». A cet énoncé relatif aux géodésiques et dont la forme dénote un esprit foncièrement géométrique, Monge ajoute ces quelques mots qui montrent ce souci d'élégance dans le raisonnement et cet intérêt pour les questions pratiques qui caractériseront toute son œuvre: «Quand vous aurez résolu ce problème, qui d'ailleurs est applicable à la pratique, vous verrez qu'il est fort joli.»

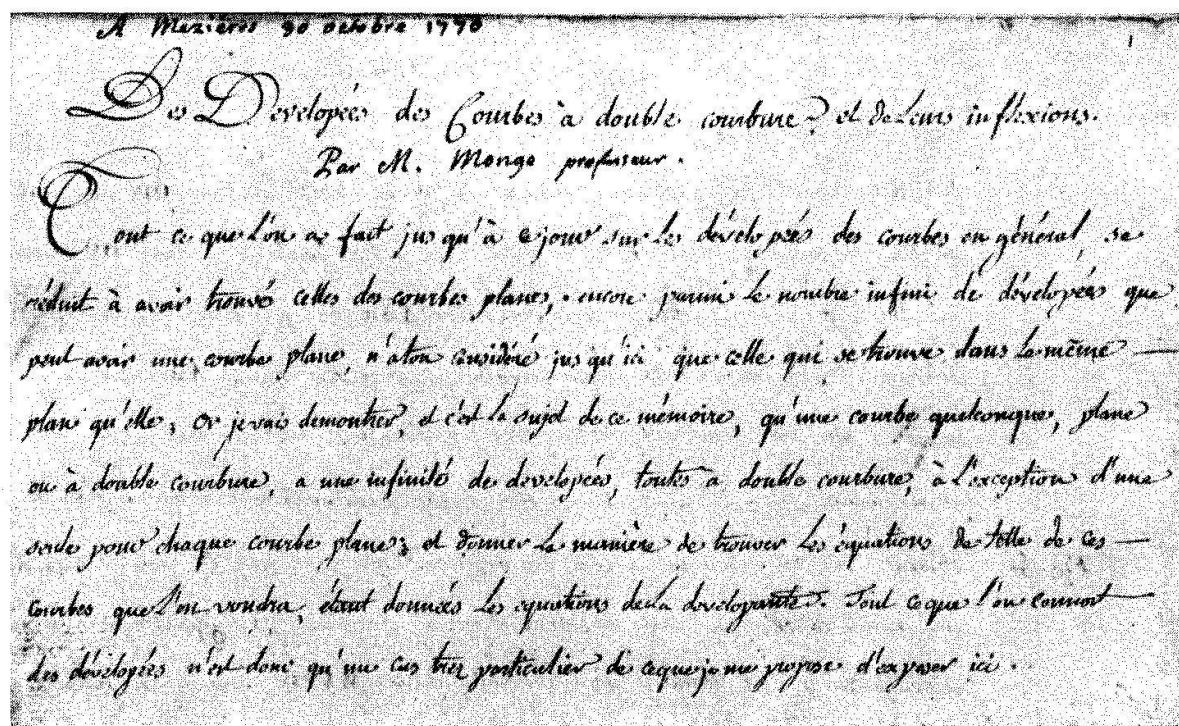
Au début de 1769, il envoie à l'abbé Bossut un premier travail et le présente en ces termes: «En réfléchissant dernièrement sur ce qui arrive à plusieurs surfaces courbes que l'on fait mouvoir les unes sur les autres pour engendrer des épicycloïdes sur toutes sortes de surfaces, je suis parvenu à trouver les développées des courbes à double courbure. J'ai trouvé qu'une courbe, quelle qu'en soit la nature, a une infinité de développées, que leur assemblage forme une surface courbe dont la nature dépend de celle de la courbe proposée; que cette surface étant construite, pour avoir une des développées qui la composent, il n'y avait qu'à mener par un point quelconque de la développante un fil suivant une direction quelconque tangent à cette surface, le plier ensuite librement sur elle, et que la courbe qu'il y formait — qui est, comme l'a fait voir M. J. Bernoulli, la plus courte qu'on puisse mener suivant cette direction sur cette surface — était une des développées. C'est le projet du petit mémoire que je prie M. de Ramsault de vouloir bien vous faire parvenir, et dans lequel je détermine les points d'inflexion des courbes à double courbure...» Ayant ainsi ébauché l'essentiel de ses idées sur ce sujet, il y reviendra à plusieurs reprises pour les mettre au point. Ce travail, terminé le 30 octobre 1770, sera présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 31 août 1771. Mais, malgré un rapport très élogieux de Vandermonde, il ne sera publié qu'en 1785 sous le titre:

*Mémoire sur les développées, les rayons de courbure
et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure*

(Mémoires de math. et de phys. présentés à l'Ac. Roy. des Sc. par divers savans...,
tome X, p. 511—550, 2 planches)

Ce premier mémoire, ayant été très retardé dans son impression, ne suscita pas alors tout l'intérêt qu'il méritait car d'autres mémoires de Monge, postérieurs à celui-ci mais publiés auparavant, en avaient déjà répandu certaines idées parmi les plus importantes. Mais, d'un point de vue historique, il garde toute sa valeur, d'autant plus qu'on y trouve, développés ou en germe, un grand nombre des points de vue nouveaux qui confèrent à l'œuvre de Monge toute sa valeur. Sa caractéristique la plus originale est certainement la manière élégante et harmonieuse avec laquelle des considérations de géométrie pure, d'analyse infinitésimale et de géométrie analytique s'y trouvent mêlées.

Le début du mémoire est entièrement géométrique. Partant des propriétés de l'axe d'un cercle, Monge en déduit la définition de l'axe de courbure, lieu des centres de courbure en un point d'une courbe de l'espace. Puis il considère la surface polaire formée par la réunion des axes de courbure relatifs aux différents points de la courbe



et montre que si cette surface dépend dans sa nature de la courbe choisie, elle possède néanmoins le caractère général de pouvoir être développée sur un plan. Il montre ensuite que cette surface polaire est le lieu géométrique de l'infinité de développées que possède la courbe donnée et l'enveloppe de ses plans normaux. Les centres de courbure proprement dits, projections des divers points de la courbe sur les axes de courbure correspondants, engendrent une courbe qui n'est une développée que dans le cas d'une courbe plane, seul cas étudié jusqu'alors. Puis Monge démontre que l'on obtient une développée en menant par un point quelconque de la courbe donnée une tangente à sa surface polaire et pliant ensuite «librement» cette droite sur la surface, ce qui permet d'établir que toute développée est une géodésique de la surface polaire. Après avoir considéré les cas particuliers des courbes globalement ou localement planes ou sphériques, il montre que toute surface développable peut être considérée comme engendrée par les tangentes à une courbe qu'il dénomme «arête de rebroussement».

Désirant ensuite obtenir, à partir des équations de la courbe donnée, celle d'un plan normal, puis celle de la surface polaire considérée comme enveloppe des plans normaux, celles de l'arête de rebroussement de cette surface et celles d'une développée quelconque, il doit traiter au préalable deux problèmes élémentaires de géométrie analytique: trouver l'équation d'un plan mené par un point donné perpendiculairement à une droite et les équations de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite. Ces quelques pages consacrées dans une forme très moderne à l'établissement de ces formules sont d'une importance historique capitale; elles constituent en effet le passage de la géométrie cartésienne, utilisée jusqu'alors et d'où les éléments du premier ordre étaient exclus, à la géométrie analytique élémentaire moderne. Il suffira, cet exemple ayant montré la très grande utilité de cette introduction analytique des droites et des

plans, de traiter systématiquement et de façon analogue les autres problèmes élémentaires pour obtenir un outil beaucoup plus souple et plus puissant que la géométrie cartésienne. Notons dès maintenant que c'est à Monge lui-même que l'on doit les premiers progrès qui suivront dans cette voie. Une lettre de 1788 le montre très habile dans le maniement de ces nouveaux éléments qu'il exposera pour la première fois dans ses leçons de 1795 à l'Ecole Polytechnique; leur texte publié en 1795 et 1801 dans les *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* sera, avec le concours de Hachette, développé d'une façon mieux ordonnée et beaucoup plus étendue dans son *Application de l'Algèbre à la Géométrie* de 1802. Plusieurs de ses anciens élèves, Biot, Lefrançois, Puissant et Lacroix, entre autres, publieront également à la même époque des cours élémentaires de géométrie analytique qui, inspirés de ses leçons orales, populariseront très rapidement cette nouvelle présentation de l'application de «l'algèbre à la géométrie»; et la géométrie analytique, dont le nom, dû à Lacroix, apparaît pour la première fois dans le titre de la 2^e édition de l'ouvrage de Biot, connaîtra un développement très rapide. Il ne lui manque que l'introduction des coordonnées tangentialles, des déterminants et des éléments vectoriels pour être présentée sous la même forme que dans notre enseignement actuel.

Les dernières pages du mémoire de Monge, consacrées à l'étude des rayons de courbure, à la définition et à la détermination des différents types de points d'infexion et à un bref retour sur les surfaces développables, utilisent à la fois des considérations de géométrie infinitésimale, de géométrie pure et de géométrie analytique.

Cette analyse assez détaillée montre, à la fois, le nombre et l'importance des résultats nouveaux inclus dans ce mémoire et les caractéristiques essentielles du nouvel état d'esprit introduit par Monge dans les recherches mathématiques: vision très claire de la réalité géométrique des figures étudiées et collaboration constante et harmonieuse entre les ressources de l'analyse et celles de la géométrie.

En une année, de mars 1771 à mars 1772, Monge présenta devant l'Académie des Sciences de Paris six mémoires portant sur des sujets de mathématiques assez variés. Le premier d'entre eux est relatif au calcul des variations, le second est celui que nous avons analysé, trois des autres se rapportent à l'étude des équations aux dérivées partielles et le sixième à un problème d'analyse combinatoire.

Le mémoire sur le calcul des variations est resté inédit et le texte en est perdu; néanmoins, grâce aux indications contenues dans une lettre à d'Alembert du 3 janvier 1771¹⁾, dans le rapport de Condorcet et dans une première esquisse retrouvée dans les papiers de Chabry, il est possible d'en reconstituer le thème. Monge y tente d'étendre le calcul des variations, fondé par Euler et Lagrange, aux problèmes relatifs aux surfaces, c'est-à-dire à la recherche des extrêma d'intégrales doubles. Le calcul général qu'il donne est formellement exact; mais il ne pouvait, avec les faibles moyens analytiques de l'époque, se prêter à de nombreuses applications. Monge l'utilise d'ailleurs unique-

1) c. f. *Une correspondance mathématique inédite de Monge* présentée par R. Taton (*La Revue Scientifique*, 1947, pp. 963-989).

ment à la recherche de l'équation aux dérivées partielles des surfaces minima, déjà trouvée par Lagrange et Borda. Le fait qu'aucune allusion à ce calcul des variations ne se trouve dans son œuvre ultérieure montre qu'il semble s'être convaincu que les problèmes qu'il désirait résoudre: équation de la surface générale de moindre résistance, équation de l'aile de moulin à vent donnant le rendement optimum, étaient beaucoup trop compliqués pour pouvoir être abordés valablement à cette époque.

Les trois mémoires relatifs aux équations aux dérivées partielles donnèrent lieu à deux publications dans les mémoires des savants étrangers à l'Académie et à deux autres dans les mémoires de l'Académie de Turin; un souci très vif d'éclairer les problèmes d'analyse par le recours à des images ou à des applications géométriques s'y manifeste. C'est ainsi que pour chacun des types assez nombreux d'équations aux dérivées partielles qu'il étudie, Monge utilise des constructions géométriques pour montrer que les fonctions arbitraires discontinues sont acceptables. Prenant ainsi parti dans la discussion qui oppose plusieurs savants éminents de l'époque, en particulier Euler, d'Alembert et Daniel Bernoulli, il écrit à un de ses amis, dans une lettre du 12 février 1772: «M. d'Alembert n'a jamais voulu admettre l'introduction des fonctions discontinues et je lui avais démontré aussi évidemment qu'aucune proposition d'Euclide que la surface qu'en-gendre une courbe donnée au hasard dans l'espace en tournant autour d'un axe donne toujours: $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.¹⁾ Cette discussion fait l'objet d'un autre mémoire que j'ai lu

moi-même à l'Académie en présence de l'honnête et très estimable homme Mr. d'Alembert au mois de novembre dernier.»

Sans insister sur les contributions à la technique de la résolution des équations aux dérivées partielles incluses dans ces différents mémoires, il est essentiel de noter qu'ils reposent sur le fait, énoncé par Monge dans une lettre du 2 septembre 1771 à Condorcet, que «les surfaces courbes peuvent facilement se diviser en classes qui aient chacune leur équation générale aux différentielles partielles». C'est là une des idées directrices de son œuvre: chaque famille de surfaces se trouvant liée à une équation aux dérivées partielles, l'étude de celle-ci permet d'approfondir les propriétés des surfaces correspondantes, tandis que ces dernières constituent des images géométriques éclairant la résolution et l'étude des équations aux dérivées partielles associées. Cette liaison entre l'étude des équations aux dérivées partielles et la théorie des surfaces, pont solide entre les méthodes analytiques et géométriques, se révélera très féconde, car, ainsi que le note Monge, «les équations aux dérivées partielles jouent dans l'étude des surfaces le même rôle que les équations différentielles dans l'étude des courbes planes».

Le mémoire d'analyse combinatoire relatif à un tour de cartes présente un certain intérêt mais son importance vient surtout de ce qu'il est la seule trace de diverses recherches analogues effectuées par Monge dans ce secteur des mathématiques; ses autres travaux de ce genre, apparemment plus importants, sont perdus.

Après cette période de création très féconde, Monge, devenu correspondant de l'Aca-

¹⁾ L'axe est évidemment supposé ici être oz . La notation des dérivées a été modernisée dans la citation.

démie des Sciences, commence à être connu pour ses talents en mathématiques; malheureusement, son renom reste localisé à Paris car, par suite de longs retards de publication, ses premiers mémoires ne paraîtront qu'en 1776. Entre temps, sa production écrite se ralentit d'ailleurs assez notablement et, en douze années, il ne présenta que trois mémoires mathématiques devant l'Académie.

Le premier de ceux-ci porte sur les fonctions arbitraires entrant dans les intégrales des équations aux différences finies, le second sur les surfaces développables et la théorie des ombres et le troisième sur la théorie mathématique des déblais et des remblais.

Le premier mémoire, qui fait suite aux différentes recherches entreprises par Monge sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, est, comme le remarque Vandermonde, «accompagné comme les précédents de constructions géométriques qui servent à éclairer la marche de l'analyse et qui deviennent le caractère distinctif des travaux de l'auteur en cette matière». Monge s'y propose de démontrer que l'intégrale de toute équation aux différences finies contient des fonctions arbitraires pouvant être continues ou discontinues, en nombre égal à l'ordre de l'équation; il donne aussi un procédé pour déterminer la nature de ces fonctions suivant les conditions du problème et une méthode pour les construire «même quand ces conditions ne sont pas assujetties à la loi de continuité». Mais sur ce problème, Monge avait été devancé par Euler et la seule partie réellement originale de son travail est la construction géométrique des fonctions arbitraires.

Le second mémoire est destiné à compléter et préciser un écrit récent d'Euler: *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet* (St. Pétersbourg 1772), qui présentait la théorie des surfaces développables d'un point de vue analytique. Monge reprend cette même théorie, déjà esquissée dans son mémoire de 1771, par sa méthode personnelle, où les considérations géométriques et analytiques se prêtent un mutuel appui. Il réussit ainsi à établir de façon claire la distinction entre surfaces réglées et surfaces développables. Puis, à l'aide de l'intégrale des surfaces développables obtenue par Euler et des équations aux dérivées partielles correspondantes, il donne des méthodes simples pour juger de la développabilité d'une surface donnée par son équation. L'une de ces méthodes consiste, en particulier, à considérer toute surface développable comme formée par la réunion d'une infinité d'éléments plans de longueur infinie. Il applique ensuite ces résultats à l'étude de la question des ombres et des pénombres en remarquant que ce problème se ramène à l'étude des surfaces développables circonscrites à la fois à la surface lumineuse et à la surface portant ombre. Enfin, il résoud plusieurs importants problèmes relatifs aux surfaces gauches générales; ainsi, la recherche de la surface réglée passant par trois courbes données de l'espace est faite très simplement par des considérations de géométrie descriptive.

Le troisième mémoire, entrepris à l'instigation de Condorcet, est relatif au problème des déblais et des remblais qui, à cette époque où d'importants travaux de fortification étaient entrepris avec des moyens techniques très réduits, tenait une large place dans les cours pratiques des écoles militaires, et spécialement dans ceux de l'école de Mézières. Une certaine masse de terre étant à transporter d'un endroit à un autre, il s'agit de

déterminer les trajets de chaque molécule de telle sorte que le travail total à effectuer soit minimum. Une première rédaction de ce mémoire, présentée en 1776, semble perdue; Monge reprit l'étude de ce problème d'une façon plus ample dans un mémoire de 1781 (*Hist. de l'Ac. Roy. des Sc.* pour l'année 1781, pp., 666—704), mais loin de se confiner dans une étude technique, il profite de ce problème pratique pour écrire une étude de géométrie infinitésimale où les congruences de droites, les lignes de courbure, les normalies et les surfaces focales sont introduites pour la première fois. On voit, sur cet exemple, une des démarches les plus courantes de l'esprit de Monge: partant d'un problème technique, il le schématise et en tire l'énoncé d'une question théorique qu'il examine de façon très générale pour ne revenir parfois que très brièvement sur le problème initial. Ce mémoire sur les déblais et les remblais est d'une importance capitale, non par ses apports à la solution du problème pratique qui lui servit de prétexte, solution à laquelle Dupin et P. Appell¹⁾, entre autres, durent apporter d'importants remaniements, mais surtout par l'introduction des lignes de courbure qui jouent un rôle si important en théorie des surfaces et par la première mention qui y est faite des congruences de droites, dont l'étude, à la suite de Malus et Plücker, a pris une grande ampleur au cours du siècle suivant.

D'après sa correspondance, nous voyons encore que Monge s'est intéressé en 1772 à l'équation des cordes vibrantes, question dont il reprendra plus tard l'étude de façon beaucoup plus ample; qu'à la suite de Vandermonde, il s'est occupé quelque temps de questions se rattachant aux déterminants et qu'en 1776, il s'intéresse beaucoup au célèbre mémoire de Lagrange sur les intégrales singulières. Néanmoins, quand on compare cette période à celle de ses débuts, on ne peut manquer de constater une sérieuse baisse de rendement; celle-ci s'explique d'ailleurs aisément, car il semble qu'assez tôt le goût très vif de Monge pour les mathématiques ait fait place pendant de longues périodes à une préférence marquée pour les recherches de physique. La physique et la chimie étaient à cette époque très goûtées et, sous l'influence de Lavoisier, plusieurs mathématiciens de l'Académie des Sciences de Paris, Vandermonde, Meusnier et Laplace, en particulier, s'intéressèrent, au moins pour quelque temps, à des travaux de physique ou de chimie. Monge, très lié avec Vandermonde et disposant d'un cabinet de physique à l'école de Mézières, ne pouvait manquer de sacrifier au goût du jour d'autant plus que son tempérament le poussait à s'intéresser aux problèmes concrets. Dès 1774, on le voit, à l'occasion d'un voyage effectué dans les Pyrénées, entreprendre, à l'aide du baromètre, de multiples mesures d'altitude. Il avoue lui-même par la suite avoir, pendant de longues périodes, abandonné les mathématiques pour se consacrer uniquement aux recherches physiques. Son rôle dans l'élaboration de la chimie nouvelle et dans le développement de certaines théories physiques, comme celle du calorique, serait d'ailleurs à revoir de façon plus précise, mais ce serait là trop nous écarter du sujet de cette courte monographie. Qu'il nous suffise de citer ces recherches pour expliquer certains longs silences de Monge relativement aux mathématiques. Une autre raison agira d'ailleurs

¹⁾ c. f.: Paul Appell: *Le problème géométrique des déblais et des remblais* (Mém. des Sc. Math., fasc. 27, Paris, 1928).

dans le même sens. En 1777, Monge se maria avec la veuve d'un maître de forges ardennais et, dès lors, s'intéressa à la marche de la petite usine apportée en dot par sa femme et aux problèmes physiques et techniques posés par la métallurgie de l'acier. C'est pourquoi on le voit par la suite visiter à plusieurs reprises d'importantes mines et usines françaises et présenter, en 1786, avec ses amis Vandermonde et Berthollet, un *Mémoire sur le fer considéré dans ses différens états métalliques*. Aussi, quand, sous la Révolution, il prend la direction technique de la fabrication des poudres et des armes, il possède déjà une expérience pratique assez profonde.

Jusqu'en 1780, Monge ne quitta Mézières qu'assez rarement à l'occasion de courts voyages. Sa nomination à l'Académie des Sciences comme adjoint-géomètre au début de 1780 l'oblige, à partir de cette date, à faire chaque année un séjour de six mois à Paris. Il y partage son temps entre les séances et les rapports académiques, les expériences de physique et un cours d'hydrographie dont il vient d'être chargé. A Mézières, son enseignement est évidemment plus condensé et son frère Louis lui sert de suppléant pendant la moitié de l'année où il est absent; mais l'administration de l'école ne se satisfait pas de cette solution et lui crée des ennuis assez graves. En 1783, sa nomination comme examinateur des élèves de la marine en remplacement de Bézout l'oblige à faire des tournées d'inspection dans plusieurs ports de France et à négliger encore plus son enseignement de Mézières. Aussi, l'année suivante, devant les protestations du commandant de l'école, il doit se décider à choisir et il abandonne à la fin de 1784 l'Ecole du Génie où il avait passé vingt de ses plus fécondes années.

Avant d'aborder les périodes ultérieures de sa vie, il est bon de revenir sur l'œuvre de Monge comme professeur à l'école de Mézières. On sait qu'il réussit à faire de la géométrie descriptive la base de l'enseignement pratique de cette école; de plus, il donna aux élèves les plus doués des conseils et des leçons complémentaires sur ses sujets d'étude favoris. Parmi les disciples qu'il forma, Tinseau (1749—1822) et Meusnier (1754—1793) s'intéressèrent à la géométrie infinitésimale; le premier donna en 1772 et 1774 deux mémoires qui, entre autres résultats, contiennent pour la première fois l'équation du plan tangent à une surface; le second, dans son célèbre *Mémoire sur la courbure des surfaces*¹⁾ présente géométriquement et complète les résultats obtenus par Euler dans l'important mémoire qu'il écrivit sur le même sujet en 1760. Lazare Carnot (1753—1823), «l'organisateur de la victoire», qui, par sa *Géométrie de position* (Paris, 1802) et différents autres ouvrages, contribua à la naissance de la géométrie moderne, fut aussi élève de Monge à Mézières. Ainsi, dès ses débuts dans la carrière professorale, grâce à l'originalité de ses conceptions et à ses remarquables dons de professeur, Monge apparaît-il déjà comme un chef d'école.

De 1784 à 1792, la vie de Monge se partage entre des tournées d'inspection et d'examen et des séjours à Paris au cours desquels il assiste aux séances de l'Académie des Sciences et continue ses recherches de mathématiques et de physique. Pendant

¹⁾ Ce mémoire présenté à l'Académie en 1776 fut publié dans le tome X des *Mémoires de Mathématique et de Physique prés. par div. Sav.* Paris, 1785. Sur la vie et l'œuvre de Meusnier on pourra consulter la *Notice historique sur le général Meusnier* par Gaston Darboux (*Eloges académiques et discours*, Paris, 1912).

cette période, sa production mathématique est d'ailleurs assez réduite. Le 23 juillet 1785, il présente un important *Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes* où il développe, sur plusieurs exemples, sa méthode d'étude simultanée d'une équation aux dérivées partielles et de la famille de surfaces correspondante, travail dont il donne une première esquisse dans les *Mémoires de l'Académie de Turin*. Ce mémoire constitue une étape intermédiaire entre ses premières idées sur ce sujet présentées en 1771 et les importants développements inclus dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie*. Deux autres mémoires, l'un de novembre 1785, l'autre de février 1786, traitent de divers problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles. Ils sont très étendus et l'on y trouve au milieu de considérations tout à fait nouvelles — comme la première étude des équations dites de Pfaff et le premier emploi des transformations de contact à la résolution d'équations aux dérivées partielles — quelques maladresses et quelques inadvertances. Ainsi, par exemple, après avoir intégré correctement l'équation différentielle des caractéristiques des surfaces minima, il commet quelques erreurs de raisonnement qui seront corrigées par Legendre en 1787 et par Monge lui-même dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie*.¹⁾ Les exemples choisis montrent son souci constant de concrétiser la marche de l'analyse par des considérations géométriques, mais les quelques erreurs mettent en lumière le danger que présentent les recours à l'intuition en des domaines encore insuffisamment explorés.

En 1786, cédant aux démarches pressantes du ministre de la marine, le maréchal de Castries, qui, depuis déjà de longues années, s'intéressait à sa carrière, Monge rédigea en quelques jours un *Traité élémentaire de statique* à l'usage des élèves de la Marine. Cet ouvrage fut publié en 1788; il comprend 188 pages in-8 et 5 planches. Conçu, paraît-il, suivant un plan donné par Borda, ce petit livre, très clair, eut 8 éditions en français dont les dernières furent revues par Hachette et complétées par une nouvelle démonstration par Cauchy du parallélogramme des forces; il fut traduit en plusieurs langues, en allemand, en anglais et en russe. Dans une lettre du 21 janvier 1787 où Monge annonce au maréchal de Castries l'envoi du manuscrit et des premières épreuves de cette statique, il dit que deux livres analogues, l'un d'arithmétique, l'autre de géométrie, seront prochainement prêts pour l'impression. Or ces ouvrages, premiers éléments d'un cours complet de mathématiques, n'ont jamais paru, Monge ayant, semble-t-il, reculé devant l'effort de rédaction nécessaire et n'ayant pas voulu, en concurrençant le cours de Bézout, priver la veuve de celui-ci de ses revenus. Néanmoins, plusieurs chapitres furent certainement rédigés et leur découverte présenterait un grand intérêt. Pendant les années 1787—1789, Monge fut choisi comme professeur de physique au Lycée, établissement d'enseignement réservé aux nobles de la capitale, mais il se fit remplacer par De Parcieux et n'enseigna pas dans cet établissement.

Au moment où la Révolution française débute, Monge est devenu un des personnages les plus en vue du monde scientifique français. Membre très actif de l'Académie des Sciences, il y est en relations étroites avec Condorcet, Vandermonde, Lagrange, Ber-

¹⁾ Voir à ce sujet: G. Darboux: *Leçons sur la théorie des surfaces*, tome I, pp. 267—280 (Paris, 1887).

thollet et Lavoisier. Comme examinateur des élèves de la Marine, il dirige en fait une partie de ces écoles militaires qui, dans la France de l'Ancien Régime, sont pratiquement les seules à dispenser un enseignement scientifique de quelque valeur. Par sa mission même, il se trouve de plus, dans chaque port qu'il visite, en contact avec une administration qu'il retrouvera sous ses ordres directs quand il deviendra ministre de la marine. Il profite aussi de ses tournées pour visiter les mines de fer, les fonderies et les usines importantes et devient peu à peu un des meilleurs spécialistes des questions se rapportant à la métallurgie; sa compétence dans ce domaine se trouvera pleinement utilisée par la Révolution.

Celle-ci, dès ses débuts, trouve en Monge un partisan très actif qui applaudit sans réserve à toutes ses conquêtes. Mais jusqu'en août 1792, le rôle politique de Monge restera assez discret; membre de plusieurs sociétés et clubs révolutionnaires, il continue ses tournées d'examinateur de la marine et appartient à la seconde commission de l'Académie des Sciences nommée pour préparer les bases scientifiques de la réforme des poids et mesures décidée par l'Assemblée Constituante, réforme qui aboutira à l'établissement du système métrique.

Après la chute de la royauté le 10 août 1792, un nouveau ministère est formé pour mener sur le plan intérieur et sur le plan extérieur la lutte très dure qu'imposent à la jeune république les tenants de l'ancien régime. Monge, désigné par l'Assemblée Législative, accepte le poste de ministre de la marine qu'il conservera pendant huit mois. Sans être particulièrement remarquable, son œuvre de ministre témoigne du désir le plus vif de coordonner toutes les énergies et toutes les activités françaises en vue d'assurer la vie et l'indépendance de la nation. Cependant, sa politique est jugée trop modérée par certains et, attaqué de divers côtés, fatigué par la lutte incessante qu'il doit soutenir, Monge démissionne le 10 avril 1793. «J'offre à la République, dit-il, tous mes services; je serai le premier commis dans un de mes bureaux, si elle le veut; mais je ne puis plus continuer le ministère. Je demande un successeur.»

Son rôle politique devient alors plus effacé; s'il occupe encore plusieurs postes importants au club des Jacobins, cependant son activité passée est à plusieurs reprises l'objet de critiques très dures. Mais il y résiste sans peine car, à la demande du comité de salut public, il a accepté entre temps un rôle essentiel dans la défense du territoire national: l'organisation et la coordination des usines destinées à produire les armes et les munitions nécessaires aux armées. Sous l'impulsion du comité de salut public et spécialement de Lazare Carnot, les efforts se groupaient en vue d'une résistance à outrance; en particulier, il fallait livrer aux armées des armes et des munitions et, dans cette tâche, l'effort à fournir était immense: des usines étaient à créer, des procédés nouveaux destinés à pallier l'absence de nombreuses matières premières étaient à mettre au point et il fallait porter les fabrications à un niveau tel que les bataillons de volontaires pussent être rapidement équipés et armés. Dans toute cette œuvre, Monge, aidé de nombreux autres savants tels que Berthollet, Chaptal, Fourcroy et Guyton de Morveau, joua un rôle de premier plan. Il réussit à organiser sur des bases nouvelles la fabrication des aciers et des armes et à développer la fabrication des poudres. Il rédigea deux

ouvrages destinés à la formation des ouvriers et des techniciens: *Avis aux ouvriers en fer sur la fabrication de l'acier puddlé* (1793) et *Description de l'art de fabriquer les canons* (1794) et participa aux «cours révolutionnaires» sur «la fabrication des salpêtres, des poudres et des canons» organisés en 1794. Ainsi, grâce à sa formation technique très poussée, Monge put-il, aux côtés de Carnot, contribuer activement à la défense de «la patrie en danger».

Mais, alors que la guerre se déroulait sur le sol même de la France, la Convention poursuivant les projets présentés par Talleyrand et Condorcet dans les premières années de la révolution, abordait une réforme complète de l'enseignement. Consciente de la nécessité d'un enseignement supérieur théorique et pratique de haute valeur, elle créait, au début de 1795, l'Ecole Normale et l'Ecole Centrale des travaux publics.

Monge joua un grand rôle dans cette œuvre, tant du point de vue de l'organisation que de l'enseignement. L'Ecole Normale, destinée à la préparation des futurs professeurs d'enseignement secondaire, n'eut qu'une existence éphémère. 1200 élèves d'origines très diverses y suivirent de janvier à mai 1795 des leçons faites par les savants les plus éminents. Tandis que Lagrange et Laplace enseignaient les mathématiques, Monge fit pour la première fois un cours public de géométrie descriptive. Ses leçons, recueillies par des sténographes, furent, ainsi que celles des autres professeurs, publiées au fur et à mesure dans le *Journal des Séances des Ecoles Normales*; elles constituent en fait la première édition de sa *Géométrie descriptive*. La seconde édition fut publiée en volume séparé par Hachette, en 1799, alors que Monge se trouvait en Egypte. Elle est, ainsi d'ailleurs que toutes les éditions qui suivirent, presque exactement conforme au texte des leçons de l'Ecole Normale. Ce fait explique certaines particularités de l'ouvrage, parfois plus proche d'un cours oral que d'un traité classique: le préambule, en particulier, est le texte du discours prononcé par Monge à la séance inaugurale de l'Ecole Normale devant une délégation de la Convention. Hachette ajouta à la 3^e édition (1811) un important fascicule de compléments; ceux-ci doivent être en grande partie attribués à Monge qui, indifférent aux questions de priorité, préférerait les faire rédiger par un de ses disciples que les écrire lui-même. Ses dernières leçons à l'Ecole Normale, relatives à la théorie des ombres et à la perspective, ne furent publiées qu'en 1820, après sa mort, par un de ses anciens élèves, Brisson, qui suivit pour cela leur sténographie restée inutilisée pendant 25 ans.

Le cours de Monge à l'Ecole Normale connut un grand succès et, très rapidement, la géométrie descriptive entra dans les programmes de l'enseignement scientifique, en France d'abord, où l'Ecole centrale des travaux publics, devenue Ecole Polytechnique, lui fit une place très importante dans son enseignement, puis bientôt dans les divers pays d'Europe où elle se répandit grâce au prestige dont l'Ecole Polytechnique bénéficia très rapidement. Parmi les premiers traités qui en furent publiés, un seul ne se réclame pas de l'influence de Monge: c'est les *Essais de géométrie sur les plans et sur les surfaces courbes (ou Elémens de géométrie descriptive)* de S. F. Lacroix, dont la première édition fut publiée en 1795. Mais on ne peut croire que Lacroix ait découvert les principes de la géométrie descriptive indépendamment de Monge; en effet, après

avoir suivi en 1780 des cours particuliers de Monge, il entretint avec lui une longue correspondance où des problèmes de géométrie descriptive furent étudiés; par ailleurs il obtint des renseignements d'anciens élèves de Mézières et fut adjoint de Monge aux cours de l'Ecole Normale. Tout ce que l'on peut admettre, c'est que Lacroix utilisa sa connaissance des grandes lignes des méthodes de Monge pour rédiger son traité qui d'ailleurs est excellent. Mais justement, l'apport foncièrement original dans cette création ne réside pas dans le détail de la présentation ou des constructions mais dans la prise de conscience du rôle dévolu à la géométrie descriptive et dans la conception de ses méthodes générales; or c'est incontestablement Monge qui comprit le premier l'importance théorique et pratique de cette représentation plane des corps de l'espace et qui créa l'essentiel de ses méthodes. Les diverses ressources de son esprit si riche, séduit tantôt par l'élégance et l'importance d'un raisonnement géométrique ou la généralité d'une méthode, tantôt par la commodité d'une construction ou par des applications susceptibles de rendre de grands services aux artistes et aux techniciens, furent tour à tour mises à contribution dans la création de cette nouvelle discipline destinée à être à la fois un instrument de recherche géométrique et une technique utilitaire.

«Cet art, dit Monge, a deux objets principaux.

Le premier est de représenter avec exactitude, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois et qui sont susceptibles de définition rigoureuse.

Sous ce point de vue, c'est une langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution, et enfin aux artistes qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties.

Le second objet de la Géométrie descriptive est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives. Dans ce sens, c'est un moyen de rechercher la vérité; elle offre des exemples perpétuels du passage du connu à l'inconnu. »¹⁾ Le traité lui-même est d'ailleurs une réussite remarquable. Montrant d'abord l'intérêt de la géométrie descriptive, Monge expose ensuite la plupart des méthodes, qui aujourd'hui encore sont les fondements de notre enseignement élémentaire, en les utilisant à la résolution de nombreux problèmes de géométrie pure et en montrant la grande variété de leurs applications.

Au point de vue mathématique, il réhabilita les considérations de géométrie pure que le grand succès de la géométrie cartésienne avait plus ou moins fait abandonner; en particulier, il familiarisa ses disciples avec cette vision concrète des éléments de l'espace dont il possédait le don à un degré tel qu'il savait rendre les figures de l'espace quasi palpables à ses élèves, émerveillés d'une telle habileté. De plus, l'emploi constant des projections amena peu à peu à distinguer entre propriétés projectives, propriétés affines et propriétés métriques et prépara ainsi l'avènement de la géométrie moderne et de la géométrie projective. Ces branches nouvelles de la géométrie dont la première étude systématique sera faite dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet (Paris, 1822) et qui connaîtront un développement rapide au cours du XIX^e siècle trouvent

¹⁾ *Géométrie descriptive*, 3e éd., Paris, 1811, p. VIII.

dans l'œuvre et dans l'enseignement de Monge leur origine profonde. Il suffira à ses anciens élèves et à ses disciples de préciser et de formuler certaines idées plus ou moins explicitement incluses dans son œuvre pour en créer les fondements. Ainsi, le célèbre principe de continuité de Poncelet qui, malgré les critiques très dures de Cauchy, montra sa grande fécondité et fut définitivement éclairci par H. Schubert en 1879, se trouve déjà, sinon explicité, du moins utilisé dans la *Géométrie descriptive*: par exemple dans le passage où Monge étudie les propriétés des droites réciproques par rapport à une sphère ou à une quadrique quelconque. Ce principe consiste en somme à étendre une propriété démontrée sur une figure déterminée au cas où, les autres conditions demeurant identiques, certains éléments deviennent imaginaires, comme, par exemple, de déduire les propriétés générales de l'axe radical de deux cercles des propriétés démontrées dans le cas de deux cercles sécants. Notons aussi que ce sont certaines propriétés énoncées dans la *Géométrie descriptive*, concurremment d'ailleurs avec les cours de Monge à l'Ecole Polytechnique et les ouvrages de Carnot, qui ont inspiré Brianchon et Livet dans leur premier emploi de la transformation par polaires réciproques. Il faut signaler à ce propos que cette transformation, ou du moins son cas particulier connu sous le nom de transformation de Legendre, se trouve employée d'une façon très élégante, à la fois géométrique et analytique, dans un passage inédit du cours fait par Monge en 1806 à l'Ecole Polytechnique.¹⁾ L'emploi simultané des méthodes géométriques et analytiques que l'on y rencontre, comme dans la plupart des autres travaux de Monge, se trouve d'ailleurs recommandé de façon instante dans ce passage de la *Géométrie descriptive*: «... de même qu'en Analyse, lorsqu'un problème est mis en équations, il existe des procédés pour traiter ces équations et pour en déduire les valeurs de chaque inconnue; de même aussi, dans la Géométrie descriptive, lorsque les projections sont faites, il existe des méthodes générales pour construire tout ce qui résulte de la forme et de la position respective des corps.

Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la Géométrie descriptive à l'Algèbre; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de Géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en Analyse; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en Géométrie.

Il serait à désirer que ces deux sciences fussent cultivées ensemble: la Géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère et, à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre.»²⁾

Le traité de *Géométrie descriptive* comporte de nombreux développements qui se rattachent à la théorie des surfaces et qui sont destinés à familiariser avec l'emploi, dans ce domaine, de méthodes où l'intuition des éléments de l'espace remplace l'automatisme des déductions analytiques.

¹⁾ Ce passage est cité dans l'article *La préhistoire de l'analyse géométrique* (Archives internationales d'histoire des sciences, no. 10, janv. 1950, pp. 89—102).

²⁾ *Géométrie descriptive*, 3e éd., Paris, 1811, p. 16.

Du point de vue des applications pratiques, ce traité systématise les procédés graphiques utilisés jusqu'alors en architecture et dans les divers autres arts et techniques et montre comment cette méthode simple de représentation peut être d'une grande commodité aussi bien pour les architectes, constructeurs et artistes que pour les géomètres. Le remarquable sens pratique de Monge se voit en particulier dans l'application qu'il fait de la théorie des lignes de courbure à la taille des différentes pierres destinées à former une voûte et à la représentation de la courbure et du modelé des surfaces dans les gravures.

La fondation et l'organisation initiale de l'Ecole Polytechnique (dénommée pendant quelques mois Ecole Centrale des travaux publics) doivent beaucoup à l'action personnelle de Monge et à l'influence qu'il eut sur les commissions chargées de préparer la création de cette école. Ses profondes connaissances scientifiques et techniques, sa longue expérience de professeur dans une des meilleures écoles de l'ancien régime lui permirent de conseiller les organisateurs et les administrateurs successifs avec beaucoup de compétence. Le but assigné à l'école était d'inculquer une solide culture scientifique et technique à des jeunes gens choisis par concours et de former ainsi une élite d'ingénieurs de haute valeur destinés à constituer les cadres techniques de la nation. Monge s'efforça d'introduire et de maintenir dans les programmes d'enseignement un judicieux équilibre entre les enseignements théorique et pratique; dans les programmes initiaux, la géométrie descriptive et les diverses applications techniques occupèrent près de la moitié de l'horaire. Jusqu'à sa retraite définitive, en 1810, Monge se dévoua envers cette Ecole Polytechnique qu'il pouvait à juste titre considérer comme étant en grande partie sa création personnelle. Très aimé des élèves, il les encourageait sans cesse de ses conseils et même de son aide matérielle et défendait de son mieux les droits qui leur avaient été accordés à l'origine et les traditions de libéralisme de l'école contre les attaques des régimes successifs; c'est ainsi qu'il fut hostile au régime de militarisation que Napoléon imposa à l'école en 1804. Cette nouvelle organisation contrastait avec le climat de liberté que l'école avait connu à ses débuts, mais elle ne détruisit pas le prestige que sa réussite lui avait conféré et de nombreux pays d'Europe créèrent des écoles similaires, premières réalisations d'enseignement technique supérieur moderne.

La durée des études à l'Ecole Polytechnique ayant été fixée à trois ans, on décida de donner aux jeunes gens reçus au premier concours d'entrée une formation accélérée permettant, au bout de trois mois, de les répartir suivant leurs aptitudes en trois classes distinctes. De plus, les 45 meilleurs d'entre eux furent choisis, sous le nom de chefs de brigades, pour aider leurs condisciples dans leurs études et leurs travaux et ils reçurent dans ce but une formation préparatoire plus poussée. Monge contribua activement à l'organisation de ces premiers cours. Alors même qu'il enseignait la géométrie descriptive à l'Ecole Normale, il participait au fonctionnement de l'école préparatoire et rédigeait des leçons d'analyse appliquée à la Géométrie, destinées à servir de guide aussi bien aux futurs chefs de brigades qu'aux élèves ordinaires dont les cours normaux commencèrent le 24 mai 1795. Ses leçons, imprimées une à une en feuillets in-folio, furent réunies pour l'enseignement de l'école sous le nom de *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*.

Les 9 premières feuilles constituent un exposé des principes élémentaires de la géométrie analytique, développement des méthodes nouvelles introduites en 1771; on y trouve le premier emploi des coordonnées de la droite, dites «de Plücker». Les 20 autres feuilles traitent de la théorie des surfaces; la première est une étude des plans tangents et des normales aux surfaces, les autres sont des monographies consacrées à divers types de surfaces définies par un même mode de description et correspondant à une même équation aux dérivées partielles: cylindres, cônes, surfaces de révolution, conoïdes, surfaces canaux, etc. L'étude des surfaces cylindriques y est faite à partir de l'équation aux dérivées partielles obtenue en écrivant que le plan tangent reste parallèle à une droite fixe et de l'équation en termes finis obtenue en écrivant que les génératrices ont une direction fixe. Les équations générales d'une droite étant: $x = az + a$; $y = bz + \beta$, a et b sont ici constants, α et β variant d'une génératrice à l'autre. Si l'on considère une famille à un paramètre de telles droites, α et β varieront simultanément de telle sorte que l'on peut écrire: $\beta = \varphi(\alpha)$ ou $(y - bz) = \varphi(x - az)$, φ n'étant pas nécessairement analytique (ou, suivant le langage de l'époque, «n'étant pas soumis à la loi de continuité»). La recherche d'une surface cylindrique, de direction de génératrices donnée, passant par une courbe arbitraire ou tangente à une surface arbitraire, termine le chapitre. Les autres études de familles de surfaces sont faites dans un esprit analogue.

Un chapitre traite de la recherche de l'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre. Leur équation générale est mise sous la forme $F(x, y, z, \alpha) = 0$ et Monge remarque que l'intersection d'une surface avec la surface infiniment voisine correspond à sa ligne de contact avec la surface enveloppe. Cette courbe qu'il désigne du nom de «caractéristique» est le lieu des points de la première surface pour lesquels x, y et z ne varient pas quand α devient $\alpha + d\alpha$: elle correspond donc au système $F(x, y, z, \alpha) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. De même les caractéristiques auront en général une enveloppe dont les

points satisferont aux trois équations: $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0$. Entre autres exemples, Monge traite des surfaces développables, enveloppes de familles de plans à un paramètre; les caractéristiques sont ici les génératrices et leur enveloppe est l'arête de rebroussement. Monge étudie ensuite la courbure d'une surface, ses lignes de courbures et recherche les types de surfaces où ces éléments possèdent des propriétés simples; l'étude qu'il fait des lignes de courbure de l'ellipsoïde est particulièrement élégante. Il revient enfin aux surfaces réglées et aux enveloppes de familles de sphères à un paramètre.

Dans toutes ces études les considérations géométriques jouent un rôle essentiel, étayant de façon très souple les diverses transformations analytiques. Les familles de surfaces étudiées sont groupées d'après l'ordre croissant de leurs équations aux dérivées partielles.

En thermidor an 9 (juillet-août 1800) paraît une nouvelle édition sous forme d'ouvrage in-4 comportant en plus du texte de l'édition de 1795 un chapitre sur les développées et les rayons de courbure très proche du mémoire de 1771.

Une 3^e édition parut en 1807 avec, comme première partie, l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie* publiée par Monge et Hachette en 1802 et, comme seconde partie, le texte de 1801 diminué des chapitres de géométrie analytique et augmenté de l'étude des surfaces dont les normales sont tangentes à une sphère, un cône ou une surface développable et d'une longue et très intéressante étude sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans la 4^e édition (1809) la partie de géométrie analytique disparut mais un chapitre sur la construction de l'équation des cordes vibrantes fut ajouté. Ce texte fut repris dans la 5^e édition publiée en 1850 par Liouville qui y ajouta différents mémoires plus récents, dont le texte des célèbres *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss. La seule édition plus récente est la traduction russe enrichie d'importants commentaires publiée à Moscou en 1936 par M. J. Vougodskij. Ce traité qui, pour la plus grande part, n'est que la réunion et le développement de résultats obtenus en des mémoires antérieurs eut néanmoins une influence considérable sur le progrès de la géométrie infinitésimale, concurremment d'ailleurs avec le cours oral de l'Ecole Polytechnique qui, d'après les quelques extraits retrouvés, paraît plus développé. Lancret et Dupin en particulier en ont tiré très vite des conséquences de la plus haute importance et, avec le mémoire de Gauss déjà cité (Göttingen, 1827), il continua à inspirer les géomètres pendant toute la première partie du XIX^e siècle et même jusqu'à Darboux. C'est essentiellement grâce à cet ouvrage que l'influence de Monge se fit sentir dans cette branche des mathématiques dont il a été l'un des principaux créateurs.

Plusieurs professeurs, dont Hachette, furent chargés d'enseigner la géométrie descriptive à l'Ecole Polytechnique; ils le firent en développant les leçons de Monge à l'Ecole normale et en les augmentant de divers compléments relatifs en particulier à la théorie des machines dont Monge avait donné un plan détaillé. Lui-même fut chargé d'enseigner l'application de l'analyse à la géométrie et, grâce à son remarquable talent de professeur, son cours obtint un succès exceptionnel. Monge savait clarifier tous les problèmes par de continuels recours aux images géométriques et quoiqu'il dessinât très bien, «la chaleur de ses gestes et la mimique expressive des mains» suffisaient le plus souvent à éclairer son auditoire. Il communiqua son enthousiasme à de nombreux élèves qui, devenus ses disciples, continuèrent à recevoir ses conseils éclairés. C'est pourquoi, en France d'abord, puis en d'autres pays, toutes les voies nouvelles qu'il avait ouvertes furent cultivées par une pléiade de géomètres de talent qui, en quelques décades, les développèrent de façon remarquable. Lacroix, Hachette, Lancret, Brianchon, Livet, Biot, Dupin, Lamé, Poncelet, Chasles, et beaucoup d'autres, furent les disciples et les continuateurs de celui que le grand géomètre J. L. Coolidge appelle «the prince of teachers».

En dehors d'une période de deux mois au cours de laquelle il dut se cacher pour échapper à la réaction thermidorienne, Monge enseigna à l'Ecole Polytechnique de décembre 1794 au 20 mai 1796. Il fit ensuite partie de la mission envoyée en Italie pour choisir les objets d'art et les manuscrits que les traités de paix accordaient à la France. Au cours de ce séjour qui se prolongea jusqu'au 25 octobre 1797, il fit la connaissance du général Bonaparte auquel une amitié très vive l'unit bientôt. Bonaparte le chargea

avec le général Berthier de porter le texte du traité de Campo Formio à Paris où les deux envoyés furent reçus solennellement par le Directoire. Monge dut accepter le poste de directeur de l'Ecole Polytechnique mais quelques mois plus tard il repartait pour l'Italie avec la mission d'établir sur des bases stables la république romaine. Pendant ce temps Bonaparte, préparant l'expédition d'Egypte, insistait pour que Monge acceptât de faire partie de la mission scientifique qu'il voulait y joindre et le 26 mai, Monge s'embarqua à Civita Vecchia pour rejoindre l'escadre de Bonaparte. En Egypte, il fut un des confidents du général en chef qu'il accompagna en particulier dans l'expédition de Syrie. Bonaparte le nomma président de l'Institut d'Egypte; Monge y déploya une très grande activité, s'intéressant à la fois aux mathématiques, à la théorie du mirage, à la géologie, aux expéditions militaires et aux plans de modernisation et de développement de l'Egypte, en particulier aux projets de restauration du canal de Suez. Quand Bonaparte repartit pour la France, laissant son armée isolée et partiellement désorganisée, Monge et son ami Berthollet l'accompagnèrent; ils arrivèrent à Paris le 14 octobre 1799. Monge dès lors demeura parmi les amis intimes de Bonaparte; tout en conservant une partie de ses convictions républicaines il crut pouvoir accepter le 18 Brumaire et l'établissement de l'Empire. Ayant, peu après son retour d'Egypte, abandonné la direction de l'Ecole Polytechnique pour ne conserver que son poste d'enseignement, il fut nommé sénateur le 24 décembre 1799. Doté plus tard de la sénatorerie de Liège, il dut y faire d'assez longs séjours pour remplir des tâches administratives très variées. En 1804, il fut nommé grand officier de la Légion d'honneur, en 1806 président du Sénat pour un an; enfin en 1808, l'empereur lui donna le titre de Comte de Péluse. Malgré un travail administratif assez lourd, il continua à publier de temps en temps dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique* ou dans la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* des mémoires destinés à compléter son grand traité d'*Application de l'Analyse à la Géométrie* ou à éclaircir divers points de géométrie, de géométrie analytique ou de théorie des surfaces. La géométrie descriptive est la seule partie de son œuvre sur laquelle il ne revint jamais directement.

Peu à peu ses facultés intellectuelles devinrent moins brillantes et en 1809, fatigué intellectuellement et physiquement, il dut abandonner sa chaire de l'Ecole Polytechnique. Toujours très lié avec l'empereur, il souffrit beaucoup de ses premiers revers. A la fin de 1813, il alla dans sa sénatorerie de Liège pour tenter d'y renforcer la lutte contre les armées d'invasion; l'échec de sa mission, la défaite militaire et l'abdication de l'empereur l'attristèrent beaucoup. Pendant la première Restauration, il disparut de la vie publique pour réapparaître au retour de l'Empereur; au cours des Cent jours, il fut nommé pair de France, mais la nouvelle défaite et l'abdication de l'empereur l'atteignirent très profondément. Ses dernières années furent attristées par différentes mesures prises contre lui par les autorités, en particulier par son exclusion de l'Institut lors de la réorganisation du 21 mars 1816. Il mourut à Paris le 21 mars 1818; les élèves de l'Ecole polytechnique n'ayant pas été autorisés à assister à ses obsèques profitèrent de leur premier jour de sortie pour se rendre sur sa tombe. Ce geste réparait dans une certaine mesure l'hostilité des pouvoirs publics qui, ignorant le grand savant, ne vou-

laient voir en Monge qu'un de ceux qui avaient approuvé la mort de Louis XVI. Un autre témoignage de gratitude est cité à la fin du livre de Dupin: des anciens élèves de l'Ecole Polytechnique résidant à Douai prirent l'initiative d'une souscription pour élever un monument sur la tombe de Monge. «Tous se souviendront que ce savant célèbre, disent-ils dans leur appel, non content de sacrifier son temps à l'instruction de ses élèves, abandonnait chaque année son traitement pour payer la pension de ceux qui se trouvaient sans fortune; que dans les hauts emplois dont il fut investi, il mit toujours au rang de ses plus glorieux titres celui de professeur et de créateur de l'Ecole». Ainsi l'esprit de rancune de la Restauration ne réussit-il pas à détruire la gloire de Monge dans l'esprit de ses anciens élèves et de tous ceux qui avaient pu juger des qualités de son intelligence et de son esprit.

RENÉ TATON, Paris.

B I B L I O G R A P H I E

1. Œuvres de Monge.

- *Géométrie Descriptive*, Nouvelle (3^e éd.), Paris, 1811; 4^e éd., Paris, 1820.
- *Traité élémentaire de Statique*, 5^e éd., revue par Hachette, Paris, 1810.
- *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 4^e éd., Paris, 1809; 5^e éd., Paris, 1850.
- *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, 1805.

Nombreux mémoires dispersés dans les recueils suivants: *Mém. de l'Ac. de Turin* [1^e s., t. 5 (1770-3) et 2^e s., t. 2 (1784-5)]; *Mém. de math. et de phys. prés. par div. sav.* [du t. 7 (1776) au t. 10 (1785)]; *Hist. de l'Ac. Roy. des Sc.* (de Paris) (de 1781 à 1787); *Journ. de l'Ec. Polyt.* [du 1^{er} cahier (mars 1795) au XV^e (déc. 1809)]; *Corresp. sur l'Ec. Polyt.* (de juil. 1805 à janv. 1816); *Annales de Chimie* [du t. 3 (1789) au t. 22 (1800)]; *Descr. de l'Egypte* (t. 1); *Décade égypt.* (t. 1 à 3).

2. Ouvrages de référence.

- Ch. Dupin*: *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, Paris, 1819.
- F. Arago*: *Œuvres complètes*, t. II., Paris, 1865. pp. 426-592 (Gaspard Monge).
- M. Cantor*: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Bd. IV, Leipzig, 1908.
- G. Loria*: *Storia della geometria descrittiva...* Milano, 1921.
- F. Klein*: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Bd. I, Berlin, Springer, 1926.
- L. de Launay*: *Un grand Français, Monge, fondateur de l'Ecole Polytechnique*, Paris, 1933.
- J. L. Coolidge*: *A History of Geometrical Methods*. Oxford, 1940.
- R. Taton*: *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge* (à paraître fin 1950).