

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6/7 (1949)

**Artikel:** Johann und Jakob Bernoulli  
**Autor:** Fleckenstein, J.O.  
**Kapitel:** 3: Johann als Nachfolger von Jakob Bernoulli  
**Autor:** Fleckenstein, J. O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-4707>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

zweier entgegengesetzter Ereignisse  $A$  und  $B$  ( $p + q = 1$ ), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis  $A$  in einer sehr großen Zahl  $\mu$  von Versuchen in einer zwischen  $\mu p + \lambda$  und  $\mu p - \lambda$  liegenden Anzahl  $m$  von Malen eintritt:

$$W = \sum_{\varrho = \mu p - \lambda}^{\varrho = \mu p + \lambda} \frac{\mu!}{\varrho! (\mu - \varrho)!} p^\varrho q^{\mu - \varrho}.$$

Anders gesagt:  $W$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abweichung des Quotienten  $m/\mu$  vom Erwartungswert  $p$ , nämlich  $(m/\mu) - p$ , zwischen  $-\lambda/\mu$  und  $\lambda/\mu$  enthalten ist. Für  $\mu \rightarrow \infty$  geht diese Wahrscheinlichkeit  $W$  in Eins über.

JAKOB hat zwar die Formel für  $W$  nicht explizite hingeschrieben, sie kann aber aus seinem Beweis sofort herausgeholt werden. Diesen Summenausdruck haben nun sowohl DE MOIVRE als LAPLACE zum Ausgangspunkt genommen und durch entsprechende analytische Transformationen in die Form des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi \mu p q}} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi \mu p q}}$$

gebracht, welches heute als das Fehlerintegral der Gaußschen Glockenkurve der Statistik zugrunde liegt.

### 3. Johann als Nachfolger von Jakob Bernoulli

JAKOB BERNOULLI starb gerade in dem Moment, als sich JOHANN, dem Drängen des Schwiegersvaters folgend, mit seiner Familie nach Basel begab. Er schied sehr ungern von Holland; als ihm noch während der Heimreise eine vorteilhafte mathematische Professur in Utrecht angeboten wurde, schwankte er, ob er sie annehmen solle oder nicht. Bei seiner Ankunft in Basel erhielt er aber den Besuch des gesamten akademischen Senats, der ihn bat, den durch den Tod JAKOBS freigewordenen Lehrstuhl für Mathematik zu übernehmen. Am 17. November trat JOHANN die Nachfolgeschaft des Bruders an. Kein geeigneterer Verwalter und Förderer des Jakobschen Erbes als JOHANN konnte gefunden werden! Nachdem der mehr introvertierte JAKOB die Grundlagen der Infinitesimalrechnung geschaffen hatte, brachte der mehr extravertierte JOHANN durch den Glanz seines Namens und seine literarische Fruchtbarkeit den neuen Kalkül in der wissenschaftlichen Welt zur Geltung. Die Leidenschaft, mit der er sich dieser Aufgabe widmete, mußte ihn geradezu notwendig in die Rolle des *Praeceptor mathematicus Europae* hineindrängen.

Quantitativ nehmen die Abhandlungen JOHANNS während seiner Basler Professur, die er bis zu seinem Tode 1748 inne hatte, fast Dreiviertel des Gesamtwerkes ein. Wenn man den Maßstab des reinen Mathematikers an diese Abhandlungen legt, so bleiben sie qualitativ wohl etwas gegenüber den Arbeiten aus der Jugend- und Großer Zeit zurück. Denn es sind vornehmlich Probleme der angewandten Mathematik, speziell der Mechanik, denen er sich seit etwa 1710 widmete. Für die Geschichte der Mechanik sind seine Arbeiten aber nicht hoch genug anzuschlagen. In der mehr «pädagogisch» gerichteten Basler Zeit begann er, allmählich sich mit der Arbeitsrichtung seines Freundes und langjährigen Korrespondenten VARIGNON zu be-

röhren. Der Pariser Akademiker hatte angefangen, die Ableitungen in den *Principia mathematica philosophiae naturalis* von NEWTON in die Sprache der neuen Analysis zu übersetzen und sich infolgedessen mit der analytischen Theorie der Zentralkräfte eingehend beschäftigt. JOHANN, durch die häufigen Anfragen VARIGNONS über den Verlauf dieser Untersuchungen unterrichtet, begann schließlich selber, sich in diese Theorie zu vertiefen und fand bald eine Reihe von Versehen in NEWTONS *Principia*, der Bibel der neuen Physik.

NEWTON hatte in seinem Theorem XI/XIII, Liber I, Sect. III, nur bewiesen, daß aus den Keplerschen Gesetzen und der Huygensschen Formel für die Zentralkraft notwendig das Gravitationsgesetz  $m_1 m_2 / r^2$  folgt. JOHANN bemerkte dagegen, daß die Umkehrung dieses Satzes, daß aus dem Zentralkraftgesetz  $\varphi(r) = 1/r^2$  nur Kegelschnitte als Bahnkurven folgen, eines besonderen Beweises bedürftig sei. Deshalb leitet JOHANN in der Arbeit *Extrait de la Reponse de Mr. Bernoulli à Mr. Herman* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1710) aus dem Kraftgesetz mit Hilfe des Flächensatzes

$$r^2 d\vartheta = x dy - y dx = 2 dF = c dt$$

und des Energieintegrals

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2 \int \varphi dv + 2h = 2(U+h)$$

das Integral

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \vartheta(u) = \int \frac{c du}{\sqrt{2(U+h) - u^2 c^2}}$$

für die gesuchte Bahnkurve her, wie es seither in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik üblich geworden ist.

JOHANN bleibt aber hierbei nicht stehen, sondern untersucht auch die Zentralbewegung im widerstehenden Mittel, welcher NEWTON ein ganzes Buch (Liber II) seines unsterblichen Werkes gewidmet hatte. Hier wird wegen der analytischen Schwierigkeiten das sogenannte inverse Zentralkraftproblem untersucht, nämlich aus der Form der vorgegebenen Bahnkurve  $r(\vartheta)$  das zugehörige Gesetz der wirkenden Zentralkraft zu finden, wenn die Bewegung in einem Medium mit dem Widerstandsgesetz  $R = \pm a v^n$  stattfindet. Bedeutet  $v$  die Geschwindigkeit,  $\varrho$  den Krümmungsradius der Bahnkurve, so leitet BERNOULLI in der Arbeit *Les forces centrales dans des milieux resistans* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1711) für die Bewegung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dv}{v} \cdot \frac{ds}{d\vartheta} \pm a v^{k-2} ds + \frac{dv}{v} = 0$$

her, welche er mit seiner oben (S. 10) erwähnten Methode löst, indem er die gesuchte Geschwindigkeit mit dem Ansatz  $v = M(v) N(r)$  bestimmt und damit aus

$$\varphi(r) = \frac{v^2}{\varrho} \cdot \frac{ds}{r d\vartheta}$$

das Zentralkraftgesetz findet. Bei dieser Zentralkraftbewegung im widerstehenden Mittel findet nun JOHANN eine Menge von einzelnen Versehen NEWTONS heraus, die er später mit Stolz im ersten Band seiner *Opera* zusammengestellt hat. In dem *Excerptum ex celeberrimi Newtoni philosophiae naturalis principia mathematica Libro*

II, sect. II vergleicht er die erste mit der letzten Auflage des Werkes, in welcher NEWTON seine Fehler nach der Bernoullischen Kritik verbessert hat. NEWTON war dabei ein Versehen unterlaufen, welches in der Folge beim Prioritätsstreit mit LEIBNIZ eine große Rolle spielen sollte: In der Reihenentwicklung von  $d\sqrt{r^2 - x^2}$  hatte er die Reihenglieder als die sukzessiven höheren Ableitungen betrachtet und damit den Koeffizientenfehler begangen, daß er allgemein

$$\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} z^{p-n} dz^p$$

als das  $n$ -te Differential  $d^n z^p$  ansah. Waren diese Fehler NEWTONS allerdings nicht von prinzipieller Natur, sondern bloße Versehen, so erwarb sich der Basler Mathematiker mit seiner «tifteligen» Kritik der Einzelheiten vielleicht die Sympathie der Leibnizianer, keinesfalls aber die Gunst der Newtonianer, die auf das Werk ihres Meisters wie auf eine Bibel schworen. Besonders fatal war, daß JOHANN recht hatte und NEWTON sich zu zahlreichen Verbesserungen genötigt sah, und daß erst das wachsame Auge JOHANNS das unsterbliche Werk von allen mathematischen Makeln gesäubert hatte.

Um dieselbe Zeit, als JAKOBS Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum erschienen war, überraschte JOHANN das Publikum mit einem separaten Buch — auch bei ihm das einzige —: *Essai d'une nouvelle theorie de la Manœuvre des vaisseaux* (1714, Basle, J. G. König). Das Buch stellte eine Kritik der Theorie der Schiffsbewegung des berühmten französischen Marineoffiziers RENAU D'ELISAGARAY von 1679 dar. Hatte schon HUYGENS seinerzeit dieses Werk kritisiert, so blieb JOHANN nicht bei einer bloßen Kritik stehen, sondern gab seinerseits eine neue Theorie der vom Wind getriebenen Segelschiffe. JOHANN wird wohl in Holland zu derartigen Fragestellungen angeregt worden sein, da es sonst kaum zu erklären ist, daß ausgerechnet ein Schweizer Mathematiker auf nautische Probleme verfällt. Die Kritik an RENAU gab Gelegenheit, den falschen Kraftbegriff der Kartesianer zu rügen und deren fortwährende Verwechslung von Kraft und Energie an den Pranger zu stellen. Eine der zahlreichen Rückfragen RENAU'S, die dieser durch seinen Freund VARIGNON an JOHANN gelangen ließ, war die Veranlaßung, daß BERNOULLI in einem Brief vom 26. Februar 1715 an VARIGNON das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten formulierte: «En tout équilibre des forces quelconques en quelque maniere, qu'elles soient appliquées et suivant quelques directions, qu'elles agissent les unes sur les autres ou mediatement ou immédiatement la somme des energies affirmatives sera égale à la somme des energies négatives prises affirmativement», was man heute kurz in der Formel schreibt:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \vec{k}_i \cdot \vec{\delta s}_i = 0.$$

JOHANN hatte schon in diesem Buch ständig vom Leibnizschen Begriff der lebendigen Kraft  $mv^2/2$  Gebrauch gemacht. Er ist der erste, der die Bedeutung des Lehrsatzes von der Konstanz der Energie in einem (konservativen) mechanischen System  $U + (mv^2/2) = \text{const}$  erfaßt und den Terminus «Energie» im mathematisch-physikalischen Sinn gebraucht. Weil aber das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aus dem Energieprinzip ableitbar ist, erscheint es JOHANN BERNOULLI als ein allgemeines Prinzip der Mechanik, das er selber zwar meist nur auf statische Probleme anwendet.

Erst D'ALEMBERT sollte später den konsequenten Übergang zur Dynamik vollziehen, indem er den analytischen Ausdruck BERNOULLIS für das Gleichgewicht zwischen sämtlichen Kräften in jedem Augenblick umschreibt in

$$\sum_{i=1}^n \left( \tilde{K}_i - m_i \frac{d^2 \vec{s}_i}{dt^2} \right) \delta \vec{s}_i = 0,$$

wobei

$$\tilde{K} - m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \tilde{k}$$

als «verlorene Kraft» (nicht in Bewegung umgesetzte Kraft) bezeichnet wird. Damit kann das Bernoullische Prinzip auch für die Dynamik allgemein formuliert werden: Bei der wirklich stattfindenden Bewegung ist die virtuelle Arbeit der «verlorenen» Kräfte gleich Null.

Es war unvermeidlich, daß der in den Leibnizschen Ideen heimische Basler Mathematiker, der zudem noch Mängel in NEWTONS Hauptwerk entdeckt hatte, in den Prioritätsstreit um die Erfindung des Infinitesimalkalküls zwischen NEWTON und LEIBNIZ hineingezogen wurde. Da dieser Streit an anderer Stelle ausführlich geschildert werden soll, mögen hier nur kurz die Abhandlungen JOHANNS erwähnt werden, die ihren Ursprung dem Wettstreit der Newtonianer und Leibnizianer verdanken. Um die Leistungsfähigkeit des Fluxionskalküls von NEWTON und die der Differentialrechnung von LEIBNIZ zu erproben, stellten sich die beiden Parteien gegenseitig Aufgaben, die sie für besonders schwierig hielten. LEIBNIZ hatte mit dem Trajektorienproblem begonnen; JOHANN erweiterte es später auch auf nichtorthogonale Trajektorien (A. E. 1718). Das von NEWTONS getreuem «Kettenhund», dem schottischen Kämpfen KEILL, gestellte Problem der ballistischen Kurve löste JOHANN für das allgemeine Widerstandsgesetz  $R = av^n$  (A. E. 1719), nachdem NEWTON in den *Principia* es nur für den einfachsten Fall  $n = 1$  bewältigen konnte.

Nach dem Tode LEIBNIZENS (1716) und NEWTONS (1727) war JOHANN der größte Mathematiker seiner Zeit. Auch BROOK TAYLOR, der noch am ehesten dem Basler Mathematiker pari bilden konnte, war 1731 gestorben. Da nun einerseits die englische Mathematik infolge des Prioritätsstreites, sich auf den unpraktischen Fluxionskalkül versteifend, über ein Jahrhundert lang in völlige Stagnation geriet, die französische Mathematik andererseits erst nach dem Siege der Newtonschen Physik über die sterile Routine des Spätkartesianismus um 1750 wieder zur vollen Blüte erwachte, konnte JOHANN, selbst mit nur gelegentlichen Abhandlungen die gelehrten Zeitschriften füllend und auf den Lorbeeren ausruhend, leicht seine führende Stellung behaupten.

Trotzdem blieben auch ihm Enttäuschungen nicht erspart. Mit seinem *Discours sur les lois de la communication du mouvement* gewann er nicht den Preis der Pariser Akademie, da er der Leibnizschen Dynamik huldigte, welche bei dem Unverständnis der radikalen Kartesianer in Paris verpönt war. Dagegen gewann er mit den beiden Abhandlungen *Sur le système de M. Descartes* und der *Nouvelle Physique céleste* die Preise der Akademie von 1730 und 1734; in beiden Arbeiten versucht er qualitativ, durch eine zweckmäßige Modifikation der kartesischen Wirbeltheorie, die Neigungen der Planetenbahnen gegen die Ekliptik, die Bahnen und die Knotenbewegungen zu erklären. In den letzten fünfzehn Jahren seines Lebens hat sich JOHANN nur noch gele-

gentlich mit reiner Mathematik befaßt. Der vierte Band seiner *Opera* enthält fast ausschließlich Abhandlungen über Mechanik, speziell der Hydraulik.

Sorgte er durch diese Arbeiten dafür, daß sein Name in den Zeitschriften nicht vergessen wurde, so war er aber schon zu Lebzeiten, mit dem Lorbeerkrantz des Ruhmes geschmückt, nicht nur mit väterlicher Würde, sondern zeitweilig auch mit patriarchalischem Despotismus, einer ganzen Generation von Mathematikern, die er teilweise aus seinen eigenen Söhnen rekrutierte, der gefeiertste Lehrer der mathematischen Welt. Sein größter Triumph wohl war, daß er einen noch Größeren zum Schüler hatte: Den Genius EULERS, der das von den Pionieren eroberte Neuland der Infinitesimalrechnung zu üppiger Pracht kolonisieren sollte, ohne freilich die Giftpflanzen darinnen zu erkennen, die erst die kritische Sonde der Analytiker des neunzehnten Jahrhunderts zutage förderte.

J. O. FLECKENSTEIN, Basel

#### ZEITTAFEL

- |         |  |         |   |
|---------|--|---------|---|
| 1654    | 27. Dezember (A. St.) JAKOB I BERNOULLI zu Basel geboren.  | 1690–92 | JOHANNS Aufenthalt in Genf und Paris.   |
| 1667    | 27. Juli (A. St.) JOHANN I BERNOULLI zu Basel geboren.   | 1691–96 | Ausbau des Leibnizschen Kalküls durch die Brüder BERNOULLI. Probleme der Kettenlinie, Segelkurve, elastische Kurve, Loxodrome, Spiralen, Zykloiden, Kaustiken und Evoluten. |
| 1676    | JAKOB schließt sein theologisches Studium in Basel ab und wird unter die Kandidaten des Basler Kirchenministeriums aufgenommen.  | 1693    | Beginn der Korrespondenz JOHANNS mit LEIBNIZ.   |
| 1676–80 | Auslandsreisen JAKOBS nach Genf und Frankreich, wo er u.a. 1678 Hauslehrer auf dem Schloß Nède (Limousin) des Marquis DE LESTANGES war.  | 1694    | JOHANNS Doktordissertation <i>De motu muscularum</i> .  |
| 1680    | JAKOBS Rückkehr nach Basel. Positionsbestimmung des Kirchschen Kometen.  | 1695    | JOHANN erhält durch HUYGENS Vermittlung die mathematische Professur in Groningen.   |
| 1681–82 | Zweite Auslandsreise JAKOBS nach Holland und England, wo er mit Mathematikern wie HUDDDE und dem Astronomen FLAMSTEED bekannt wird. <i>Conamen novi systematis Cometarum</i> (Amstelodami).      | 1697    | Problem der Brachystochrone. Beginn des Streites der Brüder BERNOULLI um das isoperimetrische Problem.  |
| 1683    | JAKOBS <i>Dissertatio de gravitate Aetheris</i> .  | 1699    | JAKOB und JOHANN zu auswärtigen Mitgliedern der Pariser Akademie ernannt, deren Zahl auf acht beschränkt war.   |
| 1687    | JAKOB wird Nachfolger MEGERLINS auf dem mathematischen Lehrstuhl in Basel. Brief an LEIBNIZ mit der Bitte um Aufklärung über dessen Differentialrechnung in den <i>Acta Eruditorum</i> von 1684. | 1701    | <i>Analysis magni problematis isoperimetrii</i> von JAKOB.  |
| 1690    | Erste Publikation von JOHANN <i>De effervescencia et fermentatione</i> .   | 1705    | 16. August Tod von JAKOB.   |
| 1690    | JAKOB löst das Problem der Isochrone mittels Infinitesimalkalkül und publiziert damit nach Leibnizens Arbeiten von 1684 und 1686 als erster über dessen neue Methode.                            | 1706    | Publikation der vermeintlichen Lösung des isoperimetrischen Problems von JOHANN in den <i>Mémoires</i> der Pariser Akademie.  |
|         |  | 1710–11 | Analytische Theorie der Zentralkräfte von JOHANN und Kritik der synthetischen Theorie derselben in NEWTONS Prinzipien.  |
|         |  | 1713    | LEIBNIZ zieht durch ein Flugblatt JOHANN in den Prioritätsstreit mit NEWTON hinein. JAKOBS <i>Ars conjectandi</i> erscheint postum.   |