

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	6/7 (1949)
<b>Artikel:</b>	Johann und Jakob Bernoulli
<b>Autor:</b>	Fleckenstein, J.O.
<b>Kapitel:</b>	2: Das Problem der Brachystochrone und die Ursprünge der Variationsrechnung
<b>Autor:</b>	Die Eroberung des Leibnizschen Kalküls durch Jakob und Johann Bernoulli
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-4707">https://doi.org/10.5169/seals-4707</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

wenn man  $m = -1$ ,  $g = dx$  und  $f = \varphi(x)$  setzt und weiter noch die Operatoren  $d^{-p} = 1/d^p = \int^p$  einführt. Einen Großteil der Korrespondenz mit LEIBNIZ zwischen 1694 und 1696 füllen derartige Formalismen aus.

Im Zusammenhang mit der Integralrechnung als Umkehroperation der Differentiation stehen JOHANNS Bemühungen um die Integration der Differentialgleichungen. Hatte er schon in Paris mit der anonymen Lösung des berühmten de-Beauneschen Problems, welches seinerzeit schon dem CARTESIUS als erstes inverses Tangentenproblem aufgegeben war, die Leistungsfähigkeit des Leibnizschen Kalküls demonstriert (J. d. S. 1692), so zeigte er fünf Jahre später, daß der neue Kalkül auch viel kompliziertere Differentialgleichungen zu lösen imstande ist: JAKOB hatte im Anschluß an das de-Beaunesche Problem die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^n = 0,$$

welche man heute die Bernoulli'sche heißt, aufgegeben und selber umständlich gelöst. Hier lief ihm der formal gewandtere JOHANN wiederum einmal den Rang ab, indem letzterer diese Gleichung mit dem Ansatz löste, die gesuchte Lösungsfunktion als Produkt zweier unbekannter Funktionen aufzufassen  $y = M(x) \cdot N(x)$ , so daß man in der dann resultierenden Gleichung

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + P(x)dx + (M \cdot N)^{n-1}Q(x)dx = 0$$

wegen der Willkürlichkeit der beiden Funktionen einer von ihnen, etwa  $M$ , noch die Nebenbedingung  $dM/M + P(x)dx = 0$ , woraus  $M = e^{-\int P(x)dx}$  folgt, auferlegen kann. Setzt man  $M$  in die Bedingungsgleichung ein, so ist nur noch eine lineare Differentialgleichung in  $N$  zu lösen.

Der «Exponentialkalkül», auf den JOHANN so stolz war, ist nichts anderes als der Infinitesimalkalkül der Exponentialfunktionen. Als NIEUWENTIIT in einer kritischen Schrift gegen die mangelnden logischen Grundlagen des Leibnizschen Kalküls besonders auf das Fehlen der Differentiation der Exponentialfunktion  $x^y$  im Leibnizschen Kalkül hinwies, entwickelte JOHANN in einer besonderen Abhandlung (*Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, A. E. 1697) den «Exponentialkalkül», dessen Grundformel in der Gleichung

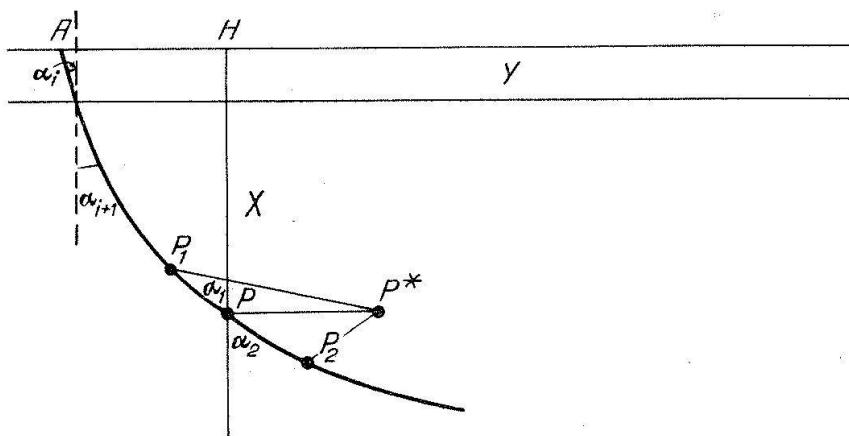
$$d(x^y) = x^y \log x \, dy + x^{y-1} \, dx$$

besteht.

## 2. Das Problem der Brachystochrone und die Ursprünge der Variationsrechnung

Da JOHANN keine Aussichten hatte, in Basel eine mathematische Professur zu erhalten, weil der Lehrstuhl von JAKOB besetzt war, nahm er mit Freuden eine Berufung nach Groningen an, welche ihm HUYGENS vermittelt hatte. Am 1. September 1695 reiste er mit seiner Frau und dem erst sieben Monate alten Sohn NICOLAUS II nach Holland ab, nicht ohne Groll gegen JAKOB im Herzen, der sich mit Sticheleien an der früheren Prahlgerei JOHANNS bei der Differentialgleichung der Segelkurve zu rächen begonnen hatte, indem er JOHANN als seinen Schüler bezeichnete, der schließlich nur das habe zum besten geben können, was er von JAKOB gelernt habe. Aus Groningen

kam der Gegenstoß des nun auch an Rang ebenbürtig gewordenen Bruders: Schon im Juni 1696 hatte JOHANN in den A. E. den Mathematikern das Problem der Brachystochrone vorgelegt, die Kurve zu bestimmen, längs deren in der Vertikalebene ein Körper am schnellsten von einem Punkt  $A$  zu einem Punkt  $B$  fällt. Da bis Ende 1696 eine Lösung nicht mehr zu erwarten war, stellte JOHANN auf Wunsch von LEIBNIZ die Aufgabe nochmals in Form eines Flugblattes, gewidmet *acutissimis qui toto orbe florent mathematicis*, mit einer Lösungsfrist von 6 Monaten. LEIBNIZ löste am gleichen Tag, als er den Brief JOHANNS erhalten hatte, dessen «wunderschönes» Problem der Brachystochrone und schrieb zurück, daß er außer denjenigen, welche mit der neuen Infinitesimalrechnung vertraut seien, wie JOHANN, JAKOB BERNOULLI, NEWTON und DE L'HÔPITAL, nur dem Genius HUYGENS, wenn er noch lebte, und dem Scharfsinn HUDDES, wenn er sich noch mit Mathematik abgäbe, eine Lösung zutraue.



Wie LEIBNIZ prophezeit hatte, liefen nur fünf Lösungen ein, und zwar von JOHANN, JAKOB, NEWTON, LEIBNIZ und DE L'HÔPITAL, wobei bemerkt werden muß, daß nur die aktive briefliche Hilfe JOHANNS dem Marquis die Lösung ermöglicht hatte.

An diesem berühmten Problem offenbarte sich die verschiedenartige Begabung der beiden Brüder in aller Öffentlichkeit. JOHANN löst die Aufgabe durch eine geniale Intuition, mit der er das mechanische Problem auf ein «zufällig» schon gelöstes optisches zurückführen kann. JAKOB gibt eine gründliche, aber schwerfällige Analyse und findet dabei in den Tiefen der Aufgabe Wurzeln einer neuen mathematischen Disziplin. In einem offenen Brief an BASNAGE, Redaktor der Revue *Histoire des Ouvrages des Scavans* hat JOHANN (1697) alle Lösungen besprochen und dabei angedeutet, daß HUYGENS' *Traité de la lumière* (Leyden 1691) ihn auf den Gedanken eines inneren Zusammenhangs zwischen Mechanik und Optik gebracht habe; und so findet sich in diesem Brief zum ersten Male, über 100 Jahre vor der Hamiltonschen Theorie, in der mathematischen Physik der Satz ausgesprochen «que ces deux spéculations, prises de deux si différentes parties des Mathématiques telles que sont la Dioptrique et la Méchanique, ont entre elles une liaison absolument nécessaire et essentielle».

Für die Lichtbewegung ist nämlich das Problem der Brachystochrone nach dem Fermatschen Prinzip schon gelöst, denn das Licht legt immer denjenigen Weg zurück, für welchen es ein Minimum an Zeit benötigt. Diesen Lichtweg beschreibt das Brechungsgesetz. Man braucht sich also die Fallbewegung nur durch eine entsprechende Lichtbewegung ersetzt zu denken, indem sich das Licht in einem Medium von

variabler Dichte, welche nach unten nach dem Gesetz  $v = \sqrt{2gh}$  abnimmt, bewegt. Zerlegt man das Medium in horizontale Schichten und bezeichnet mit  $\alpha_i$  die Neigungswinkel des Kurvenelements gegen die Vertikale, wobei  $v_i$  die entsprechenden Geschwindigkeiten bezeichnen, so ist infolge des Brechungsgesetzes

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{v_{i+1}} = k$$

oder aber, wenn mit  $x$  die Vertikaltiefe unter  $A$  und die horizontale Entfernung von  $A$  mit  $y$  bezeichnet wird,

$$\frac{dy/ds}{v} = k \quad \text{oder} \quad dy^2 = k^2 v^2 (dx^2 + dy^2);$$

da  $v^2 = 2gx$  ist, folgt mit der Abkürzung  $\alpha = 1/2gk^2$ :

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{\alpha - x}}.$$

Dies ist aber die Differentialgleichung einer Zykloide, so daß JOHANN dieser Kurve, von welcher HUYGENS den Isochronismus oder den Tautochronismus entdeckt hatte, noch die Eigenschaft des Brachystochronismus zufügen konnte. In seinem offenen Brief an BASNAGE machte sich JOHANN über die schwerfälligen Deduktionen JAKOBS lustig, der selber offen zugestanden hatte, daß sie ihm manches Kopfzerbrechen bereitet hatten. Aber JOHANN merkte nicht, daß JAKOB mit seinem Grübeln in der leichten Eleganz JOHANNS unbekannte Tiefen vorgestossen war. JAKOB stellte nämlich zunächst fest, daß derartige Extremalprobleme von den bisher üblichen verschieden seien, indem nicht mehr die unbekannten Extremalstellen einer Funktion, sondern Funktionen selber, welche ein gewisses Integral zu einem Extremum machen, zu bestimmen sind. Damit erkannte JAKOB, daß es sich hier nicht um ein gewöhnliches Extremalproblem, sondern um ein — wie wir heute sagen würden — Variationsproblem handelt, welches besondere Lösungsprinzipien erfordert. Als ein solches benutzt JAKOB die Bedingung, daß die Extremalkurve auch in ihren kleinsten Teilen der Eigenschaft genüge, die sie als Gesamtkurve haben soll. Daß diese Bedingung für die Extremalkurve eines Variationsproblems ohne Nebenbedingung zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig ist, hat allerdings erst später EULER erkannt.

Das Integral  $\int dt = \int ds/v$  oder, mit Berücksichtigung des Fallgesetzes,  $1/\sqrt{2g} \int ds/\sqrt{x}$  soll ein Minimum sein. Da ständig  $dx/ds = \cos \alpha$  ist, so gilt für die beiden Nachbarpunkte von  $P$ ,  $P_1$  und  $P_2$  (bei Weglassung des konstanten Faktors  $1/\sqrt{2g}$ ),

$$\frac{1}{\cos \alpha_1} \int_{x-h}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\cos \alpha_2} \int_x^{x+h} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\cos \alpha_1} (\sqrt{x} - \sqrt{x-h}) + \frac{1}{\cos \alpha_2} (\sqrt{x+h} - \sqrt{x});$$

dies muß ein Minimum, die Ableitung des Ausdrucks rechter Hand also Null sein. Die Ableitung aber ist (nur  $\alpha$  ist jetzt variabel!)

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-h}) \sin \alpha_1 d\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \sin \alpha_2 d\alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0.$$

Da nun aber  $y_2 - y_1 = h$  ( $\tan \alpha_2 + \tan \alpha_1$ ) als Ordinatendifferenz  $P_1 P_2$  konstant ist, so besteht noch die Bedingung

$$\frac{d\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{d\alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0,$$

womit sich die Minimalbedingung

$$(\sqrt{x} - \sqrt{x-h}) \sin \alpha_1 = (\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \sin \alpha_2$$

schreibt. Bringt man diese auf die Form

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} = \frac{\sin \alpha_2}{\sqrt{x} - \sqrt{x-h}},$$

so erkennt man, daß diese Bedingung unabhängig von  $h$  ist, daß also  $\sin \alpha / \sqrt{x}$  konstant ist, was mit  $\sin \alpha = dy/ds$  die von JOHANN aus dem Brechungsgesetz gefundene Differentialgleichung der Zykloide gibt.

Um JOHANN auf den Zahn zu fühlen und vor aller Öffentlichkeit bloßzustellen, stellte nun JAKOB am Schluß seiner Auflösung des Problems der Brachystochrone ein neues Variationsproblem (A. E., Mai 1697): Unter allen durch  $B$  und  $N$  gehenden Kurven von gleicher Länge ist diejenige zu bestimmen, welche den Flächenraum  $BZN$  zu einem Maximum macht, wenn allgemein die Ordinate  $PZ$  der Kurve  $BZN$  eine Potenz der Ordinate der Extremalkurve  $BFN$  ist ( $PZ = PF^n$ ). Diese Aufgabe stellt eine Verallgemeinerung des Isoperimeterproblems der Antike dar, unter allen Kurven gegebener Länge zwischen  $B$  und  $N$  diejenige zu bestimmen, welche über der Sehne  $BN$  den größten Flächeninhalt einschließt. JOHANN BERNOULLI schrieb nun in seinem Brief an BASNAGE, es sei ihm gelungen, innert drei Minuten das Problem zu lösen. Die Extremalkurve sei nämlich

$$y = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}, \quad (a = \text{Konstante})$$

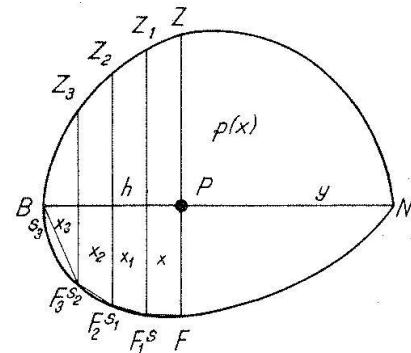
und für  $n = 1$ , wobei die Kurve  $BZN = BFN$  wird, ist in der Tat der Kreis des ZENODORUS

$$y = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a - \sqrt{a^2 - x^2}$$

die Lösung.

Aber JOHANNS voreilige Lösung war nur teilweise richtig. Da JOHANN sein Resultat ohne Ableitung publiziert hatte, JAKOB aber seinen ehemaligen Schüler kannte, erbot sich JAKOB, erstens die Methode seines Bruders zu erraten, zweitens die Fehler in dessen Ableitung nachzuweisen und drittens die wahre Auflösung des isoperimetrischen Problems zu geben. Da seinerzeit bei der Stellung des Problems von einem «Nonnemo» 50 Imperialien als Lösungspreis ausgesetzt waren, so verpflichtete er sich, diese Summe zu zahlen, wenn er im ersten Punkte, das Doppelte, wenn er im zweiten Punkt, und das Dreifache, wenn er im dritten Punkt seiner Kritik der Johannschen Lösung fehle.

In diesen nüchternen und ironischen Worten drückt sich die ganze Tragik der Entzweiung der beiden Brüder aus, deren Streit schließlich in eine unerquickliche und hier nicht im einzelnen zu schildernde Gehässigkeit ausarten sollte, so daß die Beiden sich nicht mehr versöhnen konnten. Immerhin hatte dieser leidige Streit die



Geburt der Variationsrechnung zur Folge, und man kann diesen geradezu als ein Auseinanderfallen der beiden Begabungsrichtungen, der intuitiven und der systematisch-kritischen, auf zwei verschiedene Personen ansehen, welche sich offen bekämpften, als ob die Brüder sich gleichsam an der Natur rächen wollten, die, indem sie das mathematische Genie gerecht auf zwei verteilte, dadurch gerade verhinderte, daß jeder allein zur Klasse der allergrößten Mathematiker aufsteigen konnte. Und so trat eine Auseinandersetzung an die Öffentlichkeit, welche «unter anderen Umständen unbemerkt in derselben Person hätte austoben können», um die geniale Leistung hervorzu treiben, wie MACH treffend bemerkt.

JOHANN hatte übrigens noch geprahlt, daß er JAKOBS Aufgabe auch für den allgemeineren Fall lösen könne, daß  $PZ$  nicht nur  $= PF^n$ , sondern irgendeine Funktion von  $PF = p(x)$  sei. Dann sei die Gleichung der Extremalkurve

$$y = \int \frac{b \, dx}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

wobei

$$b = \int \frac{PZ \, dx}{x}$$

bedeutet. Vielleicht hat gerade diese Verallgemeinerung JAKOB die Spur in den Gedankengang JOHANNS gewiesen, und er vermutet wohl mit Recht, daß JOHANN hier wieder eine indirekte Methode versucht hat, die in speziellen Fällen zwar zum Ziele führen kann, im allgemeinen aber versagt. JOHANN hat in seiner Antwort auf JAKOBS Wette über die drei Punkte sofort ein in der Eile begangenes Versehen zugegeben: es müsse einfach  $b = PZ$  gesetzt werden, so daß die Extremalkurve also, wenn man  $b = PZ$  setzt, die Gleichung

$$PF = \int \frac{PZ \, dx}{\sqrt{a^2 - PZ^2}}$$

hat. Es führt nun in der Tat die von JAKOB seinem Bruder insinuierte Überlegung mit mechanischen Analogien zu diesem formalen Resultat, das ein JOHANN BERNOULLI in drei Minuten herausgefunden haben mag: Denkt man sich die Kurve  $BN$  mit einer Flüssigkeit von variablem spezifischem Gewicht gefüllt, so ist  $BN$  dann eine Extremalkurve, wenn der Schwerpunkt möglichst tief liegt. In der Ordinate  $PF = x$  soll nun das spezifische Gewicht der Flüssigkeit  $PZ/x = p(x)/x$  sein. Das Gewicht eines vertikalen Fadens ist dann  $p \, dy/x$  und sein Moment in bezug auf  $BN$  ist

$$\frac{1}{2} x \frac{p \, dy}{x} = \frac{1}{2} p \, dy,$$

und für die tiefste Lage des Schwerpunkts wird dann tatsächlich

$$\frac{1}{2} \int p \, dy \quad \text{oder} \quad \int p(x) \, dy = \text{Fläche } BZN$$

ein Maximum.

Diese Überlegung ist aber in dieser Form nicht zulässig; denn, wie JAKOB bemerkt, wird übersehen, daß mit der Variation der Kurve  $BN$  auch das Gewicht der Flüssigkeit variiert wird.

An die Herausforderung JAKOBS schloß sich ein hitziges Hin und Her zwischen den beiden Brüdern an, bis den wissenschaftlichen Journals dieser Streit schließlich so verleidet war, daß die A. E. nur noch zum Abschluß die Lösung JAKOBS publizierten, sonst aber den beiden alle Zeitschriften für Polemiken geschlossen waren. Ein Jahr



JOHANN BERNOULLI

später gab JAKOB in einem Sonderdruck unter dem Titel *Analysis magni problematis isoperimetrici* (Basileae, 1701) eine detaillierte Untersuchung. Er war sich der Bedeutung seiner Arbeit vollkommen bewußt. Mit feierlichen Worten, die den ehemaligen Prediger verraten, schließt JAKOB sein Werk ab, nachdem er es dem unvergleichlichen mathematischen Viertgespann der LEIBNIZ, NEWTON, DE L'HÔPITAL und FATIO gewidmet hat. Wiederum benutzt JAKOB das systematische Prinzip, daß auch das kleine Kurvenstück  $FF_3$  die verlangte Eigenschaft der Extremalkurve habe. Er betrachtet nun vier sukzessive Punkte  $F, F_1, F_2, F_3$ ; es kann bei festgehaltenen Endpunkten aber nur dann der Bogen  $F_3F_2F_1F$  so variiert werden, daß die Bogenlänge konstant bleibt, wenn man

zwei Punkte verschiebt. Setzt man

$$y_1 - y = y_3 - y_1 = y_3 - y_2 = h,$$

so folgt

$$(s_1 - s)^2 = (x_1 - x)^2 + h^2; \quad (s_2 - s_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + h^2; \quad (s_3 - s_2)^2 = (x_3 - x_2)^2 + h^2,$$

und die Aufgabe ist,  $x_1$  und  $x_2$  so zu variieren, daß

$$|s_1 - s| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2|$$

konstant bleibt. Aus dieser Bedingung leitet JAKOB eine Differenzengleichung und dann aus dieser durch Grenzübergang eine Differentialgleichung dritter Ordnung her, die er mühsam integriert und schließlich die Bedingungen für die Extremalkurve findet:

$$\text{Für } dy = \frac{p(x) dx}{\sqrt{a^2 - p(x)^2}} \quad \text{wird } \int p(x) dy \quad \text{ein Maximum}$$

$$\text{und für } dy = \frac{a - p(x) dx}{\sqrt{2a p(x) - p(x)^2}} \quad \text{wird } \int p(x) dy \quad \text{ein Minimum.}$$

JOHANN hatte sich unterdessen um eine strenge Analyse des Problems bemüht und diese am 1. Februar 1701 der Pariser Akademie durch seinen Freund VARIGNON in einem versiegelten Paket übergeben lassen, welches erst nach der Publikation der JAKOBSCHEN Lösung geöffnet werden sollte. Es wurde aber nicht sogleich nach dem Erscheinen der *Analysis magni problematis isoperimetrici*, sondern, durch allerhand mysteriöse Umstände verzögert, erst nach dem Tode JAKOBS am 17. April 1706 geöffnet.

Die Lösungsmethode JOHANNS führt nicht zum Ziel, so daß JAKOB seinen Triumph nicht mehr erlebte. Hatte JAKOB schon bei seiner ersten Kritik höhnisch bemerkt, daß JOHANN nur durch zwei sukzessive Fehlschlüsse, wo der nachfolgende gerade den ersten wieder kompensiert, zum richtigen Resultat gelangt sei, so traf diese Bemerkung erst recht bei der von JOHANN unterdessen nachträglich versuchten strengen Analyse des Problems zu. JOHANN benutzt ebenfalls das Prinzip JAKOBS. Während dieser aber die Eckpunkte der betrachteten Approximationspolygone auf Parallelen zur  $X$ -Achse gleiten ließ und deshalb, um der isoperimetrischen Bedingung zu genügen, Polygone von drei Seiten benutzen mußte, betrachtete JOHANN nur drei sukzessive Punkte der variirten Kurve und verwandte also nur ein Zweiseit von konstanter Länge, dessen variable Ecke sich auf einer Ellipse bewegt. Mit diesem Zweiseit kann man aber prinzipiell nur zu Identitäten gelangen, und wenn JOHANN trotzdem damit die Differentialgleichung der Extremalkurve herausrechnet, so gelingt ihm dies nur, weil er in Kenntnis des Resultates zweckmäßige, aber ungerechtfertigte Vernachlässigungen und Mitnahmen von infinitesimalen Variationen höherer Ordnung vornahm. JOHANN hat später seinen Fehler eingestanden und in einer – besonders durch die Kritik von BROOK TAYLOR provozierten – Abhandlung *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les Isoperimètres* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1718) eine Lösung gegeben, die nicht nur streng, sondern – wieder einmal – formal eleganter als die Jakobsche war. Die von JAKOB kompliziert gewonnenen Differenzengleichung, welche auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung führt, formt JOHANN so um, daß er sofort im Limes zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangt, welche sogar in einer ähnlichen Form wie die Euler-Lagran-

gesche Differentialgleichung für die Extremalkurve eines Variationsproblems geschrieben werden kann.

Am Schluß dieser Abhandlung gibt JOHANN noch eine direkte Lösung des Problems der Brachystochrone, welche nicht nur geometrisch interessant, sondern zugleich für Variationsprobleme verallgemeinerungsfähig ist. Man braucht nur die Eigenschaft der Zykloide zu kennen, daß die Abrollgerade des erzeugenden Kreises die Krümmungsradien der Zykloide halbiert, um sofort die Kurve des schnellsten Falls herzuleiten. Zeichnet man die Variationskurven zwischen  $A$  und  $B$ , so lautet die Aufgabe: Wo müssen  $M$  und  $m$  auf den Krümmungsradien an  $AB$  in  $M$  und  $m$  liegen, damit  $Mm$  und folglich auch  $AB$  in kürzester Zeit durchfallen wird? Wann ist mit anderen Worten  $dt = ds/v$  ein Minimum? Es ist nun allgemein  $v = \sqrt{2gx \sin \alpha}$ , und da  $ds = (x + l) d\theta$  ist, so folgt

$$dt = \frac{(x + l) d\theta}{\sqrt{2gx \sin \alpha}}.$$

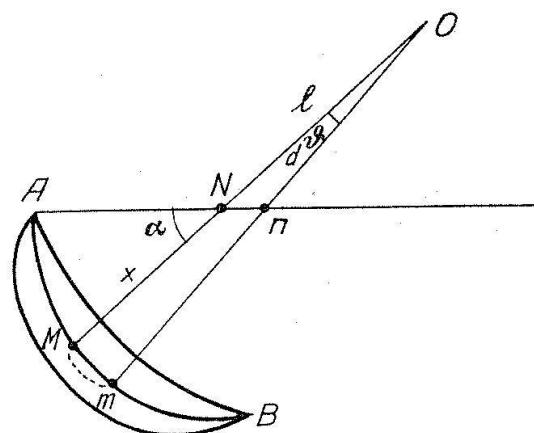
Der Ausdruck  $(x + l)/\sqrt{x}$  hat aber dann ein Minimum, wenn  $x = l$  ist. Es muß also der Krümmungsradius  $OM$  in  $N$  resp.  $Om$  in  $n$  halbiert werden; die Extremalkurve muß also eine Zykloide sein. Man kann dann leicht synthetisch durch Vergleich mit den benachbarten Vergleichungskurven zeigen, daß die Zykloidenkurve  $AMmB$  ein echtes Minimum darstellt.

Die Extremalkurve – im vorliegenden Falle die Zykloide – schneidet die beiden benachbarten Geraden  $OM$  und  $Om$  orthogonal. Nimmt man nun allgemein statt der Geraden eine Kurvenschar  $\varphi(x, y) = \lambda$ , so braucht man sie – wie CARATHÉODORY in seiner Dissertation (1904) «geometrisch» gezeigt hat – nur so zu wählen, daß längs jeder Kurve  $\varphi = \text{const}$  der Ausdruck  $f/(\varphi_x + y' \varphi_y)$  konstant wird, damit das Integral  $\int f(x, y, y') dx$  ein Extremum wird. Die Bedingung für  $f$  kann man dann leicht in die Lagrangesche Differentialgleichung umwandeln:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

JOHANNS Gedanke enthält somit schon den Keim moderner Methoden der Variationsrechnung. Überhaupt hat JOHANN durch eine Fülle von genialen und produktiv verwertbaren Einzelerkenntnissen seine Unterlegenheit an logischer Denkkraft JAKOB gegenüber wieder wettgemacht. In diesen Zusammenhang gehört auch eine Entdeckung JOHANNS beim Variationsproblem der geodätischen Linie auf konvexen Oberflächen: In einem Brief an LEIBNIZ aus dem Jahre 1698 erkennt er die charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien, daß drei ihrer konsekutiven Punkte eine Normalebene der Oberfläche bestimmen.

Der tiefschürfende Geist JAKOBS hatte aber nicht nur zur Variationsrechnung, sondern auch zur Statistik als einer neuen mathematischen Disziplin den Weg gebahnt. Die Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, vor allem PASCAL und FERMAT, hatten die Kombinatorik zu einem neuen Zweig der Arithmetik entwickelt,



der bezeichnenderweise erst in der Neuzeit erblühte, nachdem der kartesische Impuls der Logik der Relationen die Denker erfaßt hatte. Im Anschluß an die Kombinatorik entwickelten FERMAT, PASCAL und HUYGENS die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. JAKOB BERNOULLIS größte Entdeckung ist nun vielleicht sein Theorem vom Gesetz der großen Zahlen, mit welchem er von der Wahrscheinlichkeitsbestimmung «a priori» der Kombinatorik, also aus bekannten logischen Bedingungen, zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung «a posteriori» der Statistik, also aus bloßen Erfahrungen bei Versuchsreihen, übergeht. Dieses Bernoullische Theorem steht in der *Ars conjectandi*, welche erst acht Jahre nach JAKOBS Tod als separates Buch, mit einem Vorwort seines Neffen NIKLAUS I versehen, 1713 in Basel erschien. Wie sich

*Similiter si 1713 observationes instituuntur, omnes, maxima sequentes, ad hanc  
 dectionem superant ~~ad hanc~~ extra limitem dectionem plusquam gressu (lm - 1) vi  
 fatus, si 1713, cibus, adeoq; ex nonnullum illorum (lm - 1, cibus) plusquam ~~gessu~~ (predis-  
 operationes, unde multo evidenter) superant omnes gressu limitem dectionem, quorum non nisi  
 stimatur. gressu (lm - 1) plus, fuit p. V. plusquam 1000, b. viibus, Ergo ~~gessu~~ <sup>stans</sup> omnes  
 intra limites ab utrāq; prole & maximi superant omnes omniō extra illas  
 plusquam 1000, b. viibus: multo magis igitur, si illis adiutoriis maxima.  
 Q. E. D. Ad hoc invenimus plausum facio. ~~et~~ <sup>et</sup> inveni quodlibet de dictis, quia maxime.*

Seite aus dem Tagebuch (*Meditationes et annotationes*) von JAKOB BERNOULLI. (Enthält den Schlußteil des Beweises des Bernoullischen Theorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vermutlich aus dem Jahre 1689).

(Basel U. B. Msgr. L Ia 3, Seite 191.)

aus den Manuskripten JAKOBS ersehen läßt, lassen sich die wesentlichen Lehrsätze dieses Buches aber schon vor 1690 nachweisen, so daß die Grundlagen der Statistik von JAKOB bezeichnenderweise gerade in der logischen und kombinatorischen Phase seiner mathematischen Entwicklung gefunden wurden.

Jakob beginnt sein Werk mit den klassischen Problemen des Glücksspiels, an denen seine Vorgänger die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung deduziert hatten. Der erste der vier Teile des Buches bringt die Abhandlung von HUYGENS *De ratiociniis in ludo aleae* mit Anmerkungen JAKOBS versehen als Wiederabdruck, welcher aber die an speziellen Zahlenbeispielen entwickelten Formeln von HUYGENS in allgemeiner Buchstabenform gibt. Im zweiten Teil werden die allgemeinen Formeln der Kombinatorik abgeleitet, um sie im dritten Teil auf die allgemeinen Probleme der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden. Allein durch die systematische Entwicklung der Formelsprache der Kombinatorik stellt damit das Werk schon einen wichtigen Beitrag zur Arithmetik dar. Der Übergang zur Statistik wird nun im vierten Teil vollzogen. Es ist durchaus möglich, daß nur der frühzeitige Tod JAKOB verhindert hat, auch auf die Schlußfolgerungen einzugehen, die man aus den Erfahrungstatsachen einer Versuchsreihe ziehen kann, denn die Betrachtungen dieses Teils scheinen darauf abzuzielen, nur Vorbereitungen zu dieser Lehre von den statistischen Schlußfolgerungen zu geben. Das Werk gipfelt und schließt mit seinem berühmten Theorem, das man in Umkehrung folgendermaßen schreiben kann: «Sind  $p$  und  $q$  die gewöhnlichen *a-priori*-Wahrscheinlichkeiten

zweier entgegengesetzter Ereignisse  $A$  und  $B$  ( $p + q = 1$ ), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis  $A$  in einer sehr großen Zahl  $\mu$  von Versuchen in einer zwischen  $\mu p + \lambda$  und  $\mu p - \lambda$  liegenden Anzahl  $m$  von Malen eintritt:

$$W = \sum_{\varrho = \mu p - \lambda}^{\varrho = \mu p + \lambda} \frac{\mu!}{\varrho! (\mu - \varrho)!} p^\varrho q^{\mu - \varrho}.$$

Anders gesagt:  $W$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abweichung des Quotienten  $m/\mu$  vom Erwartungswert  $p$ , nämlich  $(m/\mu) - p$ , zwischen  $-\lambda/\mu$  und  $\lambda/\mu$  enthalten ist. Für  $\mu \rightarrow \infty$  geht diese Wahrscheinlichkeit  $W$  in Eins über.

JAKOB hat zwar die Formel für  $W$  nicht explizite hingeschrieben, sie kann aber aus seinem Beweis sofort herausgeholt werden. Diesen Summenausdruck haben nun sowohl DE MOIVRE als LAPLACE zum Ausgangspunkt genommen und durch entsprechende analytische Transformationen in die Form des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\zeta^2} d\zeta + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi \mu p q}} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi \mu p q}}$$

gebracht, welches heute als das Fehlerintegral der Gaußschen Glockenkurve der Statistik zugrunde liegt.

### 3. Johann als Nachfolger von Jakob Bernoulli

JAKOB BERNOULLI starb gerade in dem Moment, als sich JOHANN, dem Drängen des Schwiegervaters folgend, mit seiner Familie nach Basel begab. Er schied sehr ungern von Holland; als ihm noch während der Heimreise eine vorteilhafte mathematische Professur in Utrecht angeboten wurde, schwankte er, ob er sie annehmen solle oder nicht. Bei seiner Ankunft in Basel erhielt er aber den Besuch des gesamten akademischen Senats, der ihn bat, den durch den Tod JAKOBS freigewordenen Lehrstuhl für Mathematik zu übernehmen. Am 17. November trat JOHANN die Nachfolgeschaft des Bruders an. Kein geeigneterer Verwalter und Förderer des Jakobschen Erbes als JOHANN konnte gefunden werden! Nachdem der mehr introvertierte JAKOB die Grundlagen der Infinitesimalrechnung geschaffen hatte, brachte der mehr extravertierte JOHANN durch den Glanz seines Namens und seine literarische Fruchtbarkeit den neuen Kalkül in der wissenschaftlichen Welt zur Geltung. Die Leidenschaft, mit der er sich dieser Aufgabe widmete, mußte ihn geradezu notwendig in die Rolle des *Praeceptor mathematicus Europae* hineindrängen.

Quantitativ nehmen die Abhandlungen JOHANNS während seiner Basler Professur, die er bis zu seinem Tode 1748 inne hatte, fast Dreiviertel des Gesamtwerkes ein. Wenn man den Maßstab des reinen Mathematikers an diese Abhandlungen legt, so bleiben sie qualitativ wohl etwas gegenüber den Arbeiten aus der Jugend- und Großer Zeit zurück. Denn es sind vornehmlich Probleme der angewandten Mathematik, speziell der Mechanik, denen er sich seit etwa 1710 widmete. Für die Geschichte der Mechanik sind seine Arbeiten aber nicht hoch genug anzuschlagen. In der mehr «pädagogisch» gerichteten Basler Zeit begann er, allmählich sich mit der Arbeitsrichtung seines Freundes und langjährigen Korrespondenten VARIGNON zu be-