

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	6/7 (1949)
Artikel:	Johann und Jakob Bernoulli
Autor:	Fleckenstein, J.O.
Kapitel:	1: Die Eroberung des Leibnizschen Kalküls durch Jakob und Johann Bernoulli
Autor:	Fleckenstein, J. O.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-4707

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Vor diesem ideengeschichtlichen Hintergrund standen die beiden BERNOULLI eindeutig auf der Seite LEIBNIZENS gegen den Newtonianismus der englischen Mathematiker; eine Stellungnahme, welche übrigens sogar noch bei EULER ihre Spuren hinterlassen hat. Da sie aber keineswegs imstande waren, den philosophischen Hintergrund der Mathematik LEIBNIZENS zu erfassen, mußten sie automatisch in das Fahrwasser des französischen Spätkartesianismus geraten, als dessen bedeutendste mathematische Repräsentanten sie übrigens von der Pariser Akademie selbst empfunden wurden. Unter ihrer Hand wurden die Leibnizschen Infinitesimalia wiederum unter das kartesische Joch des «Geometrismus des Extensiven» gezwungen und damit zu aktual-unendlich kleinen Größen deklariert. Die sich damit allerdings einstellenden logischen Schwierigkeiten wurden durch die praktischen Ergebnisse des zwar widerspruchsvollen, aber wie ein Zauberstab immer zu richtigen und auf anderen Wegen nicht zu erreichenden Resultaten führenden Kalküls verdeckt. Führten diese logischen Schwierigkeiten die BERNOULLI und vor allem ihre französischen Adepten in Frankreich zwar in leidige Diskussionen mit kartesischen Zeloten der Akademie, so darf doch nicht übersehen werden, daß es sich dabei freilich nur um einen Haussstreit zwischen dem orthodoxen und dem Spätkartesianismus handelte, welcher in den BERNOULLI willkommene Mitstreiter erblickte. Es ist hervorzuheben, daß es nur Mathematiker aus dem Kreise um MALEBRANCHE waren, dessen Philosophie sich noch am ehesten den Leibnizschen Ideen öffnen konnte, welche wie VARIGNON und DE L'HÔPITAL sich für den neuen Kalkül interessierten, während die repräsentativen Mathematiker der ersten Akademie (1666 bis 1699), die DE LA HIRE, ROLLE, GALLOYS S. J., sich ablehnend, ja sogar feindlich gegenüber dem «Kalkül der Ausländer» verhielten. Durch das «Einfallstor» MALEBRANCHE wurde von den BERNOULLI das trojanische Pferd der Leibnizschen Mathematik in die Akademie des französischen Spätkartesianismus gebracht. Diese gleiche Akademie sollte aber später nach Abkehr von der kartesischen Naturphilosophie durch die Anwendung der formalen Prinzipien des Leibnizschen Kalküls auf den neuen Inhalt der Newtonschen Dynamik den Siegeszug der französischen Mathematik in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts begründen, während die englische Mathematik in ihrer Versteifung auf den Newtonschen Fluxionskalkül bis ins neunzehnte Jahrhundert hinein stagnierte. Zu diesem Erfolge der Pariser Akademie hatten die BERNOULLI entscheidend beigetragen, weshalb sie auch – viel mehr als EULER – von ihr als die «Ihren» empfunden wurden. Gleich der Genius LEIBNIZENS einem abenteuerlichen Seemann, der durch die gefährlichen Wogen und Stürme der philosophischen Spekulation steuernd mit divinatorischer Sicherheit sein Schiff zur Landung in dem erahnten Neuland bringt, so gleicht das Talent der beiden BERNOULLI der wagemutigen Pionierarbeit der ersten Eroberer des unerforschten Festlandes nach der geglückten Landung; jenes Land der Infinitesimalrechnung, das später in umfassender Weise von EULER kolonisiert werden sollte. Diese Pionierarbeit der BERNOULLI muß aber auf den Hintergrund des Spätkartesianismus abgebildet werden, um zu einer gerechten Würdigung ihrer Leistungen zu gelangen, deren Betrachtung die vorliegende Biographie gewidmet ist.

1. Die Eroberung des Leibnizschen Kalküls durch Jakob und Johann Bernoulli

Als LEIBNIZ 1684 in der von ihm mitbegründeten ersten deutschen wissenschaftlichen Zeitschrift, den Leipziger *Acta Eruditorum* (im folgenden A. E. abgekürzt), unter dem Titel *Nova methodus pro maximis et minimis* (A. E., Oktober 1684) seinen Differentialkalkül veröffentlichte, wurde er von niemandem verstanden, zumal seine Abhandlung durch sinnstörende Druckfehler entstellt und – vielleicht absichtlich – sehr unklar gehalten war. Einem allerdings gelang es, nach jahrelangem Durchdenken des Problems, den Sinn zu erfassen, und dieser eine war kein anderer als JAKOB

BERNOULLI, dessen mathematisches Talent sich schon früh geregt, aber gegen manigfache Widerstände durchzusetzen hatte. Auf den ausdrücklichen Wunsch des Vaters hatte er Theologie studiert, sich im geheimen aber dem Studium der Mathematik gewidmet, das sich freilich bei dem Fehlen des höheren mathematischen Unterrichtes in Basel nur auf die Elementarmathematik der Antike erstrecken konnte. Erst bei seiner zweiten Auslandsreise nach Holland und England lernte er die moderne kartesische Geometrie und die Infinitesimalverfahren des siebzehnten Jahrhunderts kennen. In Amsterdam erschienen dann 1682/83 seine ersten Hauptscriften *Conamen adovnandi novi systematis cometarum* und die *Dissertatio de gravitate aetheris*. In der ersten Schrift, welche übrigens schon in einem provisorischen deutschen Entwurf 1681 zu Basel erschienen war, rückt er vor allem dem astrologischen Aberglauben zu Leibe, indem er die Kometen als reguläre Mitglieder des Planetensystems erklärt, deren Bahn genau so wie die der Planeten zu berechnen sei. Allerdings verfällt JAKOB hierbei auf die merkwürdige, aber geometrisch in sich widerspruchsfrei durchzuführende Hypothese, daß die Kometen Satelliten eines weit außerhalb der Saturnbahn liegenden Planeten mit Kreisbahnen seien. Es ist immerhin bemerkenswert, daß aus Gründen geometrischer Konstruktion JAKOB – und zwar als Theologe – zur Hypothese eines transsaturnischen Planeten greift, obwohl noch der Basler *Syllabus Controversiarum* von 1662 das kopernikanische Weltssystem verdammt hatte. In der Dissertation über die «Schwere des Äthers» leitet er als überzeugter Kartesianer die Schwere aus dem Rückstoß einer feinen elastischen Flüssigkeit, des Äthers ab. Die kartesische Theorie modifizierend, erklärt er auch die Festigkeit der Körper aus diesem Ätherdruck, indem nach seiner Hypothese die Körper um so fester sind, je mehr Poren sie haben, in welche der Äther eindringen und dem äußeren Druck entgegenzuwirken vermag.

Nach seiner Rückkehr ins Vaterland faßte JAKOB den definitiven Entschluß, sich ausschließlich der Mathematik zu widmen. Er lehnte deshalb eine ihm angebotene Predigerstelle in Straßburg ab und eröffnete in Basel statt dessen Vorlesungen über Experimentalphysik. Unterdessen trieb er private Studien über die moderne Mathematik, welche seit DESCARTES eine besondere Entwicklung genommen und in LEIBNIZENS Arbeit von 1684 einen Höhepunkt erklossen hatte. LEIBNIZ hatte seinen Infinitesimalkalkül durch eine eigentümliche, in den metaphysischen Tiefen seiner Philosophie verankerte Form der Logik gefunden, welche die Relationslogik des DESCARTES in einer Richtung konsequent weiterführt, indem sie den Primat der logischen Relationen vor den Subjekten, zwischen denen diese bestehen, postuliert. Es ist nun bemerkenswert, daß sich bei JAKOB BERNOULLI ein ähnlicher geistiger Entwicklungsprozeß, wenn auch nur in abgeschwächter Form, vollzieht. Neben einigen physikalischen Arbeiten über BORELLIS Taucheratmung, Dichtebestimmung der Luft, Diskussionen über HUYGENS' Schwingungszentrum, Papinsches Perpetuum mobile u. a. füllen die Mehrzahl seiner Studien bis 1686 formallogische Abhandlungen aus: *Centum positionum philosophicarum* (1684), *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici* (1685), *Theses logicae* (1686), *Methodus ratiocinandi* (1686). Und während bei LEIBNIZ die mathematischen Probleme nur Spezialfälle einer Universallogik darstellen, so sind in diesen logischen Schriften JAKOBS kleine mathematische Einzelprobleme versteckt, welche die Entwicklung des Mathematikers charakterisieren. Dann kommen wie bei LEIBNIZ vor der Entdeckung des Kalküls Abhandlungen über unendliche Reihen,

zuerst die *Positiones arithmeticæ de seriebus infinitis*. Dieser Arbeit ist ein Epigramm vorangesetzt, das noch an die barocke Gedankenwelt LEIBNIZENS anklingt:

Ut non finitam seriem finita coercet
summula, & in nullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis haerent
corpore, & in angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

Von dieser Abhandlung erschienen noch vier Fortsetzungen (1692, 1695, 1698, 1704), welche wohl nur deshalb zeitlich so weit auseinanderliegen, weil sie JAKOB BERNOULLI als Thesen für seine Doktoranden verwenden wollte. Die Respondenten der dritten und fünften Disputation waren die nachmals berühmten Mathematiker JAKOB HERMANN und NICOLAUS I BERNOULLI. Von allen fünf Abhandlungen ist die erste die wichtigste. Sie enthält den Divergenzbeweis für die harmonische Reihe, den übrigens, wie JAKOB mitteilt, JOHANN zuerst gefunden hat. Ferner steht hier die berühmte Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n \geq 1 + n a, \quad (n = 1, 2, 3, \dots; a \geq 0)$$

welche JAKOB beim Vergleich von geometrischen mit arithmetischen Reihen findet. Die Rechnungen vollziehen sich zumeist mit und an divergenten Reihen, so daß in diesen Arbeiten unzulässige Operationen vorgenommen werden. An den entscheidenden Stellen aber findet der mathematische Instinkt JAKOBS stets das Richtige. 1687 hatte JAKOB als Nachfolger MEGERLINS die mathematische Professur in Basel erhalten, worauf er sich sofort in einem Schreiben an LEIBNIZ wandte und ihn um nähere Auskunft über dessen schwerverständliche Abhandlung von 1684 bat. Da LEIBNIZ wieder einmal auf einer seiner zahlreichen politischen Reisen war, wurde der Brief erst nach der Rückkehr nach Hannover am 24. September 1690 beantwortet, und JAKOB war genötigt, durch eigenes Nachdenken den Leibnizschen Kalkül nachzu-entdecken. Diese Nötigung mag aber nicht zuletzt JAKOBS Selbständigkeit in der Handhabung der neuen Infinitesimalrechnung bedingt haben. Und da JAKOB schon im Mai 1690 in den A. E. das Problem der Isochrone, welches LEIBNIZ 1686 den Kartesianern zur Lösung vorgelegt und welches nur HUYGENS mit den synthetischen Methoden gelöst hatte, mit der Differentialrechnung behandelte, konnte ihm LEIBNIZ in seinem Antwortbrief schreiben, daß JAKOB keiner Hilfe von außen mehr bedürfe, da er den Sinn der neuen Methode vollkommen erfaßt habe. JAKOB hatte auch seinen Bruder, den um dreizehn Jahre jüngeren JOHANN, in die eroberten Geheimnisse der neuen Methode eingeweiht, so daß LEIBNIZ sogleich zwei Mitkämpfer für seinen Kalkül fand. Und während der Vielbeschäftigte sich der detaillierten Ausarbeitung seiner Erfindung nicht mehr widmen konnte, sah er in Basel eine Frucht heranreifen, welche, selbst wenn er sie selber mit Liebe gepflegt hätte, auf dem durch den Dreißigjährigen Krieg verwüsteten Boden seiner Heimat kaum hätte gedeihen können. Neidlos hat er später deshalb das Verdienst der BERNOULLI um den neuen Kalkül anerkannt, welcher den beiden Brüdern ebensoviel verdanke wie ihm selbst.

Mit der Lösung des Problems der Isochrone war JAKOB mit einem Schlag in die Reihe der führenden Mathematiker seiner Zeit aufgerückt. JAKOB löst die Aufgabe ganz

im Leibnizschen Geist, indem er sich durch Anwendung der Fallgesetze GALILEIS auf die geometrischen Proportionalbeziehungen zwischen den Differentialen die Gleichung $dy \sqrt{b^2 y - a^3} = dx \sqrt{a^3}$ verschafft. Da die differentiellen Ausdrücke einander gleich sind, «*ergo et horum Integralia aequantur*», womit zum erstenmal der Ausdruck Integral – der übrigens von JOHANN stammt – in der Mathematik auftritt. Als Lösung der Differentialgleichung der Isochrone findet JAKOB eine semikubische Parabel:

$$\frac{2 b^2 y - 2 a^3}{3 b^2} \sqrt{b^2 y - a^3} = x \sqrt{a^3}.$$

Am Schluß dieser Abhandlung stellte nun JAKOB die Frage nach der Gestalt der Kettenlinie, die GALILEI für eine Parabel hielt. Doch nicht er, sondern JOHANN löste diese Aufgabe, der unterdessen nicht müßig geblieben war. Aufgestachelt durch den eifersüchtigen Ehrgeiz, es dem älteren Bruder mindestens gleichzutun, war er teilweise sogar selbstständig in den Leibnizschen Kalkül eingedrungen, und zwar neben seinem medizinischen Fachstudium, von dem eine Abhandlung *Dissertatio de effervescentia et fermentatione* (1690) zeugt, in welcher er nach der kartesischen Theorie von den vier Urelementen die Erscheinungen der Gärung zu erklären versuchte. Außer ihm hatten nur LEIBNIZ und HUYGENS, dieser aber noch mit der «antiken» Methode, das Problem bewältigt.

Die Lösung von JOHANN läßt sich heute wie folgt skizzieren:

Es sei AB ein beliebiges Stück der Kettenlinie, wovon die Längeneinheit überall das Gewicht q besitze. Das Kettenelement sei bei B horizontal, bei C unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt, und der Bogen BC habe die Länge s , so daß sein Gewicht qs ist. Ferner seien die Koordinaten so gewählt, daß $BD = x$ und $DC = y$ ist. Die Spannung der Kettenlinie in tangentialer Richtung sei \mathfrak{S} . Man kann sie in eine horizontale Komponente \mathfrak{H} und in eine vertikale Komponente \mathfrak{V} zerlegen. Nun ist wegen der Komponentendarstellung geometrisch

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S} \cos \alpha = \mathfrak{S} \frac{dy}{ds}, \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{S} \sin \alpha = \mathfrak{S} \frac{dx}{ds}.$$

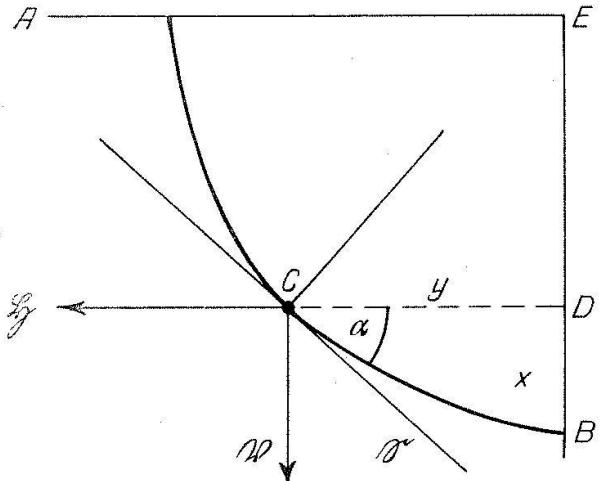
Da nun in Richtung AE $d(\mathfrak{S} \cos \alpha) = 0$ ist, folgt $\mathfrak{H} = \text{const} = q a$, während die Vertikalkomponente proportional der Bogenlänge $= q s$ ist. Damit folgt $\mathfrak{H}/\mathfrak{V} = a/s = dy/dx$ und mit Benutzung der Beziehung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ die Differentialgleichung der Kettenlinie

$$dy = \frac{a dx}{\sqrt{2 a x + x^2}},$$

die sich als eine Logarithmika entpuppt:

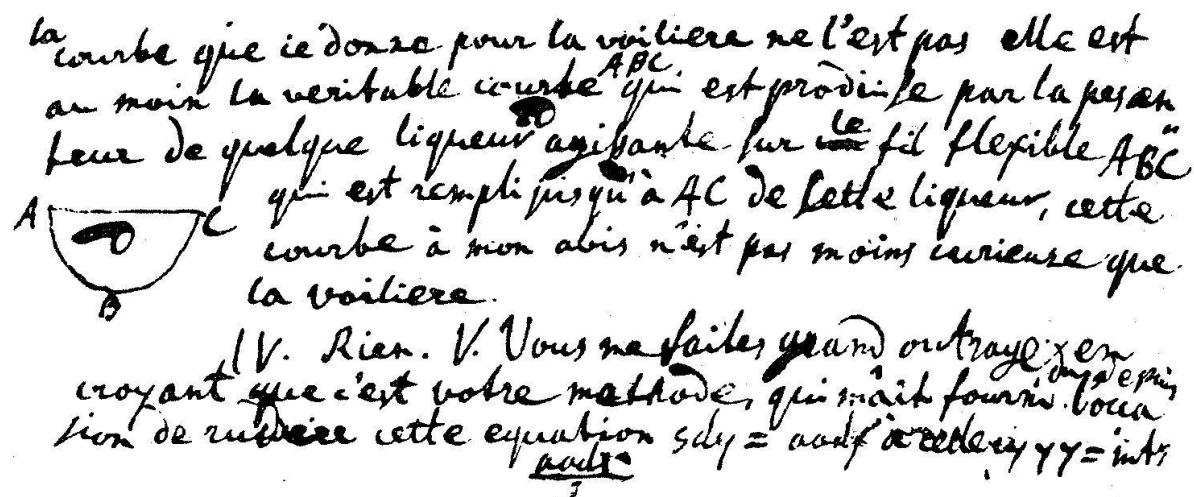
$$y = a \ln \left(\frac{a + x + \sqrt{2 a x + x^2}}{a} \right),$$

die JOHANN 1691 in Unkenntnis der Logarithmusfunktion freilich noch als Parabelbogen und Hyperbelinhalt darstellt. Nur im Falle, wo $s = q y$ ist, wird die Kettenlinie zu



einer Parabel, als welche sie GALILEI ansah. Die beiden BERNOULLI lösten das Problem auch in dem allgemeinen Fall, wo das Gewicht q eine Funktion des Kurvenpunkts $q(x)$ ist, die Kettenlinie also ungleich schwer ist.

JAKOB erkannte dann später (1691) und in der Arbeit *Curvatura veli* (1692), daß auch die Segelkurve eine Kettenlinie ist. Auch JOHANN hatte die Gestalt der Segelkurve bestimmt, und er unterläßt nicht, in seiner *Solution du problème de la courbure que fait une voile enflée par le vent* zu betonen, daß er es gewesen sei, welcher die von JAKOB aus den mechanischen Bedingungen des Problems hergeleitete Differentialgleichung 2. Ordnung $a ds d^2x = dy^3$ hat lösen können, während sie für JAKOB zu



Brief von JOHANN BERNOULLI an JAKOB, aus Genf, vom 17. Juni 1691. Enthält u. a. die Integration der Differentialgleichung der Velaria. (Basel U. B. Codex Gothanus Chart B 673, Blatt 41).

schwer gewesen sei. Auf das Drängen JAKOBS hin hatte sich JOHANN mit dieser komplizierten Differentialgleichung abgegeben und plötzlich bemerkt, daß man die Differentialgleichung der Kettenlinie auch auf diese Form bringen kann — und der gewandte Formalist JOHANN schoß den Vogel ab, bevor JAKOB die ihm unterdessen auch geglückte Lösung hatte publizieren können.

Mit seiner erfolgreichen Auslandsreise 1691/92 trug JOHANN keineswegs dazu bei, die bald schon in der Öffentlichkeit sich bemerkbar machenden Eifersüchteleien zwischen den beiden Brüdern zu dämpfen. JOHANN war in Paris von dem Mathematikerkreis um MALEBRANCHE mit äußerster Zuvorkommenheit als ein Repräsentant des neuen Leibnizschen Kalküls empfangen worden; in Basel machte es großen Eindruck, daß sich der illustre Marquis DE L'HÔPITAL, damals wohl der begabteste Mathematiker Frankreichs, von JOHANN hatte in die Infinitesimalrechnung einführen lassen. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die *Analyse des infiniment petits* (1696), mit welchem der Marquis seinen Namen in der Geschichte der Mathematik unsterblich machte, ist aus diesen Vorlesungen JOHANNS und dem anschließenden Briefwechsel entstanden.

Die von CANTOR noch angezweifelte Autorschaft JOHANNS an diesem Werk läßt sich heute einerseits durch das Basler Manuskript seiner Differentialrechnung, das 1921 von SCHAFHEITLIN aufgefunden wurde, und andererseits durch die Korrespondenz JOHANNS mit dem Marquis beweisen, welche demnächst als erster Band in der

Edition der Basler Bernoulli-Kommission erscheinen wird. CANTOR hatte wegen des zweifellos prahlerischen Charakters JOHANNS dessen Beteuerungen der Priorität keinen Kredit gegeben; er konnte nicht wissen, daß weniger der Wahrheitsliebe des Basler Mathematikers zu mißtrauen als seiner Geldliebe mancherlei zuzutrauen war: gegen eine stattliche Pension hatte sich JOHANN verpflichtet, ausschließlich dem Marquis seine neuesten Entdeckungen in der Infinitesimalrechnung mit Erläuterungen mitzuteilen. Daß dieser nun, anstatt sich damit zu begnügen, in Abhandlungen über die neue Analysis des Unendlichen mit den Entdeckungen JOHANNS in der vordersten Front der modernen Mathematiker zu brillieren, noch seinen Namen mit dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung verewigen wollte, konnte BERNOULLI nicht ahnen, aber er mußte zu Lebzeiten des Marquis infolge seines «Vertrages» dazu schweigen. Erst als nach dessen Tode SAURIN bei einer Auseinandersetzung mit ROLLE die heute noch «l'Hôpitalsche Regel» genannte Methode zur Bestimmung des Wertes unbestimmter Ausdrücke, wie $0/0$, dem Marquis zugeschrieben hatte, reklamierte er öffentlich in einer Abhandlung von 1704 in den A.E. Gleichzeitig schüttete er dem Freund VARIGNON das Herz aus und beklagte sich über das ihm von DE L'HÔPITAL widerfahrene Unrecht. Da aber JOHANN die Hintergründe seines Schweigens zu Lebzeiten des Marquis nicht öffentlich preisgeben wollte, so kam er, als er erst nach dem Tode seines «Mäzens» reklamierte, in den Geruch eines unfairen und ruhmredigen Zeitgenossen.

Die Abhandlungen der beiden Brüder BERNOULLI, mit denen sie die Leibnizsche Infinitesimalrechnung bis zu ihrem offenen Streite 1697 ausbauten, lassen schon die Eigenart der Begabung der beiden Mathematiker erkennen: JOHANN entwickelt vor allem die formale Fruchtbarkeit des neuen Kalküls, wobei er besonders die Integralrechnung ausbaut, JAKOB vertieft sich in geometrische Probleme, wobei er am Einzelfall allgemeine Sätze findet.

Die geometrischen Probleme, mit denen sich JAKOB abgab, betrafen vor allem die Theorie der Evoluten, der Kata- und Diakaustiken und der Elastica. Die erfolgreiche Behandlung dieser Kurven verdankte JAKOB einerseits der konsequenten Einführung der Polarkoordinaten (*Specimen calculi differentialis*, A. E. 1691) in die Analysis und andererseits seiner Kenntnis des analytischen Ausdrucks für den Krümmungsradius $\rho = ds^3/dy d^2x$, des *Theorema aureum* (*Curvatura laminae elasticae*, 1694). Dieser Ausdruck läßt sich übrigens leicht in den gebräuchlichen umrechnen, wenn man y mit x vertauscht und also

$$\frac{ds^3}{dx d^2y} = \frac{ds^3}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+y')^{3/2}}{y''}$$

schreibt. Zur Einführung der Polarkoordinaten gelangt JAKOB 1691, indem er auf die Parabel $x^2 = 2\rho y$ die Transformation $x = r$, $y = \vartheta$ ausübt und somit aus einer Parabel eine parabolische Spirale ableitet. Diese Transformation faßt er als ein Zusammenbiegen der Achse der Spirale auf, so daß die Abszissen gekrümmmt werden, die Ordinaten aber als Radienvektoren senkrecht zu dieser Achse bleiben. In Fortsetzung dieser Untersuchung wendet sich JAKOB der logarithmischen Spirale zu (*Spira mirabilis*, A. E. 1692), wo er jene merkwürdigen Eigenschaften entdeckte, die ihn so beeindruckten, daß er sie als Motiv für sein künftiges Epitaph verwendete. Er entdeckte bei dieser Kleinschen *W*-Kurve die ersten fundamentalen Invarianzeigenschaften gegenüber projektiven Transformationen: Die Evolute und die Kaustik der logarith-

mischen Spirale ist wieder eine logarithmische Spirale. Auf seinem Epitaph, der heute im Kreuzgang des Basler Münsters zu sehen ist, steht deshalb das Epigramm: *Eadem mutata resurgo*, welches die unendliche Wiederkehr des Gleichen als Unsterblichkeitsymbol darstellen soll.

Von Einzelheiten aus den Arbeiten JAKOBS ist die parazentrische Isochrone zu erwähnen. Sie ist in Verallgemeinerung des Problems der Leibnizschen Isochrone — mit welchem JAKOB übrigens in der Infinitesimalrechnung debütiert hatte — die Lösungskurve für ein radialzentrisches Kraftfeld in bezug auf den Erdmittelpunkt statt des Parallellinienkraftfeldes an der Erdoberfläche in der ursprünglichen Aufgabe. In diesem allgemeinen Fall JAKOBS wird die Isochrone eine komplizierte Logarithmika mit einem asymptotischen Windungspunkt im Erdzentrum. Als Hilfskurve seines Problems führt JAKOB hierbei auch die Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (A. E. 1694) ein. Eine weitere wichtige Einzelheit ist der für die Ingenieurmechanik fundamentale Satz, den JAKOB bei seinen zahlreichen Untersuchungen über die elastische Linie gefunden hat. Wenn ein elastischer Stab durch äußere Kräfte gebogen wird, so nimmt seine Achse (d. i. der geometrische Ort der Schwerpunkte der Querschnitte) eine solche Form an, daß das statische Moment der äußeren Kräfte umgekehrt proportional dem Krümmungsradius an dem betreffenden Punkt der Achsenkurve ist, welche die «elastische Linie» genannt wird. Hierbei muß vorausgesetzt werden, daß bei kleinen Durchbiegungen ein ebener Querschnitt des Stabes eben bleibt.

In dieser Zeit erst trat JOHANN mit größeren mathematischen Arbeiten an die Öffentlichkeit. Nach seiner Rückkehr aus Paris hatte er mit einer Dissertation *De motu muscularum* 1694 den medizinischen Doktorhut in Basel erworben. Diese Abhandlung ist übrigens trotz des medizinischen Themas mathematisch und ganz im Geiste des Iatromathematikers BORELLI verfaßt. JOHANN entwickelt dort eine chemische Theorie der Muskelkontraktion, die geradezu modern anmutet. Das Aufblähen der Muskelfasern läßt er durch Gärungsprozesse entstehen, wobei er die Meridiankurve der aufgeblähten Oberfläche der Fasern berechnet.

JOHANN betrachtete zeitlebens zwei Gebiete der Infinitesimalrechnung als seine ureigene Domäne: die Integralrechnung und den «Exponentialkalkül». In seinem Versuch, die Infinitesimalrechnung vor allem formal weiter auszubauen, fand er bei LEIBNIZ selber die vollste Unterstützung. Schon 1693 hatte JOHANN eine Korrespondenz mit dem Meister begonnen, welche die umfangreichste werden sollte, die der große Philosoph überhaupt je gepflogen hatte. Am 2. September 1694 konnte ihm JOHANN mitteilen, daß es ihm gelungen sei, eine allgemeine Reihenentwicklung für Integrationen zu finden, eine *series universalissima, qae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit*, indem

$$\int_0^x \varphi(x) dx = x \varphi(x) - \frac{x^2}{2!} \varphi'(x) + \frac{x^3}{3!} \varphi''(x) - \dots$$

sei (*Additamentum*, A. E. 1694). Diese Reihe beruht auf dem allgemeinen Satz von LEIBNIZ für die Differentiation eines Produktes

$$d^m[f(x) g(x)] = (df + dg)^{(m)} = \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} d^{m-\nu} f d^\nu g,$$

wenn man $m = -1$, $g = dx$ und $f = \varphi(x)$ setzt und weiter noch die Operatoren $d^{-p} = 1/d^p = \int^p$ einführt. Einen Großteil der Korrespondenz mit LEIBNIZ zwischen 1694 und 1696 füllen derartige Formalismen aus.

Im Zusammenhang mit der Integralrechnung als Umkehroperation der Differentiation stehen JOHANNS Bemühungen um die Integration der Differentialgleichungen. Hatte er schon in Paris mit der anonymen Lösung des berühmten de-Beauneschen Problems, welches seinerzeit schon dem CARTESIUS als erstes inverses Tangentenproblem aufgegeben war, die Leistungsfähigkeit des Leibnizschen Kalküls demonstriert (J. d. S. 1692), so zeigte er fünf Jahre später, daß der neue Kalkül auch viel kompliziertere Differentialgleichungen zu lösen imstande ist: JAKOB hatte im Anschluß an das de-Beaunesche Problem die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^n = 0,$$

welche man heute die Bernoullische heißt, aufgegeben und selber umständlich gelöst. Hier lief ihm der formal gewandtere JOHANN wiederum einmal den Rang ab, indem letzterer diese Gleichung mit dem Ansatz löste, die gesuchte Lösungsfunktion als Produkt zweier unbekannter Funktionen aufzufassen $y = M(x) \cdot N(x)$, so daß man in der dann resultierenden Gleichung

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + P(x)dx + (M \cdot N)^{n-1}Q(x)dx = 0$$

wegen der Willkürlichkeit der beiden Funktionen einer von ihnen, etwa M , noch die Nebenbedingung $dM/M + P(x)dx = 0$, woraus $M = e^{-\int P(x)dx}$ folgt, auferlegen kann. Setzt man M in die Bedingungsgleichung ein, so ist nur noch eine lineare Differentialgleichung in N zu lösen.

Der «Exponentialkalkül», auf den JOHANN so stolz war, ist nichts anderes als der Infinitesimalkalkül der Exponentialfunktionen. Als NIEUWENTIIT in einer kritischen Schrift gegen die mangelnden logischen Grundlagen des Leibnizschen Kalküls besonders auf das Fehlen der Differentiation der Exponentialfunktion x^y im Leibnizschen Kalkül hinwies, entwickelte JOHANN in einer besonderen Abhandlung (*Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, A. E. 1697) den «Exponentialkalkül», dessen Grundformel in der Gleichung

$$d(x^y) = x^y \log x dy + x^{y-1} dx$$

besteht.

2. Das Problem der Brachystochrone und die Ursprünge der Variationsrechnung

Da JOHANN keine Aussichten hatte, in Basel eine mathematische Professur zu erhalten, weil der Lehrstuhl von JAKOB besetzt war, nahm er mit Freuden eine Berufung nach Groningen an, welche ihm HUYGENS vermittelt hatte. Am 1. September 1695 reiste er mit seiner Frau und dem erst sieben Monate alten Sohn NICOLAUS II nach Holland ab, nicht ohne Groll gegen JAKOB im Herzen, der sich mit Sticheleien an der früheren Prahlgerei JOHANNS bei der Differentialgleichung der Segelkurve zu rächen begonnen hatte, indem er JOHANN als seinen Schüler bezeichnete, der schließlich nur das habe zum besten geben können, was er von JAKOB gelernt habe. Aus Groningen