Johann und Jakob Bernoulli

Autor(en): **Fleckenstein, J.O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **6/7 (1949)**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4707

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

EINLEITUNG

Kein Geringerer als ERNST MACH hat in seiner klassischen *Geschichte der Mechanik* bemerkt, daß sich in den beiden Brüdern BERNOULLI die beiden Seiten des wissenschaftlichen Talentes, nämlich die kritische Tiefe und die schöpferische Phantasie, verschieden verteilt vorfinden, welche, wenn in ungewöhnlicher Stärke in einem einzigen Haupte vereinigt, die großen Genien der exakten Wissenschaften, wie NEWTON und GALILEI, hervorbringen. Mit dieser treffenden psychologischen Bemerkung MACHS soll nun nicht nur die gleichzeitige Behandlung zweier Mathematiker in einer gemeinsamen Biographie gerechtfertigt, sondern zugleich auch die historische Bedeutung der beiden Brüder BERNOULLI angetönt werden. Sie reicht in der Tat fast an die der epochemachenden Taten der Klassiker der mathematischen Wissenschaften heran, wenn man die Leistungen der beiden Brüder zusammennimmt. Diese aber müssen zusammengenommen werden, weil die historische Leistung der beiden BERNOULLI, der mathematische Ausbau des von LEIBNIZ entdeckten Infinitesimalkalküls, ein gemeinsames Werk war.

Die Kenntnis des Geheimnisses der Leibnizschen Analysis des Unendlichen, welche sich JAKOB und JOHANN BERNOULLI Schritt für Schritt eroberten, gab den beiden Brüdern schon zu ihren Lebzeiten einen mit einem Nimbus umgebenen Namen, den noch zwei spätere Generationen in Ehren halten sollten. Das Phänomen der Mathematikerdynastie der BERNOULLI, welches sich am ehesten mit der Musikerdynastie der BACH vergleichen läßt, wuchs jedoch nur infolge des «Familiengeheimnisses» des Leibnizschen Infinitesimalkalküls zu der bekannten kulturgeschichtlichen Bedeutung heran. Denn das Phänomen einer Familiendynastie ist in der Geschichte der exakten Wissenschaften an sich nicht so ungewöhnlich; es genügt, an die Familien der CASSINI, STRUVE und GREGORY zu erinnern.

Dieses mathematische «Familiengewerbe» hat aber zugleich der Stadt Basel einen unvergänglichen Ruhm gesichert. In der ersten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts spielte der Kreis der Basler Mathematiker, zu denen außer den BERNOULLI JAKOB HERMANN und LEONHARD EULER gehörten, eine noch größere Rolle als ehedem der Florentiner Kreis der Mathematiker um GALILEI oder der Pariser Kreis der kartesianischen Akademiker im siebzehnten Jahrhundert. Ja, die Infinitesimalverfahren dieser Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts erscheinen nur als ein Vorspiel zu dem großen Konzert, welches der Basler Kreis der BERNOULLI und EULER mit dem Instrument des Leibnizschen Kalküls spielen sollte. Der Genius EULERS ist ohne die BERNOULLI nicht denkbar: JOHANN BERNOULLI hatte ihm als sein Lehrer schon den bis ins Detail entwickelten Infinitesimalkalkül übermittelt, welchen EULER in seiner ungeheuren Produktionskraft auf eine Unzahl von Einzelproblemen der Mathematik, Physik und Technik anwenden sollte. Der Keim vieler Ideen EULERS liegt in den Bernoullischen Arbeiten. Stellt die Entdeckung des Kalküls durch LEIBNIZ ideengeschichtlich den Abschluß der Mathematik des siebzehnten Jahrhunderts dar, so leiten die Brüder BERNOULLI durch ihre Pioniertätigkeit der ersten Ausarbeitung dieses Kalküls zum achtzehnten Jahrhundert über. Und indem sie den Kalkül aus dem Leibnizschen Gewand einer barocken Metaphysik herauslösten – deren Bedeutung noch am ehesten von allen Mathematikern JAKOB BERNOULLI ahnte – präparierten sie ihn zugleich zu dem Werkzeug des späteren Jahrhunderts der Mechanistik.

Vor diesem ideengeschichtlichen Hintergrund standen die beiden BERNOULLI eindeutig auf der Seite LEIBNIZENS gegen den Newtonianismus der englischen Mathematiker; eine Stellungnahme, welche übrigens sogar noch bei EULER ihre Spuren hinterlassen hat. Da sie aber keineswegs imstande waren, den philosophischen Hintergrund der Mathematik LEIBNIZENS zu erfassen, mußten sie automatisch in das Fahrwasser des französischen Spätkartesianismus geraten, als dessen bedeutendste mathematische Repräsentanten sie übrigens von der Pariser Akademie selbst empfunden wurden. Unter ihrer Hand wurden die Leibnizschen Infinitesimalia wiederum unter das kartesische Joch des «Geometrismus des Extensiven» gezwungen und damit zu aktual-unendlichkleinen Größen deklariert. Die sich damit allerdings einstellenden logischen Schwierigkeiten wurden durch die praktischen Ergebnisse des zwar widerspruchsvollen, aber wie ein Zauberstab immer zu richtigen und auf anderen Wegen nicht zu erreichenden Resultaten führenden Kalküls verdeckt. Führten diese logischen Schwierigkeiten die BERNOULLI und vor allem ihre französischen Adepten in Frankreich zwar in leidige Diskussionen mit kartesischen Zeloten der Akademie, so darf doch nicht übersehen werden, daß es sich dabei freilich nur um einen Hausstreit zwischen dem orthodoxen und dem Spätkartesianismus handelte, welcher in den BERNOULLI willkommene Mitstreiter erblickte. Es ist hervorzuheben, daß es nur Mathematiker aus dem Kreise um MALEBRANCHE waren, dessen Philosophie sich noch am ehesten den Leibnizschen Ideen öffnen konnte, welche wie VARIGNON und DE L'HÔPITAL sich für den neuen Kalkül interessierten, während die repräsentativen Mathematiker der ersten Akademie (1666 bis 1699), die DE LA HIRE, ROLLE, GALLOYS S. J., sich ablehnend, ja sogar feindlich gegenüber dem «Kalkül der Ausländer» verhielten. Durch das «Einfallstor» MALEBRANCHE wurde von den BERNOULLI das trojanische Pferd der Leibnizschen Mathematik in die Akademie des französischen Spätkartesianismus gebracht. Diese gleiche Akademie sollte aber später nach Abkehr von der kartesischen Naturphilosophie durch die Anwendung der formalen Prinzipien des Leibnizschen Kalküls auf den neuen Inhalt der Newtonschen Dynamik den Siegeszug der französischen Mathematik in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts begründen, während die englische Mathematik in ihrer Versteifung auf den Newtonschen Fluxionskalkül bis ins neunzehnte Jahrhundert hinein stagnierte. Zu diesem Erfolge der Pariser Akademie hatten die BERNOULLI entscheidend beigetragen, weshalb sie auch – viel mehr als EULER – von ihr als die «Ihren» empfunden wurden. Gleicht der Genius LEIBNIZENS einem abenteuerlichen Seemann, der durch die gefährlichen Wogen und Stürme der philosophischen Spekulation steuernd mit divinatorischer Sicherheit sein Schiff zur Landung in dem erahnten Neuland bringt, so gleicht das Talent der beiden BERNOULLI der wagemutigen Pionierarbeit der ersten Eroberer des unerforschten Festlandes nach der geglückten Landung; jenes Land der Infinitesimalrechnung, das später in umfassender Weise von EULER kolonisiert werden sollte. Diese Pionierarbeit der BERNOULLI muß aber auf den Hintergrund des Spätkartesianismus abgebildet werden, um zu einer gerechten Würdigung ihrer Leistungen zu gelangen, deren Betrachtung die vorliegende Biographie gewidmet ist.

1. Die Eroberung des Leibnizschen Kalküls durch Jakob und Johann Bernoulli

Als LEIBNIZ 1684 in der von ihm mitbegründeten ersten deutschen wissenschaftlichen Zeitschrift, den Leipziger *Acta Eruditorum* (im folgenden A. E. abgekürzt), unter dem Titel *Nova methodus pro maximis et minimis* (A. E., Oktober 1684) seinen Differentialkalkül veröffentlichte, wurde er von niemandem verstanden, zumal seine Abhandlung durch sinnstörende Druckfehler entstellt und – vielleicht absichtlich – sehr unklar gehalten war. Einem allerdings gelang es, nach jahrelangem Durchdenken des Problems, den Sinn zu erfassen, und dieser eine war kein anderer als JAKOB

BERNOULLI, dessen mathematisches Talent sich schon früh geregt, aber gegen mannigfache Widerstände durchzusetzen hatte. Auf den ausdrücklichen Wunsch des Vaters hatte er Theologie studiert, sich im geheimen aber dem Studium der Mathematik gewidmet, das sich freilich bei dem Fehlen des höheren mathematischen Unterrichtes in Basel nur auf die Elementarmathematik der Antike erstrecken konnte. Erst bei seiner zweiten Auslandsreise nach Holland und England lernte er die moderne kartesische Geometrie und die Infinitesimalverfahren des siebzehnten Jahrhunderts kennen. In Amsterdam erschienen dann 1682/83 seine ersten Hauptschriften *Conamen adovnandi novi systematis cometarum* und die *Dissertatio de gravitate aetheris*. In der ersten Schrift, welche übrigens schon in einem provisorischen deutschen Entwurf 1681 zu Basel erschienen war, rückt er vor allem dem astrologischen Aberglauben zu Leibe, indem er die Kometen als reguläre Mitglieder des Planetensystems erklärt, deren Bahn genau so wie die der Planeten zu berechnen sei. Allerdings verfällt JAKOB hierbei auf die merkwürdige, aber geometrisch in sich widerspruchsfrei durchzuführende Hypothese, daß die Kometen Satelliten eines weit außerhalb der Saturnbahn liegenden Planeten mit Kreisbahnen seien. Es ist immerhin bemerkenswert, daß aus Gründen geometrischer Konstruktion JAKOB – und zwar als Theologe – zur Hypothese eines transsaturnischen Planeten greift, obwohl noch der Basler *Syllabus Controversiarum* von 1662 das kopernikanische Weltsystem verdammt hatte. In der Dissertation über die «Schwere des Äthers» leitet er als überzeugter Kartesianer die Schwere aus dem Rückstoß einer feinen elastischen Flüssigkeit, des Äthers ab. Die kartesische Theorie modifizierend, erklärt er auch die Festigkeit der Körper aus diesem Ätherdruck, indem nach seiner Hypothese die Körper um so fester sind, je mehr Poren sie haben, in welche der Äther eindringen und dem äußeren Druck entgegenzuwirken vermag.

Nach seiner Rückkehr ins Vaterland faßte JAKOB den definitiven Entschluß, sich ausschließlich der Mathematik zu widmen. Er lehnte deshalb eine ihm angebotene Predigerstelle in Straßburg ab und eröffnete in Basel statt dessen Vorlesungen über Experimentalphysik. Unterdessen trieb er private Studien über die moderne Mathematik, welche seit DESCARTES eine besondere Entwicklung genommen und in LEIBNIZENS Arbeit von 1684 einen Höhepunkt erklommen hatte. LEIBNIZ hatte seinen Infinitesimalkalkül durch eine eigentümliche, in den metaphysischen Tiefen seiner Philosophie verankerte Form der Logik gefunden, welche die Relationslogik des DESCARTES in einer Richtung konsequent weiterführt, indem sie den Primat der logischen Relationen vor den Subjekten, zwischen denen diese bestehen, postuliert. Es ist nun bemerkenswert, daß sich bei JAKOB BERNOULLI ein ähnlicher geistiger Entwicklungsprozeß, wenn auch nur in abgeschwächter Form, vollzieht. Neben einigen physikalischen Arbeiten über BORELLIS Taucheratmung, Dichtebestimmung der Luft, Diskussionen über HUYGENS' Schwingungszentrum, Papinsches Perpetuum mobile u. a. füllen die Mehrzahl seiner Studien bis 1686 formallogische Abhandlungen aus: *Centum positionum philosophicarum* (1684), *Parallelismus ratiocinii logici et algebraici* (1685), *Theses logicae* (1686), *Methodus ratiocinandi* (1686). Und während bei LEIBNIZ die mathematischen Probleme nur Spezialfälle einer Universallogik darstellen, so sind in diesen logischen Schriften JAKOBS kleine mathematische Einzelprobleme versteckt, welche die Entwicklung des Mathematikers charakterisieren. Dann kommen wie bei LEIBNIZ vor der Entdeckung des Kalküls Abhandlungen über unendliche Reihen,

zuerst die *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis*. Dieser Arbeit ist ein Epigramm vorangesetzt, das noch an die barocke Gedankenwelt LEIBNIZENS anklingt:

Ut non finitam seriem finita coercet
summula, & in nullo limite limes adest:
Sic modico immensi vestigia Numinis haerent
corpore, & in angusto limite limes abest.
Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!
In parvo immensum cernere, quanta, Deum!

Von dieser Abhandlung erschienen noch vier Fortsetzungen (1692, 1695, 1698, 1704), welche wohl nur deshalb zeitlich so weit auseinanderliegen, weil sie JAKOB BERNOULLI als Thesen für seine Doktoranden verwenden wollte. Die Respondenten der dritten und fünften Disputation waren die nachmals berühmten Mathematiker JAKOB HERMANN und NICOLAUS I BERNOULLI. Von allen fünf Abhandlungen ist die erste die wichtigste. Sie enthält den Divergenzbeweis für die harmonische Reihe, den übrigens, wie JAKOB mitteilt, JOHANN zuerst gefunden hat. Ferner steht hier die berühmte Bernoullische Ungleichung

$$(1 + a)^n \geqq 1 + n\,a, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ a \geqq 0)$$

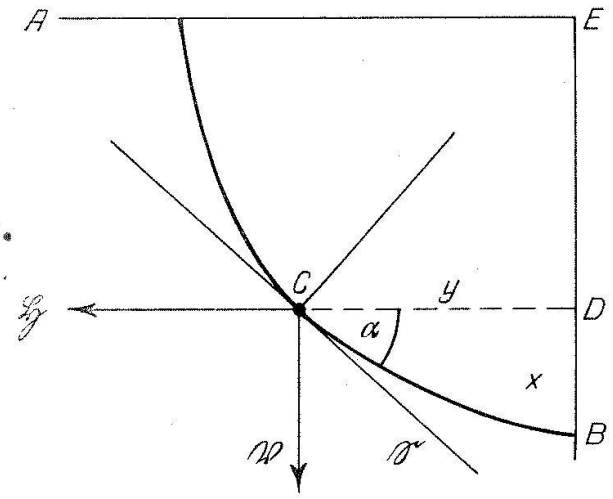
welche JAKOB beim Vergleich von geometrischen mit arithmetischen Reihen findet. Die Rechnungen vollziehen sich zumeist mit und an divergenten Reihen, so daß in diesen Arbeiten unzulässige Operationen vorgenommen werden. An den entscheidenden Stellen aber findet der mathematische Instinkt JAKOBS stets das Richtige. 1687 hatte JAKOB als Nachfolger MEGERLINS die mathematische Professur in Basel erhalten, worauf er sich sofort in einem Schreiben an LEIBNIZ wandte und ihn um nähere Auskunft über dessen schwerverständliche Abhandlung von 1684 bat. Da LEIBNIZ wieder einmal auf einer seiner zahlreichen politischen Reisen war, wurde der Brief erst nach der Rückkehr nach Hannover am 24. September 1690 beantwortet, und JAKOB war genötigt, durch eigenes Nachdenken den Leibnizschen Kalkül nachzuentdecken. Diese Nötigung mag aber nicht zuletzt JAKOBS Selbständigkeit in der Handhabung der neuen Infinitesimalrechnung bedingt haben. Und da JAKOB schon im Mai 1690 in den A. E. das Problem der Isochrone, welches LEIBNIZ 1686 den Kartesianern zur Lösung vorgelegt und welches nur HUYGENS mit den synthetischen Methoden gelöst hatte, mit der Differentialrechnung behandelte, konnte ihm LEIBNIZ in seinem Antwortbrief schreiben, daß JAKOB keiner Hilfe von außen mehr bedürfe, da er den Sinn der neuen Methode vollkommen erfaßt habe. JAKOB hatte auch seinen Bruder, den um dreizehn Jahre jüngeren JOHANN, in die eroberten Geheimnisse der neuen Methode eingeweiht, so daß LEIBNIZ sogleich zwei Mitkämpfer für seinen Kalkül fand. Und während der Vielbeschäftigte sich der detaillierten Ausarbeitung seiner Erfindung nicht mehr widmen konnte, sah er in Basel eine Frucht heranreifen, welche, selbst wenn er sie selber mit Liebe gepflegt hätte, auf dem durch den Dreißigjährigen Krieg verwüsteten Boden seiner Heimat kaum hätte gedeihen können. Neidlos hat er später deshalb das Verdienst der BERNOULLI um den neuen Kalkül anerkannt, welcher den beiden Brüdern ebensoviel verdanke wie ihm selbst.

Mit der Lösung des Problems der Isochrone war JAKOB mit einem Schlag in die Reihe der führenden Mathematiker seiner Zeit aufgerückt. JAKOB löst die Aufgabe ganz

im Leibnizschen Geist, indem er sich durch Anwendung der Fallgesetze GALILEIS auf die geometrischen Proportionalbeziehungen zwischen den Differentialen die Gleichung $dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ verschafft. Da die differentiellen Ausdrücke einander gleich sind, «*ergo et horum Integralia aequantur*», womit zum erstenmal der Ausdruck Integral – der übrigens von JOHANN stammt – in der Mathematik auftritt. Als Lösung der Differentialgleichung der Isochrone findet JAKOB eine semikubische Parabel:

$$\frac{2b^2 y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2 y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

Am Schluß dieser Abhandlung stellte nun JAKOB die Frage nach der Gestalt der Kettenlinie, die GALILEI für eine Parabel hielt. Doch nicht er, sondern JOHANN löste diese Aufgabe, der unterdessen nicht müßig geblieben war. Aufgestachelt durch den eifersüchtigen Ehrgeiz, es dem älteren Bruder mindestens gleichzutun, war er teilweise sogar selbständig in den Leibnizschen Kalkül eingedrungen, und zwar neben seinem medizinischen Fachstudium, von dem eine Abhandlung *Dissertatio de effervescentia et fermentatione* (1690) zeugt, in welcher er nach der kartesischen Theorie von den vier Urelementen die Erscheinungen der Gärung zu erklären versuchte. Außer ihm hatten nur LEIBNIZ und HUYGENS, dieser aber noch mit der «antiken» Methode, das Problem bewältigt.



Die Lösung von JOHANN läßt sich heute wie folgt skizzieren:

Es sei AB ein beliebiges Stück der Kettenlinie, wovon die Längeneinheit überall das Gewicht q besitze. Das Kettenelement sei bei B horizontal, bei C unter dem Winkel α gegen die Horizontale geneigt, und der Bogen BC habe die Länge s, so daß sein Gewicht qs ist. Ferner seien die Koordinaten so gewählt, daß $BD = x$ und $DC = y$ ist. Die Spannung der Kettenlinie in tangentieller Richtung sei $\mathfrak{S}$. Man kann sie in eine horizontale Komponente $\mathfrak{H}$ und in eine vertikale Komponente $\mathfrak{V}$ zerlegen. Nun ist wegen der Komponentendarstellung geometrisch

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{S}\cos\alpha = \mathfrak{S}\frac{dy}{ds}, \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{S}\sin\alpha = \mathfrak{S}\frac{dx}{ds}.$$

Da nun in Richtung AE $d(\mathfrak{S}\cos\alpha) = 0$ ist, folgt $\mathfrak{H} = \text{const} = q\,a$, während die Vertikalkomponente proportional der Bogenlänge $= qs$ ist. Damit folgt $\mathfrak{H}/\mathfrak{V} = a/s = dy/dx$ und mit Benutzung der Beziehung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ die Differentialgleichung der Kettenlinie

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

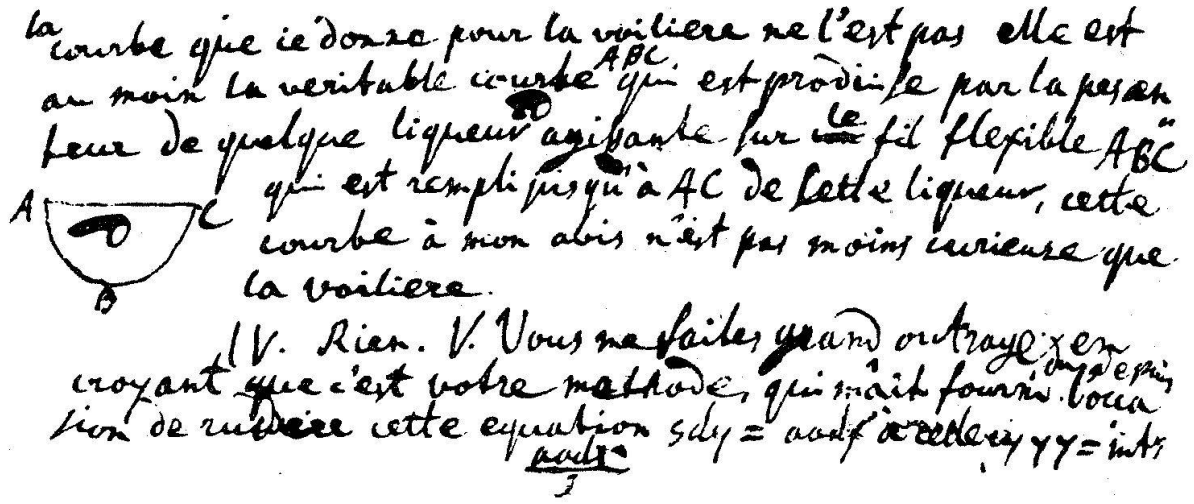
die sich als eine Logarithmika entpuppt:

$$y = a\ln\left(\frac{a + x + \sqrt{2ax + x^2}}{a}\right),$$

die JOHANN 1691 in Unkenntnis der Logarithmusfunktion freilich noch als Parabelbogen und Hyperbelinhalt darstellt. Nur im Falle, wo $s = qy$ ist, wird die Kettenlinie zu

einer Parabel, als welche sie GALILEI ansah. Die beiden BERNOULLI lösten das Problem auch in dem allgemeinen Fall, wo das Gewicht q eine Funktion des Kurvenpunkts $q(x)$ ist, die Kettenlinie also ungleich schwer ist.

JAKOB erkannte dann später (1691) und in der Arbeit *Curvatura veli* (1692), daß auch die Segelkurve eine Kettenlinie ist. Auch JOHANN hatte die Gestalt der Segelkurve bestimmt, und er unterläßt nicht, in seiner *Solution du problème de la courbure que fait une voile enflée par le vent* zu betonen, daß er es gewesen sei, welcher die von JAKOB aus den mechanischen Bedingungen des Problems hergeleitete Differentialgleichung 2. Ordnung $a\,ds\,d^2x = dy^3$ hat lösen können, während sie für JAKOB zu



Brief von JOHANN BERNOULLI an JAKOB, aus Genf, vom 17. Juni 1691. Enthält u. a. die Integration der Differentialgleichung der Velaria. (Basel U. B. Codex Gothanus Chart B 673, Blatt 41).

schwer gewesen sei. Auf das Drängen JAKOBS hin hatte sich JOHANN mit dieser komplizierten Differentialgleichung abgegeben und plötzlich bemerkt, daß man die Differentialgleichung der Kettenlinie auch auf diese Form bringen kann – und der gewandte Formalist JOHANN schoß den Vogel ab, bevor JAKOB die ihm unterdessen auch geglückte Lösung hatte publizieren können.

Mit seiner erfolgreichen Auslandsreise 1691/92 trug JOHANN keineswegs dazu bei, die bald schon in der Öffentlichkeit sich bemerkbar machenden Eifersüchteleien zwischen den beiden Brüdern zu dämpfen. JOHANN war in Paris von dem Mathematikerkreis um MALEBRANCHE mit äußerster Zuvorkommenheit als ein Repräsentant des neuen Leibnizschen Kalküls empfangen worden; in Basel machte es großen Eindruck, daß sich der illustre Marquis DE L'HÔPITAL, damals wohl der begabteste Mathematiker Frankreichs, von JOHANN hatte in die Infinitesimalrechnung einführen lassen. Das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die *Analyse des infiniment petits* (1696), mit welchem der Marquis seinen Namen in der Geschichte der Mathematik unsterblich machte, ist aus diesen Vorlesungen JOHANNS und dem anschließenden Briefwechsel entstanden.

Die von CANTOR noch angezweifelte Autorschaft JOHANNS an diesem Werk läßt sich heute einerseits durch das Basler Manuskript seiner Differentialrechnung, das 1921 von SCHAFHEITLIN aufgefunden wurde, und andererseits durch die Korrespondenz JOHANNS mit dem Marquis beweisen, welche demnächst als erster Band in der

Edition der Basler Bernoulli-Kommission erscheinen wird. CANTOR hatte wegen des zweifellos prahlerischen Charakters JOHANNS dessen Beteuerungen der Priorität keinen Kredit gegeben; er konnte nicht wissen, daß weniger der Wahrheitsliebe des Basler Mathematikers zu mißtrauen als seiner Geldliebe mancherlei zuzutrauen war: gegen eine stattliche Pension hatte sich JOHANN verpflichtet, ausschließlich dem Marquis seine neuesten Entdeckungen in der Infinitesimalrechnung mit Erläuterungen mitzuteilen. Daß dieser nun, anstatt sich damit zu begnügen, in Abhandlungen über die neue Analysis des Unendlichen mit den Entdeckungen JOHANNS in der vordersten Front der modernen Mathematiker zu brillieren, noch seinen Namen mit dem ersten Lehrbuch der Differentialrechnung verewigen wollte, konnte BERNOULLI nicht ahnen, aber er mußte zu Lebzeiten des Marquis infolge seines «Vertrages» dazu schweigen. Erst als nach dessen Tode SAURIN bei einer Auseinandersetzung mit ROLLE die heute noch «l'Hôpitalsche Regel» genannte Methode zur Bestimmung des Wertes unbestimmter Ausdrücke, wie 0/0, dem Marquis zugeschrieben hatte, reklamierte er öffentlich in einer Abhandlung von 1704 in den A.E. Gleichzeitig schüttete er dem Freund VARIGNON das Herz aus und beklagte sich über das ihm von DE L'HÔPITAL widerfahrene Unrecht. Da aber JOHANN die Hintergründe seines Schweigens zu Lebzeiten des Marquis nicht öffentlich preisgeben wollte, so kam er, als er erst nach dem Tode seines «Mäzens» reklamierte, in den Geruch eines unfairen und ruhmredigen Zeitgenossen.

Die Abhandlungen der beiden Brüder BERNOULLI, mit denen sie die Leibnizsche Infinitesimalrechnung bis zu ihrem offenen Streite 1697 ausbauten, lassen schon die Eigenart der Begabung der beiden Mathematiker erkennen: JOHANN entwickelt vor allem die formale Fruchtbarkeit des neuen Kalküls, wobei er besonders die Integralrechnung ausbaut, JAKOB vertieft sich in geometrische Probleme, wobei er am Einzelfall allgemeine Sätze findet.

Die geometrischen Probleme, mit denen sich JAKOB abgab, betrafen vor allem die Theorie der Evoluten, der Kata- und Diakaustiken und der Elastica. Die erfolgreiche Behandlung dieser Kurven verdankte JAKOB einerseits der konsequenten Einführung der Polarkoordinaten (*Specimen calculi differentialis*, A. E. 1691) in die Analysis und andererseits seiner Kenntnis des analytischen Ausdrucks für den Krümmungsradius $\varrho = ds^3/dy\,d^2x$, des *Theorema aureum* (*Curvatura laminae elasticae*, 1694). Dieser Ausdruck läßt sich übrigens leicht in den gebräuchlichen umrechnen, wenn man y mit x vertauscht und also

$$\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = \frac{ds^3}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+y')^{3/2}}{y''}$$

schreibt. Zur Einführung der Polarkoordinaten gelangt JAKOB 1691, indem er auf die Parabel $x^2 = 2py$ die Transformation $x = r$, $y = \vartheta$ ausübt und somit aus einer Parabel eine parabolische Spirale ableitet. Diese Transformation faßt er als ein Zusammenbiegen der Achse der Spirale auf, so daß die Abszissen gekrümmt werden, die Ordinaten aber als Radienvektoren senkrecht zu dieser Achse bleiben. In Fortsetzung dieser Untersuchung wendet sich JAKOB der logarithmischen Spirale zu (*Spira mirabilis*, A. E. 1692), wo er jene merkwürdigen Eigenschaften entdeckte, die ihn so beeindruckten, daß er sie als Motiv für sein künftiges Epitaph verwendete. Er entdeckte bei dieser Kleinschen W-Kurve die ersten fundamentalen Invarianzeigenschaften gegenüber projektiven Transformationen: Die Evolute und die Kaustik der logarith-

mischen Spirale ist wieder eine logarithmische Spirale. Auf seinem Epitaph, der heute im Kreuzgang des Basler Münsters zu sehen ist, steht deshalb das Epigramm: *Eadem mutata resurgo*, welches die unendliche Wiederkehr des Gleichen als Unsterblichkeitssymbol darstellen soll.

Von Einzelheiten aus den Arbeiten JAKOBS ist die parazentrische Isochrone zu erwähnen. Sie ist in Verallgemeinerung des Problems der Leibnizschen Isochrone – mit welchem JAKOB übrigens in der Infinitesimalrechnung debütiert hatte – die Lösungskurve für ein radialzentrisches Kraftfeld in bezug auf den Erdmittelpunkt statt des Parallellinienkraftfeldes an der Erdoberfläche in der ursprünglichen Aufgabe. In diesem allgemeinen Fall JAKOBS wird die Isochrone eine komplizierte Logarithmika mit einem asymptotischen Windungspunkt im Erdzentrum. Als Hilfskurve seines Problems führt JAKOB hierbei auch die Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ (A. E. 1694) ein. Eine weitere wichtige Einzelheit ist der für die Ingenieurmechanik fundamentale Satz, den JAKOB bei seinen zahlreichen Untersuchungen über die elastische Linie gefunden hat. Wenn ein elastischer Stab durch äußere Kräfte gebogen wird, so nimmt seine Achse (d. i. der geometrische Ort der Schwerpunkte der Querschnitte) eine solche Form an, daß das statische Moment der äußeren Kräfte umgekehrt proportional dem Krümmungsradius an dem betreffenden Punkt der Achsenkurve ist, welche die «elastische Linie» genannt wird. Hierbei muß vorausgesetzt werden, daß bei kleinen Durchbiegungen ein ebener Querschnitt des Stabes eben bleibt.

In dieser Zeit erst trat JOHANN mit größeren mathematischen Arbeiten an die Öffentlichkeit. Nach seiner Rückkehr aus Paris hatte er mit einer Dissertation *De motu musculorum* 1694 den medizinischen Doktorhut in Basel erworben. Diese Abhandlung ist übrigens trotz des medizinischen Themas mathematisch und ganz im Geiste des Iatromathematikers BORELLI verfaßt. JOHANN entwickelt dort eine chemische Theorie der Muskelkontraktion, die geradezu modern anmutet. Das Aufblähen der Muskelfasern läßt er durch Gärungsprozesse entstehen, wobei er die Meridiankurve der aufgeblähten Oberfläche der Fasern berechnet.

JOHANN betrachtete zeitlebens zwei Gebiete der Infinitesimalrechnung als seine ureigene Domäne: die Integralrechnung und den «Exponentialkalkül». In seinem Versuch, die Infinitesimalrechnung vor allem formal weiter auszubauen, fand er bei LEIBNIZ selber die vollste Unterstützung. Schon 1693 hatte JOHANN eine Korrespondenz mit dem Meister begonnen, welche die umfangreichste werden sollte, die der große Philosoph überhaupt je gepflogen hatte. Am 2. September 1694 konnte ihm JOHANN mitteilen, daß es ihm gelungen sei, eine allgemeine Reihenentwicklung für Integrationen zu finden, eine *series universalissima, qae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit*, indem

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = x\,\varphi(x) - \frac{x^2}{2!}\,\varphi'(x) + \frac{x^3}{3!}\,\varphi''(x) - \cdots$$

sei (*Additamentum*, A. E. 1694). Diese Reihe beruht auf dem allgemeinen Satz von LEIBNIZ für die Differentiation eines Produktes

$$d^m[f(x)\,g(x)] = (df + dg)^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{m} \binom{m}{\nu} d^{m-\nu} f\, d^\nu g,$$

wenn man $m = -1$, $g = dx$ und $f = \varphi(x)$ setzt und weiter noch die Operatoren $d^{-p} = 1/d^p = \int^p$ einführt. Einen Großteil der Korrespondenz mit LEIBNIZ zwischen 1694 und 1696 füllen derartige Formalismen aus.

Im Zusammenhang mit der Integralrechnung als Umkehroperation der Differentiation stehen JOHANNS Bemühungen um die Integration der Differentialgleichungen. Hatte er schon in Paris mit der anonymen Lösung des berühmten de-Beauneschen Problems, welches seinerzeit schon dem CARTESIUS als erstes inverses Tangentenproblem aufgegeben war, die Leistungsfähigkeit des Leibnizschen Kalküls demonstriert (J. d. S. 1692), so zeigte er fünf Jahre später, daß der neue Kalkül auch viel kompliziertere Differentialgleichungen zu lösen imstande ist: JAKOB hatte im Anschluß an das de-Beaunesche Problem die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y + Q(x)\, y^n = 0,$$

welche man heute die Bernoullische heißt, aufgegeben und selber umständlich gelöst. Hier lief ihm der formal gewandtere JOHANN wiederum einmal den Rang ab, indem letzterer diese Gleichung mit dem Ansatz löste, die gesuchte Lösungsfunktion als Produkt zweier unbekannter Funktionen aufzufassen $y = M(x) \cdot N(x)$, so daß man in der dann resultierenden Gleichung

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + P(x)\, dx + (M \cdot N)^{n-1} Q(x)\, dx = 0$$

wegen der Willkürlichkeit der beiden Funktionen einer von ihnen, etwa M, noch die Nebenbedingung $dM/M + P(x)\, dx = 0$, woraus $M = e^{-\int P(x)\, dx}$ folgt, auferlegen kann. Setzt man M in die Bedingungsgleichung ein, so ist nur noch eine lineare Differentialgleichung in N zu lösen.

Der «Exponentialkalkül», auf den JOHANN so stolz war, ist nichts anderes als der Infinitesimalkalkül der Exponentialfunktionen. Als NIEUWENTIIT in einer kritischen Schrift gegen die mangelnden logischen Grundlagen des Leibnizschen Kalküls besonders auf das Fehlen der Differentiation der Exponentialfunktion x^y im Leibnizschen Kalkül hinwies, entwickelte JOHANN in einer besonderen Abhandlung (*Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, A. E. 1697) den «Exponentialkalkül», dessen Grundformel in der Gleichung

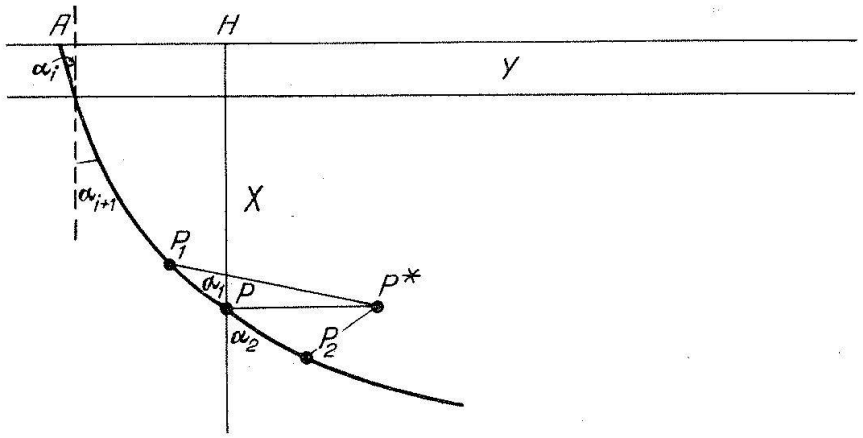
$$d(x^y) = x^y \log x\, dy + x^{y-1}\, dx$$

besteht.

2. Das Problem der Brachystochrone und die Ursprünge der Variationsrechnung

Da JOHANN keine Aussichten hatte, in Basel eine mathematische Professur zu erhalten, weil der Lehrstuhl von JAKOB besetzt war, nahm er mit Freuden eine Berufung nach Groningen an, welche ihm HUYGENS vermittelt hatte. Am 1. September 1695 reiste er mit seiner Frau und dem erst sieben Monate alten Sohn NICOLAUS II nach Holland ab, nicht ohne Groll gegen JAKOB im Herzen, der sich mit Sticheleien an der früheren Prahlerei JOHANNS bei der Differentialgleichung der Segelkurve zu rächen begonnen hatte, indem er JOHANN als seinen Schüler bezeichnete, der schließlich nur das habe zum besten geben können, was er von JAKOB gelernt habe. Aus Groningen

kam der Gegenstoß des nun auch an Rang ebenbürtig gewordenen Bruders: Schon im Juni 1696 hatte Johann in den A. E. den Mathematikern das Problem der Brachystochrone vorgelegt, die Kurve zu bestimmen, längs deren in der Vertikalebene ein Körper am schnellsten von einem Punkt A zu einem Punkt B fällt. Da bis Ende 1696 eine Lösung nicht mehr zu erwarten war, stellte Johann auf Wunsch von Leibniz die Aufgabe nochmals in Form eines Flugblattes, gewidmet *acutissimis qui toto orbe florent mathematicis*, mit einer Lösungsfrist von 6 Monaten. Leibniz löste am gleichen Tag, als er den Brief Johanns erhalten hatte, dessen «wunderschönes» Problem der Brachystochrone und schrieb zurück, daß er außer denjenigen, welche mit der neuen Infinitesimalrechnung vertraut seien, wie Johann, Jakob Bernoulli, Newton und de l'Hôpital, nur dem Genius Huygens, wenn er noch lebte, und dem Scharfsinn Huddes, wenn er sich noch mit Mathematik abgäbe, eine Lösung zutraue.



Wie Leibniz prophezeit hatte, liefen nur fünf Lösungen ein, und zwar von Johann, Jakob, Newton, Leibniz und de l'Hôpital, wobei bemerkt werden muß, daß nur die aktive briefliche Hilfe Johanns dem Marquis die Lösung ermöglicht hatte.

An diesem berühmten Problem offenbarte sich die verschiedenartige Begabung der beiden Brüder in aller Öffentlichkeit. Johann löst die Aufgabe durch eine geniale Intuition, mit der er das mechanische Problem auf ein «zufällig» schon gelöstes optisches zurückführen kann. Jakob gibt eine gründliche, aber schwerfällige Analyse und findet dabei in den Tiefen der Aufgabe Wurzeln einer neuen mathematischen Disziplin. In einem offenen Brief an Basnage, Redaktor der Revue *Histoire des Ouvrages des Sçavans* hat Johann (1697) alle Lösungen besprochen und dabei angedeutet, daß Huygens' *Traité de la lumière* (Leyden 1691) ihn auf den Gedanken eines inneren Zusammenhangs zwischen Mechanik und Optik gebracht habe; und so findet sich in diesem Brief zum ersten Male, über 100 Jahre vor der Hamiltonschen Theorie, in der mathematischen Physik der Satz ausgesprochen «que ces deux spéculations, prises de deux si différentes parties des Mathématiques telles que sont la Dioptrique et la Méchanique, ont entre elles une liaison absolument nécessaire et essentielle».

Für die Lichtbewegung ist nämlich das Problem der Brachystochrone nach dem Fermatschen Prinzip schon gelöst, denn das Licht legt immer denjenigen Weg zurück, für welchen es ein Minimum an Zeit benötigt. Diesen Lichtweg beschreibt das Brechungsgesetz. Man braucht sich also die Fallbewegung nur durch eine entsprechende Lichtbewegung ersetzt zu denken, indem sich das Licht in einem Medium von

variabler Dichte, welche nach unten nach dem Gesetz $v = \sqrt{2gh}$ abnimmt, bewegt. Zerlegt man das Medium in horizontale Schichten und bezeichnet mit α_i die Neigungswinkel des Kurvenelements gegen die Vertikale, wobei v_i die entsprechenden Geschwindigkeiten bezeichnen, so ist infolge des Brechungsgesetzes

$$\frac{\sin \alpha_i}{v_i} = \frac{\sin \alpha_{i+1}}{v_{i+1}} = k$$

oder aber, wenn mit x die Vertikaltiefe unter A und die horizontale Entfernung von A mit y bezeichnet wird,

$$\frac{dy/ds}{v} = k \quad \text{oder} \quad dy^2 = k^2 v^2 (dx^2 + dy^2);$$

da $v^2 = 2gx$ ist, folgt mit der Abkürzung $\varkappa = 1/2gk^2$:

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{\varkappa - x}}.$$

Dies ist aber die Differentialgleichung einer Zykloide, so daß JOHANN dieser Kurve, von welcher HUYGENS den Isochronismus oder den Tautochronismus entdeckt hatte, noch die Eigenschaft des Brachystochronismus zufügen konnte. In seinem offenen Brief an BASNAGE machte sich JOHANN über die schwerfälligen Deduktionen JAKOBS lustig, der selber offen zugestanden hatte, daß sie ihm manches Kopfzerbrechen bereitet hatten. Aber JOHANN merkte nicht, daß JAKOB mit seinem Grübeln in der leichtfertigen Eleganz JOHANNS unbekannte Tiefen vorgestoßen war. JAKOB stellte nämlich zunächst fest, daß derartige Extremalprobleme von den bisher üblichen verschieden seien, indem nicht mehr die unbekannten Extremalstellen einer Funktion, sondern Funktionen selber, welche ein gewisses Integral zu einem Extremum machen, zu bestimmen sind. Damit erkannte JAKOB, daß es sich hier nicht um ein gewöhnliches Extremalproblem, sondern um ein — wie wir heute sagen würden — Variationsproblem handelt, welches besondere Lösungsprinzipien erfordert. Als ein solches benutzt JAKOB die Bedingung, daß die Extremalkurve auch in ihren kleinsten Teilen der Eigenschaft genüge, die sie als Gesamtkurve haben soll. Daß diese Bedingung für die Extremalkurve eines Variationsproblems ohne Nebenbedingung zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig ist, hat allerdings erst später EULER erkannt.

Das Integral $\int dt = \int ds/v$ oder, mit Berücksichtigung des Fallgesetzes, $1/\sqrt{2}g \int ds/\sqrt{x}$ soll ein Minimum sein. Da ständig $dx/ds = \cos \alpha$ ist, so gilt für die beiden Nachbarpunkte von P, P_1 und P_2 (bei Weglassung des konstanten Faktors $1/\sqrt{2}g$),

$$\frac{1}{\cos \alpha_1} \int_{x-h}^{x} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\cos \alpha_2} \int_{x}^{x+h} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\cos \alpha_1} (\sqrt{x} - \sqrt{x-h}) + \frac{1}{\cos \alpha_2} (\sqrt{x+h} - \sqrt{x});$$

dies muß ein Minimum, die Ableitung des Ausdrucks rechter Hand also Null sein. Die Ableitung aber ist (nur α ist jetzt variabel!)

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-h}) \sin \alpha_1 \, d\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \sin \alpha_2 \, d\alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0.$$

Da nun aber $y_2 - y_1 = h (\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_1)$ als Ordinatendifferenz $P_1 P_2$ konstant ist, so besteht noch die Bedingung

$$\frac{d\alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{d\alpha_2}{\cos^2 \alpha_2} = 0,$$

womit sich die Minimalbedingung

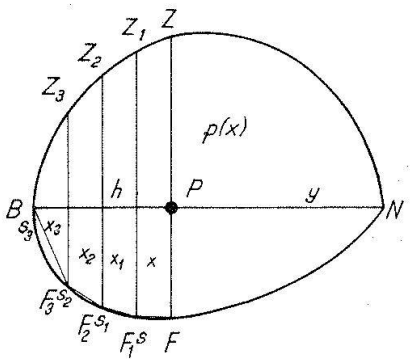
$$(\sqrt{x}-\sqrt{x-h})\sin\alpha_1=(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\sin\alpha_2$$

schreibt. Bringt man diese auf die Form

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-h}}=\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}},$$

so erkennt man, daß diese Bedingung unabhängig von h ist, daß also $\sin\alpha/\sqrt{x}$ konstant ist, was mit $\sin\alpha = dy/ds$ die von JOHANN aus dem Brechungsgesetz gefundene Differentialgleichung der Zykloide gibt.

Um JOHANN auf den Zahn zu fühlen und vor aller Öffentlichkeit bloßzustellen, stellte nun JAKOB am Schluß seiner Auflösung des Problems der Brachystochrone ein neues Variationsproblem (A. E., Mai 1697): Unter allen durch B und N gehenden Kurven von gleicher Länge ist diejenige zu bestimmen, welche den Flächenraum BZN zu einem Maximum macht, wenn allgemein die Ordinate PZ der Kurve BZN eine Potenz der Ordinate der Extremalkurve BFN ist ($PZ = PF^n$). Diese Aufgabe stellt eine Verallgemeinerung des Isoperimeterproblems der Antike dar, unter allen Kurven gegebener Länge zwischen B und N diejenige zu bestimmen, welche über der Sehne BN den größten Flächeninhalt einschließt. JOHANN BERNOULLI schrieb nun in seinem Brief an BASNAGE, es sei ihm gelungen, innert drei Minuten das Problem zu lösen. Die Extremalkurve sei nämlich



$$y=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}},\qquad (a = \text{Konstante})$$

und für $n = 1$, wobei die Kurve $BZN = BFN$ wird, ist in der Tat der Kreis des ZENODORUS

$$y=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=a-\sqrt{a^2-x^2}$$

die Lösung.

Aber JOHANNS voreilige Lösung war nur teilweise richtig. Da JOHANN sein Resultat ohne Ableitung publiziert hatte, JAKOB aber seinen ehemaligen Schüler kannte, erbot sich JAKOB, erstens die Methode seines Bruders zu erraten, zweitens die Fehler in dessen Ableitung nachzuweisen und drittens die wahre Auflösung des isoperimetrischen Problems zu geben. Da seinerzeit bei der Stellung des Problems von einem «Nonnemo» 50 Imperialien als Lösungspreis ausgesetzt waren, so verpflichtete er sich, diese Summe zu zahlen, wenn er im ersten Punkte, das Doppelte, wenn er im zweiten Punkt, und das Dreifache, wenn er im dritten Punkt seiner Kritik der Johannschen Lösung fehle.

In diesen nüchternen und ironischen Worten drückt sich die ganze Tragik der Entzweiung der beiden Brüder aus, deren Streit schließlich in eine unerquickliche und hier nicht im einzelnen zu schildernde Gehässigkeit ausarten sollte, so daß die Beiden sich nicht mehr versöhnen konnten. Immerhin hatte dieser leidige Streit die

Geburt der Variationsrechnung zur Folge, und man kann diesen geradezu als ein Auseinanderfallen der beiden Begabungsrichtungen, der intuitiven und der systematisch-kritischen, auf zwei verschiedene Personen ansehen, welche sich offen bekämpften, als ob die Brüder sich gleichsam an der Natur rächen wollten, die, indem sie das mathematische Genie gerecht auf zwei verteilte, dadurch gerade verhinderte, daß jeder allein zur Klasse der allergrößten Mathematiker aufsteigen konnte. Und so trat eine Auseinandersetzung an die Öffentlichkeit, welche «unter anderen Umständen unbemerkt in derselben Person hätte austoben können», um die geniale Leistung hervorzutreiben, wie MACH treffend bemerkt.

JOHANN hatte übrigens noch geprahlt, daß er JAKOBS Aufgabe auch für den allgemeineren Fall lösen könne, daß PZ nicht nur $= PF^n$, sondern irgendeine Funktion von $PF = p(x)$ sei. Dann sei die Gleichung der Extremalkurve

$$y = \int \frac{b\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

wobei

$$b = \int \frac{PZ\,dx}{x}$$

bedeute. Vielleicht hat gerade diese Verallgemeinerung JAKOB die Spur in den Gedankengang JOHANNS gewiesen, und er vermutet wohl mit Recht, daß JOHANN hier wieder eine indirekte Methode versucht hat, die in speziellen Fällen zwar zum Ziele führen kann, im allgemeinen aber versagt. JOHANN hat in seiner Antwort auf JAKOBS Wette über die drei Punkte sofort ein in der Eile begangenes Versehen zugegeben: es müsse einfach $b = PZ$ gesetzt werden, so daß die Extremalkurve also, wenn man $b = PZ$ setzt, die Gleichung

$$PF = \int \frac{PZ\,dx}{\sqrt{a^2 - PZ^2}}$$

hat. Es führt nun in der Tat die von JAKOB seinem Bruder insinuierte Überlegung mit mechanischen Analogien zu diesem formalen Resultat, das ein JOHANN BERNOULLI in drei Minuten herausgefunden haben mag: Denkt man sich die Kurve BFN mit einer Flüssigkeit von variablem spezifischem Gewicht gefüllt, so ist BFN dann eine Extremalkurve, wenn der Schwerpunkt möglichst tief liegt. In der Ordinate $PF = x$ soll nun das spezifische Gewicht der Flüssigkeit $PZ/x = p(x)/x$ sein. Das Gewicht eines vertikalen Fadens ist dann $p\,dy/x$ und sein Moment in bezug auf BN ist

$$\frac{1}{2}\,x\,\frac{p\,dy}{x} = \frac{1}{2}\,p\,dy,$$

und für die tiefste Lage des Schwerpunkts wird dann tatsächlich

$$\frac{1}{2}\int p\,dy \quad \text{oder} \quad \int p(x)\,dy = \text{Fläche } BZN$$

ein Maximum.

Diese Überlegung ist aber in dieser Form nicht zulässig; denn, wie JAKOB bemerkt, wird übersehen, daß mit der Variation der Kurve BFN auch das Gewicht der Flüssigkeit variiert wird.

An die Herausforderung Jakobs schloß sich ein hitziges Hin und Her zwischen den beiden Brüdern an, bis den wissenschaftlichen Journalen dieser Streit schließlich so verleidet war, daß die A.E. nur noch zum Abschluß die Lösung Jakobs publizierten, sonst aber den beiden alle Zeitschriften für Polemiken geschlossen waren. Ein Jahr

JOHANN BERNOULLI

später gab Jakob in einem Sonderdruck unter dem Titel *Analysis magni problematis isoperimetrici* (Basileae, 1701) eine detaillierte Untersuchung. Er war sich der Bedeutung seiner Arbeit vollkommen bewußt. Mit feierlichen Worten, die den ehemaligen Prediger verraten, schließt Jakob sein Werk ab, nachdem er es dem unvergleichlichen mathematischen Viergespann der Leibniz, Newton, de l'Hôpital und Fatio gewidmet hat. Wiederum benutzt Jakob das systematische Prinzip, daß auch das kleine Kurvenstück FF_3 die verlangte Eigenschaft der Extremalkurve habe. Er betrachtet nun vier sukzessive Punkte F, F_1, F_2, F_3; es kann bei festgehaltenen Endpunkten aber nur dann der Bogen $F_3F_2F_1F$ so variiert werden, daß die Bogenlänge konstant bleibt, wenn man

zwei Punkte verschiebt. Setzt man

$$y_1 - y = y_3 - y_1 = y_3 - y_2 = h,$$

so folgt

$$(s_1 - s)^2 = (x_1 - x)^2 + h^2;\ (s_2 - s_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + h^2;\ (s_3 - s_2)^2 = (x_3 - x_2)^2 + h^2,$$

und die Aufgabe ist, x_1 und x_2 so zu variieren, daß

$$|s_1 - s| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2|$$

konstant bleibt. Aus dieser Bedingung leitet Jakob eine Differenzengleichung und dann aus dieser durch Grenzübergang eine Differentialgleichung dritter Ordnung her, die er mühsam integriert und schließlich die Bedingungen für die Extremalkurve findet:

Für $dy = \dfrac{p(x)\,dx}{\sqrt{a^2 - p(x)^2}}$ wird $\int p(x)\,dy$ ein Maximum

und für $dy = \dfrac{a - p(x)\,dx}{\sqrt{2ap(x) - p(x)^2}}$ wird $\int p(x)\,dy$ ein Minimum.

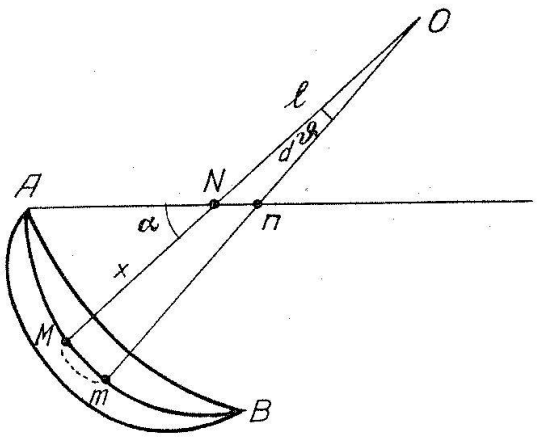
Johann hatte sich unterdessen um eine strenge Analyse des Problems bemüht und diese am 1. Februar 1701 der Pariser Akademie durch seinen Freund Varignon in einem versiegelten Paket übergeben lassen, welches erst nach der Publikation der Jakobschen Lösung geöffnet werden sollte. Es wurde aber nicht sogleich nach dem Erscheinen der *Analysis magni problematis isoperimetrici*, sondern, durch allerhand mysteriöse Umstände verzögert, erst nach dem Tode Jakobs am 17. April 1706 geöffnet.

Die Lösungsmethode Johanns führt nicht zum Ziel, so daß Jakob seinen Triumph nicht mehr erlebte. Hatte Jakob schon bei seiner ersten Kritik höhnisch bemerkt, daß Johann nur durch zwei sukzessive Fehlschlüsse, wo der nachfolgende gerade den ersten wieder kompensiert, zum richtigen Resultat gelangt sei, so traf diese Bemerkung erst recht bei der von Johann unterdessen nachträglich versuchten strengen Analyse des Problems zu. Johann benutzt ebenfalls das Prinzip Jakobs. Während dieser aber die Eckpunkte der betrachteten Approximationspolygone auf Parallelen zur X-Achse gleiten ließ und deshalb, um der isoperimetrischen Bedingung zu genügen, Polygone von drei Seiten benutzen mußte, betrachtete Johann nur drei sukzessive Punkte der variierten Kurve und verwandte also nur ein Zweiseit von konstanter Länge, dessen variable Ecke sich auf einer Ellipse bewegt. Mit diesem Zweiseit kann man aber prinzipiell nur zu Identitäten gelangen, und wenn Johann trotzdem damit die Differentialgleichung der Extremalkurve herausrechnet, so gelingt ihm dies nur, weil er in Kenntnis des Resultates zweckmäßige, aber ungerechtfertigte Vernachlässigungen und Mitnahmen von infinitesimalen Variationen höherer Ordnung vornahm. Johann hat später seinen Fehler eingestanden und in einer — besonders durch die Kritik von Brook Taylor provozierten — Abhandlung *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problemes sur les Isoperimetres* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1718) eine Lösung gegeben, die nicht nur streng, sondern — wieder einmal — formal eleganter als die Jakobsche war. Die von Jakob kompliziert gewonnene Differenzengleichung, welche auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung führt, formt Johann so um, daß er sofort im Limes zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung gelangt, welche sogar in einer ähnlichen Form wie die Euler-Lagran-

gesche Differentialgleichung für die Extremalkurve eines Variationsproblems geschrieben werden kann.

Am Schluß dieser Abhandlung gibt JOHANN noch eine direkte Lösung des Problems der Brachystochrone, welche nicht nur geometrisch interessant, sondern zugleich für Variationsprobleme verallgemeinerungsfähig ist. Man braucht nur die Eigenschaft der Zykloide zu kennen, daß die Abrollgerade des erzeugenden Kreises die Krümmungsradien der Zykloide halbiert, um sofort die Kurve des schnellsten Falls herzuleiten. Zeichnet man die Variationskurven zwischen A und B, so lautet die Aufgabe: Wo müssen M und m auf den Krümmungsradien an AB in M und m liegen, damit Mm und folglich auch AB in kürzester Zeit durchfallen wird? Wann ist mit anderen Worten $dt = ds/v$ ein Minimum? Es ist nun allgemein $v = \sqrt{2gx\sin\alpha}$, und da $ds = (x + l)\,d\vartheta$ ist, so folgt

$$dt = \frac{(x+l)\,d\vartheta}{\sqrt{2gx\sin\alpha}}.$$



Der Ausdruck $(x+l)/\sqrt{x}$ hat aber dann ein Minimum, wenn $x = l$ ist. Es muß also der Krümmungsradius OM in N resp. Om in n halbiert werden; die Extremalkurve muß also eine Zykloide sein. Man kann dann leicht synthetisch durch Vergleich mit den benachbarten Vergleichungskurven zeigen, daß die Zykloidenkurve $AMmB$ ein echtes Minimum darstellt.

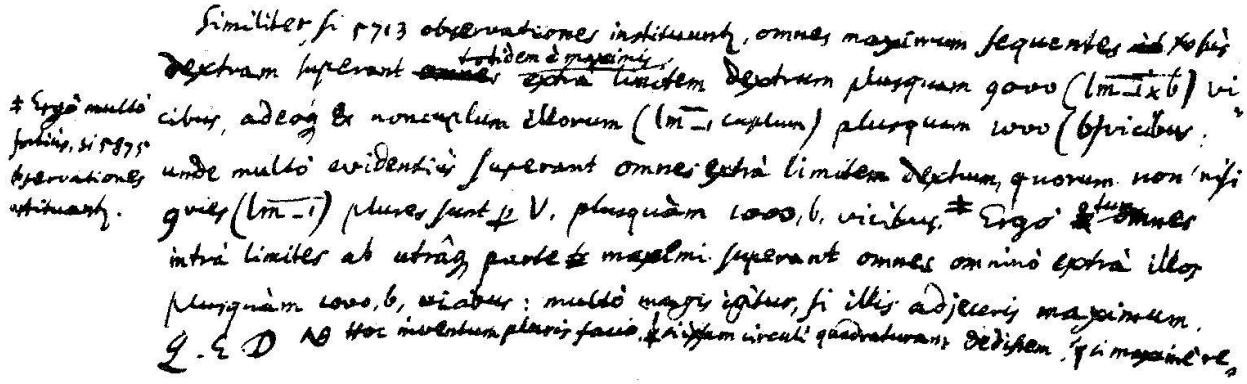
Die Extremalkurve – im vorliegenden Falle die Zykloide – schneidet die beiden benachbarten Geraden OM und Om orthogonal. Nimmt man nun allgemein statt der Geraden eine Kurvenschar $\varphi(x, y) = \lambda$, so braucht man sie – wie CARATHÉODORY in seiner Dissertation (1904) «geometrisch» gezeigt hat – nur so zu wählen, daß längs jeder Kurve $\varphi = \text{const}$ der Ausdruck $f/(\varphi_x + y'\,\varphi_y)$ konstant wird, damit das Integral $\int f(x, y, y')\,dx$ ein Extremum wird. Die Bedingung für f kann man dann leicht in die Lagrangesche Differentialgleichung umwandeln:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

JOHANNS Gedanke enthält somit schon den Keim moderner Methoden der Variationsrechnung. Überhaupt hat JOHANN durch eine Fülle von genialen und produktiv verwertbaren Einzelerkenntnissen seine Unterlegenheit an logischer Denkkraft JAKOB gegenüber wieder wettgemacht. In diesen Zusammenhang gehört auch eine Entdekkung JOHANNS beim Variationsproblem der geodätischen Linie auf konvexen Oberflächen: In einem Brief an LEIBNIZ aus dem Jahre 1698 erkennt er die charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien, daß drei ihrer konsekutiven Punkte eine Normalebene der Oberfläche bestimmen.

Der tiefschürfende Geist JAKOBS hatte aber nicht nur zur Variationsrechnung, sondern auch zur Statistik als einer neuen mathematischen Disziplin den Weg gebahnt. Die Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, vor allem PASCAL und FERMAT, hatten die Kombinatorik zu einem neuen Zweig der Arithmetik entwickelt,

der bezeichnenderweise erst in der Neuzeit erblühte, nachdem der kartesische Impuls der Logik der Relationen die Denker erfaßt hatte. Im Anschluß an die Kombinatorik entwickelten FERMAT, PASCAL und HUYGENS die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. JAKOB BERNOULLIS größte Entdeckung ist nun vielleicht sein Theorem vom Gesetz der großen Zahlen, mit welchem er von der Wahrscheinlichkeitsbestimmung «a priori» der Kombinatorik, also aus bekannten logischen Bedingungen, zur Wahrscheinlichkeitsbestimmung «a posteriori» der Statistik, also aus bloßen Erfahrungen bei Versuchsreihen, übergeht. Dieses Bernoullische Theorem steht in der *Ars conjectandi*, welche erst acht Jahre nach JAKOBS Tod als separates Buch, mit einem Vorwort seines Neffen NIKLAUS I versehen, 1713 in Basel erschien. Wie sich



Seite aus dem Tagebuch (*Meditationes et annotationes*) von JAKOB BERNOULLI. (Enthält den Schlußteil des Beweises des Bernoullischen Theorems der Wahrscheinlichkeitsrechnung, vermutlich aus dem Jahre 1689). (Basel U. B. Mskr. L Ia 3, Seite 191.)

aus den Manuskripten JAKOBS ersehen läßt, lassen sich die wesentlichen Lehrsätze dieses Buches aber schon vor 1690 nachweisen, so daß die Grundlagen der Statistik von JAKOB bezeichnenderweise gerade in der logischen und kombinatorischen Phase seiner mathematischen Entwicklung gefunden wurden.

Jakob beginnt sein Werk mit den klassischen Problemen des Glücksspiels, an denen seine Vorgänger die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung deduziert hatten. Der erste der vier Teile des Buches bringt die Abhandlung von HUYGENS *De ratiociniis in ludo aleae* mit Anmerkungen JAKOBS versehen als Wiederabdruck, welcher aber die an speziellen Zahlenbeispielen entwickelten Formeln von HUYGENS in allgemeiner Buchstabenform gibt. Im zweiten Teil werden die allgemeinen Formeln der Kombinatorik abgeleitet, um sie im dritten Teil auf die allgemeinen Probleme der kombinatorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden. Allein durch die systematische Entwicklung der Formelsprache der Kombinatorik stellt damit das Werk schon einen wichtigen Beitrag zur Arithmetik dar. Der Übergang zur Statistik wird nun im vierten Teil vollzogen. Es ist durchaus möglich, daß nur der frühzeitige Tod JAKOB verhindert hat, auch auf die Schlußfolgerungen einzugehen, die man aus den Erfahrungstatsachen einer Versuchsreihe ziehen kann, denn die Betrachtungen dieses Teils scheinen darauf abzuzielen, nur Vorbereitungen zu dieser Lehre von den statistischen Schlußfolgerungen zu geben. Das Werk gipfelt und schließt mit seinem berühmten Theorem, das man in Umkehrung folgendermaßen schreiben kann: «Sind p und q die gewöhnlichen *a-priori*-Wahrscheinlichkeiten

zweier entgegengesetzter Ereignisse A und B ($p + q = 1$), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis A in einer sehr großen Zahl μ von Versuchen in einer zwischen $\mu p + \lambda$ und $\mu p - \lambda$ liegenden Anzahl m von Malen eintritt:

$$W = \sum_{\varrho=\mu p-\lambda}^{\varrho=\mu p+\lambda} \frac{\mu!}{\varrho!(\mu-\varrho)!}\, p^{\varrho}\, q^{\mu-\varrho}.»$$

Anders gesagt: W ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abweichung des Quotienten m/μ vom Erwartungswert p, nämlich $(m/\mu) - p$, zwischen $-\lambda/\mu$ und λ/μ enthalten ist. Für $\mu \to \infty$ geht diese Wahrscheinlichkeit W in Eins über.

Jakob hat zwar die Formel für W nicht explizite hingeschrieben, sie kann aber aus seinem Beweis sofort herausgeholt werden. Diesen Summenausdruck haben nun sowohl de Moivre als Laplace zum Ausgangspunkt genommen und durch entsprechende analytische Transformationen in die Form des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\zeta^2}\, d\zeta + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$$

gebracht, welches heute als das Fehlerintegral der Gaußschen Glockenkurve der Statistik zugrunde liegt.

3. Johann als Nachfolger von Jakob Bernoulli

Jakob Bernoulli starb gerade in dem Moment, als sich Johann, dem Drängen des Schwiegervaters folgend, mit seiner Familie nach Basel begab. Er schied sehr ungern von Holland; als ihm noch während der Heimreise eine vorteilhafte mathematische Professur in Utrecht angeboten wurde, schwankte er, ob er sie annehmen solle oder nicht. Bei seiner Ankunft in Basel erhielt er aber den Besuch des gesamten akademischen Senats, der ihn bat, den durch den Tod Jakobs freigewordenen Lehrstuhl für Mathematik zu übernehmen. Am 17. November trat Johann die Nachfolgeschaft des Bruders an. Kein geeigneterer Verwalter und Förderer des Jakobschen Erbes als Johann konnte gefunden werden! Nachdem der mehr introvertierte Jakob die Grundlagen der Infinitesimalrechnung geschaffen hatte, brachte der mehr extravertierte Johann durch den Glanz seines Namens und seine literarische Fruchtbarkeit den neuen Kalkül in der wissenschaftlichen Welt zur Geltung. Die Leidenschaft, mit der er sich dieser Aufgabe widmete, mußte ihn geradezu notwendig in die Rolle des *Praeceptor mathematicus Europae* hineindrängen.

Quantitativ nehmen die Abhandlungen Johanns während seiner Basler Professur, die er bis zu seinem Tode 1748 inne hatte, fast Dreiviertel des Gesamtwerkes ein. Wenn man den Maßstab des reinen Mathematikers an diese Abhandlungen legt, so bleiben sie qualitativ wohl etwas gegenüber den Arbeiten aus der Jugend- und Groninger Zeit zurück. Denn es sind vornehmlich Probleme der angewandten Mathematik, speziell der Mechanik, denen er sich seit etwa 1710 widmete. Für die Geschichte der Mechanik sind seine Arbeiten aber nicht hoch genug anzuschlagen. In der mehr «pädagogisch» gerichteten Basler Zeit begann er, allmählich sich mit der Arbeitsrichtung seines Freundes und langjährigen Korrespondenten Varignon zu be-

rühren. Der Pariser Akademiker hatte angefangen, die Ableitungen in den *Principia mathematica philosophiae naturalis* von NEWTON in die Sprache der neuen Analysis zu übersetzen und sich infolgedessen mit der analytischen Theorie der Zentralkräfte eingehend beschäftigt. JOHANN, durch die häufigen Anfragen VARIGNONS über den Verlauf dieser Untersuchungen unterrichtet, begann schließlich selber, sich in diese Theorie zu vertiefen und fand bald eine Reihe von Versehen in NEWTONS *Principia*, der Bibel der neuen Physik.

NEWTON hatte in seinem Theorem XI/XIII, Liber I, Sect. III, nur bewiesen, daß aus den Keplerschen Gesetzen und der Huygensschen Formel für die Zentralkraft notwendig das Gravitationsgesetz $m_1 m_2/r^2$ folgt. JOHANN bemerkte dagegen, daß die Umkehrung dieses Satzes, daß aus dem Zentralkraftgesetz $\varphi(r) = 1/r^2$ nur Kegelschnitte als Bahnkurven folgen, eines besonderen Beweises bedürftig sei. Deshalb leitet JOHANN in der Arbeit *Extrait de la Reponse de Mr. Bernoulli à Mr. Herman* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1710) aus dem Kraftgesetz mit Hilfe des Flächensatzes

$$r^2\, d\vartheta = x\, dy - y\, dx = 2\, dF = c\, dt$$

und des Energieintegrals

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2\int \varphi\, dv + 2h = 2\,(U+h)$$

das Integral

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \vartheta(u) = \int \frac{c\, du}{\sqrt{2\,(U+h) - u^2 c^2}}$$

für die gesuchte Bahnkurve her, wie es seither in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik üblich geworden ist.

JOHANN bleibt aber hierbei nicht stehen, sondern untersucht auch die Zentralbewegung im widerstehenden Mittel, welcher NEWTON ein ganzes Buch (Liber II) seines unsterblichen Werkes gewidmet hatte. Hier wird wegen der analytischen Schwierigkeiten das sogenannte inverse Zentralkraftproblem untersucht, nämlich aus der Form der vorgegebenen Bahnkurve $r(\vartheta)$ das zugehörende Gesetz der wirkenden Zentralkraft zu finden, wenn die Bewegung in einem Medium mit dem Widerstandsgesetz $R = \pm\, a v^n$ stattfindet. Bedeutet v die Geschwindigkeit, ϱ den Krümmungsradius der Bahnkurve, so leitet BERNOULLI in der Arbeit *Les forces centrales dans des milieux resistans* (Mém. Acad. Sci. Paris, 1711) für die Bewegung die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dv}{v} \cdot \frac{ds}{d\vartheta} \pm a\, v^{k-2}\, ds + \frac{dv}{v} = 0$$

her, welche er mit seiner oben (S. 10) erwähnten Methode löst, indem er die gesuchte Geschwindigkeit mit dem Ansatz $v = M(v)\, N(r)$ bestimmt und damit aus

$$\varphi(r) = \frac{v^2}{\varrho} \cdot \frac{ds}{r\, d\vartheta}$$

das Zentralkraftgesetz findet. Bei dieser Zentralkraftbewegung im widerstehenden Mittel findet nun JOHANN eine Menge von einzelnen Versehen NEWTONS heraus, die er später mit Stolz im ersten Band seiner *Opera* zusammengestellt hat. In dem *Excerptum ex celeberrimi Newtoni philosophiae naturalis principia mathematica Libro*

II, sect. II vergleicht er die erste mit der letzten Auflage des Werkes, in welcher Newton seine Fehler nach der Bernoullischen Kritik verbessert hat. Newton war dabei ein Versehen unterlaufen, welches in der Folge beim Prioritätsstreit mit Leibniz eine große Rolle spielen sollte: In der Reihenentwicklung von $d\sqrt{r^2 - x^2}$ hatte er die Reihenglieder als die sukzessiven höheren Ableitungen betrachtet und damit den Koeffizientenfehler begangen, daß er allgemein

$$\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}\, z^{p-n}\, dz^p$$

als das n-te Differential $d^n z^p$ ansah. Waren diese Fehler Newtons allerdings nicht von prinzipieller Natur, sondern bloße Versehen, so erwarb sich der Basler Mathematiker mit seiner «tifteligen» Kritik der Einzelheiten vielleicht die Sympathie der Leibnizianer, keinesfalls aber die Gunst der Newtonianer, die auf das Werk ihres Meisters wie auf eine Bibel schworen. Besonders fatal war, daß Johann recht hatte und Newton sich zu zahlreichen Verbesserungen genötigt sah, und daß erst das wachsame Auge Johanns das unsterbliche Werk von allen mathematischen Makeln gesäubert hatte.

Um dieselbe Zeit, als Jakobs Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum erschienen war, überraschte Johann das Publikum mit einem separaten Buch – auch bei ihm das einzige –: *Essai d'une nouvelle theorie de la Manœuvre des vaisseaux* (1714, Basle, J. G. König). Das Buch stellte eine Kritik der Theorie der Schiffsbewegung des berühmten französischen Marineoffiziers Renau d'Elisagaray von 1679 dar. Hatte schon Huygens seinerzeit dieses Werk kritisiert, so blieb Johann nicht bei einer bloßen Kritik stehen, sondern gab seinerseits eine neue Theorie der vom Wind getriebenen Segelschiffe. Johann wird wohl in Holland zu derartigen Fragestellungen angeregt worden sein, da es sonst kaum zu erklären ist, daß ausgerechnet ein Schweizer Mathematiker auf nautische Probleme verfällt. Die Kritik an Renau gab Gelegenheit, den falschen Kraftbegriff der Kartesianer zu rügen und deren fortwährende Verwechslung von Kraft und Energie an den Pranger zu stellen. Eine der zahlreichen Rückfragen Renaus, die dieser durch seinen Freund Varignon an Johann gelangen ließ, war die Veranlaßung, daß Bernoulli in einem Brief vom 26. Februar 1715 an Varignon das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten formulierte: «En tout equilibre des forces quelconques en quelque maniere, qu'elles soyent appliquées et suivant quelques directions, qu'elles agissent les unes sur les autres ou mediatement ou immediatement la somme des energies affirmatives sera egale à la somme des energies negatives prises affirmativement», was man heute kurz in der Formel schreibt:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{k}_i \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0.$$

Johann hatte schon in diesem Buch ständig vom Leibnizschen Begriff der lebendigen Kraft $mv^2/2$ Gebrauch gemacht. Er ist der erste, der die Bedeutung des Lehrsatzes von der Konstanz der Energie in einem (konservativen) mechanischen System $U + (mv^2/2) = \text{const}$ erfaßt und den Terminus «Energie» im mathematisch-physikalischen Sinn gebraucht. Weil aber das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten aus dem Energieprinzip ableitbar ist, erscheint es Johann Bernoulli als ein allgemeines Prinzip der Mechanik, das er selber zwar meist nur auf statische Probleme anwendet.

Erst D'ALEMBERT sollte später den konsequenten Übergang zur Dynamik vollziehen, indem er den analytischen Ausdruck BERNOULLIS für das Gleichgewicht zwischen sämtlichen Kräften in jedem Augenblick umschreibt in

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{K}_i - m_i \frac{\overrightarrow{d^2 s_i}}{dt^2}\right)\overrightarrow{\delta s_i} = 0,$$

wobei

$$\vec{K} - m\frac{\overrightarrow{d^2 s}}{dt^2} = \vec{k}$$

als «verlorene Kraft» (nicht in Bewegung umgesetzte Kraft) bezeichnet wird. Damit kann das Bernoullische Prinzip auch für die Dynamik allgemein formuliert werden: Bei der wirklich stattfindenden Bewegung ist die virtuelle Arbeit der «verlorenen» Kräfte gleich Null.

Es war unvermeidlich, daß der in den Leibnizschen Ideen heimische Basler Mathematiker, der zudem noch Mängel in NEWTONS Hauptwerk entdeckt hatte, in den Prioritätsstreit um die Erfindung des Infinitesimalkalküls zwischen NEWTON und LEIBNIZ hineingezogen wurde. Da dieser Streit an anderer Stelle ausführlich geschildert werden soll, mögen hier nur kurz die Abhandlungen JOHANNS erwähnt werden, die ihren Ursprung dem Wettstreit der Newtonianer und Leibnizianer verdanken. Um die Leistungsfähigkeit des Fluxionskalküls von NEWTON und die der Differentialrechnung von LEIBNIZ zu erproben, stellten sich die beiden Parteien gegenseitig Aufgaben, die sie für besonders schwierig hielten. LEIBNIZ hatte mit dem Trajektorienproblem begonnen; JOHANN erweiterte es später auch auf nichtorthogonale Trajektorien (A. E. 1718). Das von NEWTONS getreuem «Kettenhund», dem schottischen Kämpen KEILL, gestellte Problem der ballistischen Kurve löste JOHANN für das allgemeine Widerstandsgesetz $R = av^n$ (A. E. 1719), nachdem NEWTON in den *Principia* es nur für den einfachsten Fall $n = 1$ bewältigen konnte.

Nach dem Tode LEIBNIZENS (1716) und NEWTONS (1727) war JOHANN der größte Mathematiker seiner Zeit. Auch BROOK TAYLOR, der noch am ehesten dem Basler Mathematiker Pari bieten konnte, war 1731 gestorben. Da nun einerseits die englische Mathematik infolge des Prioritätsstreites, sich auf den unpraktischen Fluxionskalkül versteifend, über ein Jahrhundert lang in völlige Stagnation geriet, die französische Mathematik andererseits erst nach dem Siege der Newtonschen Physik über die sterile Routine des Spätkartesianismus um 1750 wieder zur vollen Blüte erwachte, konnte JOHANN, selbst mit nur gelegentlichen Abhandlungen die gelehrten Zeitschriften füllend und auf den Lorbeeren ausruhend, leicht seine führende Stellung behaupten.

Trotzdem blieben auch ihm Enttäuschungen nicht erspart. Mit seinem *Discours sur les lois de la communication du mouvement* gewann er nicht den Preis der Pariser Akademie, da er der Leibnizschen Dynamik huldigte, welche bei dem Unverständnis der radikalen Kartesianer in Paris verpönt war. Dagegen gewann er mit den beiden Abhandlungen *Sur le systême de M. Descartes* und der *Nouvelle Physique céleste* die Preise der Akademie von 1730 und 1734; in beiden Arbeiten versucht er qualitativ, durch eine zweckmäßige Modifikation der kartesischen Wirbeltheorie, die Neigungen der Planetenbahnen gegen die Ekliptik, die Bahnen und die Knotenbewegungen zu erklären. In den letzten fünfzehn Jahren seines Lebens hat sich JOHANN nur noch gele-

gentlich mit reiner Mathematik befaßt. Der vierte Band seiner *Opera* enthält fast ausschließlich Abhandlungen über Mechanik, speziell der Hydraulik.

Sorgte er durch diese Arbeiten dafür, daß sein Name in den Zeitschriften nicht vergessen wurde, so war er aber schon zu Lebzeiten, mit dem Lorbeerkranz des Ruhmes geschmückt, nicht nur mit väterlicher Würde, sondern zeitweilig auch mit patriarchalischem Despotismus, einer ganzen Generation von Mathematikern, die er teilweise aus seinen eigenen Söhnen rekrutierte, der gefeiertste Lehrer der mathematischen Welt. Sein größter Triumph wohl war, daß er einen noch Größeren zum Schüler hatte: Den Genius EULERS, der das von den Pionieren eroberte Neuland der Infinitesimalrechnung zu üppiger Pracht kolonisieren sollte, ohne freilich die Giftpflanzen darinnen zu erkennen, die erst die kritische Sonde der Analytiker des neunzehnten Jahrhunderts zutage förderte.

J. O. FLECKENSTEIN, Basel

ZEITTAFEL

1654 27. Dezember (A. St.) JAKOB I BERNOULLI zu Basel geboren.

1667 27. Juli (A. St.) JOHANN I BERNOULLI zu Basel geboren.

1676 JAKOB schließt sein theologisches Studium in Basel ab und wird unter die Kandidaten des Basler Kirchenministeriums aufgenommen.

1676–80 Auslandsreisen JAKOBS nach Genf und Frankreich, wo er u.a. 1678 Hauslehrer auf dem Schloß Nède (Limousin) des Marquis DE LESTANGES war.

1680 JAKOBS Rückkehr nach Basel. Positionsbestimmung des Kirchschen Kometen.

1681–82 Zweite Auslandsreise JAKOBS nach Holland und England, wo er mit Mathematikern wie HUDDE und dem Astronomen FLAMSTEED bekannt wird. *Conamen novi systematis Cometarum* (Amstelodami).

1683 JAKOBS *Dissertatio de gravitate Aetheris.*

1687 JAKOB wird Nachfolger MEGERLINS auf dem mathematischen Lehrstuhl in Basel. Brief an LEIBNIZ mit der Bitte um Aufklärung über dessen Differentialrechnung in den *Acta Eruditorum* von 1684.

1690 Erste Publikation von JOHANN *De effervescentia et fermentatione.*

1690 JAKOB löst das Problem der Isochrone mittels Infinitesimalkalkül und publiziert damit nach Leibnizens Arbeiten von 1684 und 1686 als erster über dessen neue Methode.

1690–92 JOHANNS Aufenthalt in Genf und Paris.

1691–96 Ausbau des Leibnizschen Kalküls durch die Brüder BERNOULLI. Probleme der Kettenlinie, Segelkurve, elastische Kurve, Loxodrome, Spiralen, Zykloiden, Kaustiken und Evoluten.

1693 Beginn der Korrespondenz JOHANNS mit LEIBNIZ.

1694 JOHANNS Doktordissertation *De motu musculorum.*

1695 JOHANN erhält durch HUYGENS Vermittlung die mathematische Professur in Groningen.

1697 Problem der Brachystochrone. Beginn des Streites der Brüder BERNOULLI um das isoperimetrische Problem.

1699 JAKOB und JOHANN zu auswärtigen Mitgliedern der Pariser Akademie ernannt, deren Zahl auf acht beschränkt war.

1701 *Analysis magni problematis isoperimetrici* von JAKOB.

1705 16. August Tod von JAKOB.

1706 Publikation der vermeintlichen Lösung des isoperimetrischen Problems von JOHANN in den *Mémoires* der Pariser Akademie.

1710–11 Analytische Theorie der Zentralkräfte von JOHANN und Kritik der synthetischen Theorie derselben in NEWTONS Prinzipien.

1713 LEIBNIZ zieht durch ein Flugblatt JOHANN in den Prioritätsstreit mit NEWTON hinein. JAKOBS *Ars conjectandi* erscheint postum.

1715 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten von JOHANN analytisch formuliert.

1715–25 Wettstreit JOHANNS mit den englischen Mathematikern, insbesondere TAYLOR, um die Integration von Differentialgleichungen beim Trajektorien- und ballistischen Problem im Anschluß an den Prioritätsstreit zwischen dem Leibnizschen Differential- und dem Newtonschen Fluxionskalkül.

1730 Preis der Pariser Akademie für JOHANNS Arbeit *Système de Descartes et la manière d'en déduire les orbites et les aphélies des planètes.*

1734 JOHANN gewinnt zusammen mit seinem Sohn DANIEL den Preis der Pariser Akademie mit dem *Essai d'une nouvelle physique céleste, servant à expliquer les principaux phenomènes du ciel, et en particulier la cause physique de l'inclinaison des orbites des planetes par raport au plan de l'équateur du soleil.*

1742 *Opera Johannis Bernoullii* in 4 Bänden (Genf, Bousquet).

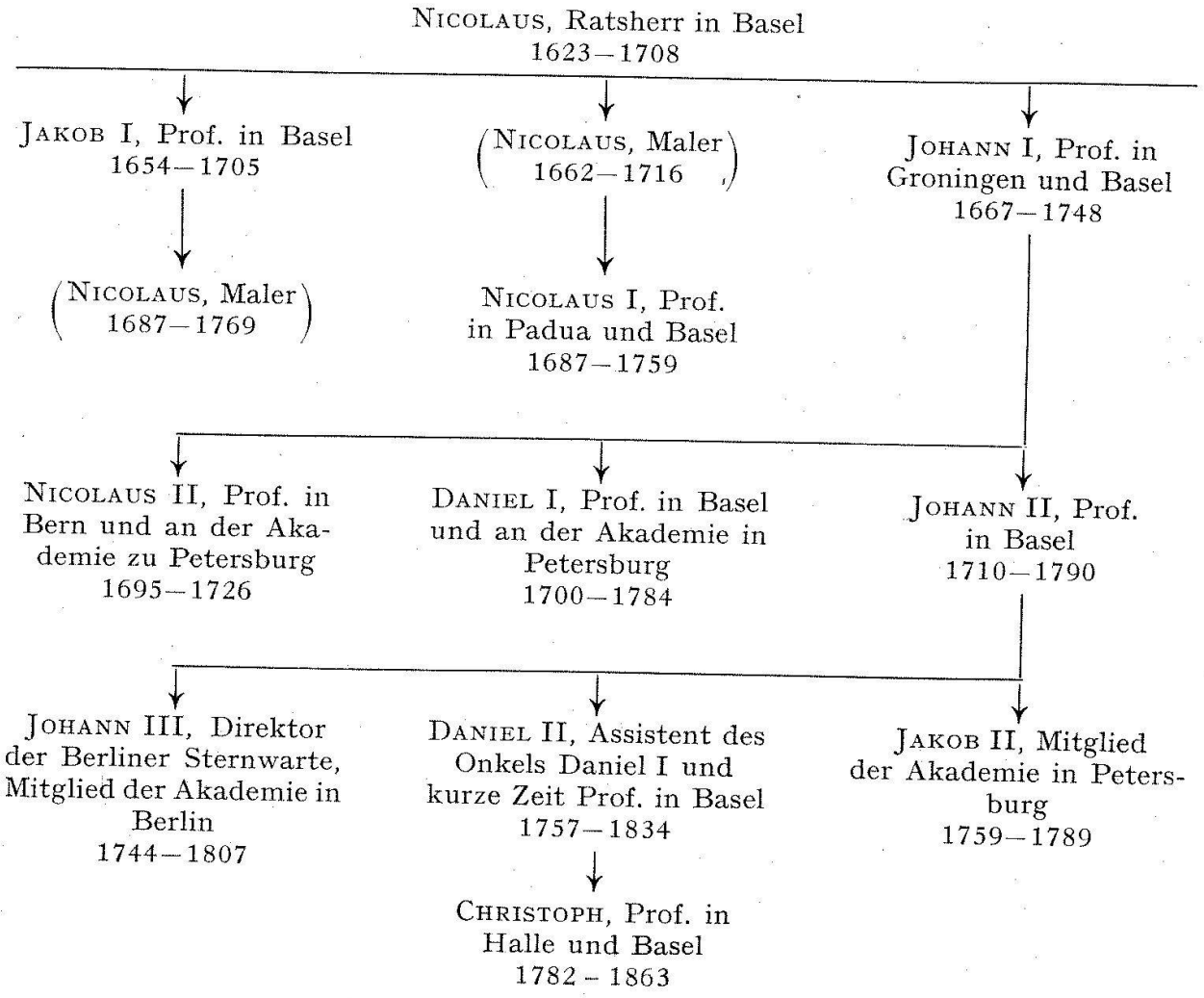
1744 *Opera Jacobi Bernoullii* in 2 Bänden (Genf, Bousquet).

1745 *Commercium philosophicum et mathematicum G. Leibnitii et Joh. Bernoullii* (Genf, Bousquet).

1748 1. Januar, Tod von JOHANN.

Die beiden Portraitabbildungen sind Reproduktionen von Ölgemälden aus der alten Aula der Universität Basel. Das Bildnis Jakobs (Original) wurde vom Bruder Nicolaus (wahrscheinlich 1687) gemalt, das Johanns (Kopie) stammt von J. R. Huber (1740).

STAMMTAFEL DER MATHEMATIKER BERNOULLI



PRINTED IN SWITZERLAND