

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3/4/5 (1948)  
  
**Artikel:** Ludwig Schläfli: 1814 - 1895  
**Autor:** Burckhardt, J.J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-3641>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ludwig Schläfli

1814 - 1895

Ludwig Schläfli wurde am 15. Januar 1814 in Graßwil im Kt. Bern geboren als Sohn des Johann Ludwig Schläfli, Handelsmann, Bürger von Burgdorf, und der Magdalena geb. Aebi. Nach dem Besuch der Schulen in Burgdorf ermöglichte ihm ein Stipendium im Jahre 1829, das Gymnasium in Bern zu durchlaufen und hierauf an der theologischen Fakultät der Universität zu studieren. Bereits zur Schulzeit trat die Begabung zur Mathematik hervor, neben seinen theologischen Studien vertiefte er sich immer mehr in die Wissenschaft, in der er später Unvergängliches geleistet hat. Sein Brotstudium beschloß er 1838 mit dem Staatsexamen. Unter den hinterlassenen Papieren Schläflis ist uns sein philosophischer Examensaufsatz erhalten « Von der Natur und dem Ursprung des Übels nach der spekulativen Idee Gottes und einer wissenschaftlichen wie religiösen Vorstellung der Welt ». Er faßt darin seinen Glauben in die Worte zusammen: « Unter Ursprung des Übels glaube ich die Art und Weise, wie der Mensch sich der Sünde bewußt wird, verstehen zu müssen. Zuerst weiß der Mensch weder Gutes noch Böses, dieses ist unter dem Wort Unschuld zu verstehen, sodann vernimmt er die Forderung der Vernunft und wird sich seiner Schuld bewußt. Dieses ist schon ein Anfang der Besserung. Wir sind auch überzeugt, daß jede menschliche Seele, früher oder später, über die Natur immer mehr siege, und glauben daher, daß sie auch nach dem Tode fort dauert, da sie bei demselben nicht fertig ist. »

Allein, Schläfli vermochte das theologische Amt nicht anzutreten und nahm im Herbst 1837 eine Lehrstelle für Mathematik und Naturlehre an der Burgerschule zu Thun an. Zehn Jahre unterrichtete er mit Erfolg und nützte seine karge Freizeit zum gründlichen Studium der höheren Mathematik. Durch seine Lehrverpflichtungen angeregt, eignete er sich nebenbei ausgedehnte botanische Kenntnisse an. Nach W. Rytz gibt es von Schläfli wertvolle Aufzeichnungen, « die für die Floristik unserer Gegend wie für die Geschichte der Erforschung der Flora des Kantons Bern von Bedeutung sind ». Außerdem befaßte er sich eingehend mit der Morphologie der Pflanzen. Insbesondere fesselte ihn die Stellung der Blätter am Stengel, und er versucht, sie in mathematischen Gesetzen zu erfassen, was ihn auf die Reihen von Fibonacci führt. Neben einem veröffentlichten Aufsatz über Cucurbitaceen und einigen Manuskripten zeugen zwei Vorlesungen über geometrische Botanik in den Jahren 1853/54 von dieser Tätigkeit.

Während seiner Thuner Zeit wurde Schläfli durch gemeinsame Bekannte dem in Berlin wirkenden Landsmann Jakob Steiner vorgestellt. Dieser war im Herbst 1843 eben im Begriff, mit C. G. J. Jacobi, Lejeune Dirichlet und C. W. Borchardt nach Rom zu reisen. Steiner schlug seinen Gefährten vor, Schläfli für den Winter als Dolmetscher mit nach Rom zu nehmen, denn neben dessen mathematischen Fähigkeiten war seine Leichtigkeit, Sprachen zu lernen, bereits bekannt geworden. Hierdurch hatte der Auto-

didakt endlich Gelegenheit, bei den ersten Männern seiner Zeit zu lernen. Dirichlet unterrichtete ihn täglich in Zahlentheorie, Schläflis spätere Arbeiten über quadratische Formen zeugen davon. Daneben übersetzte er zwei Arbeiten von Steiner und zwei von Jacobi ins Italienische. Wir dürfen wohl annehmen, daß viele Arbeiten Schläflis aus diesen Anregungen entstanden sind, die er in jenem Winter von Dirichlet und Jacobi empfing. Im April 1844 mußte er an seine Schularbeit nach Thun zurückkehren. Als 1847 durch den Rücktritt von J. F. Trechsel der Lehrstuhl für Mathematik in Bern frei wurde, konnte sich Schläfli als Privatdozent habilitieren, und es wurden ihm von den Behörden Aussichten auf eine bezahlte Stelle gemacht. So zog er im Frühjahr 1848 von Thun weg mit der Hoffnung, sich ganz der Mathematik widmen zu können. Aber diese Freiheit war teuer erkaufte, wissen wir doch, daß er nach seinen eigenen Worten in jenen Jahren den blauen Hunger gelitten hat. Und an die Erziehungsdirektion schreibt er bei der Überreichung seiner Arbeit über die Resultanten: «beschränkt einzig auf das Honorar von Fr. 400.—, muß ich im eigentlichen Sinne des Wortes darben, nicht nur an meiner Person, was ich mit Freuden ertrüge, sondern auch an allen Hilfsmitteln der Wissenschaft». Die Ernennung zum außerordentlichen Professor im Jahre 1853 änderte hieran wenig. Schläfli mußte sich 1854 bis 1860 seinen Unterhalt mit Berechnungen für die Schweizerische Nationalvorsichtskasse verdienen, was einen großen Teil seiner Arbeitskraft absorbierte. J. H. Graf überliefert uns «Er liebte es nicht, an diese Zeit erinnert zu werden und sprach nicht gerne davon».

Welches waren die Fragen, mit denen sich Schläfli in seiner Zeit als Privatdozent in Bern befaßte?

Nachdem er in Thun einige kleinere Arbeiten meist geometrischen Inhaltes veröffentlicht hatte, vertiefte er sich in Bern in zwei mathematische Probleme bedeutenden Ausmaßes. Das eine betrifft die Theorie der Elimination, das andere die  $n$ -dimensionale Geometrie. Seine Ergebnisse faßt er in zwei umfangreichen Abhandlungen zusammen.

«Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Elimination» sendet Schläfli im Dezember 1850 an die Akademie der Wissenschaften in Wien, wo die Arbeit im IV. Bande der Denkschriften veröffentlicht wird. Das Werk ist bisher nicht als Ganzes gewürdigt worden, was daher kommen mag, daß sich sein Inhalt auf verschiedene Gebiete erstreckt. Den ersten Teil faßt Schläfli in einem Brief an Steiner in die folgenden Sätze zusammen:

«Zum gegebenen System von  $n$  höheren Gleichungen mit  $n$  Unbekannten nehme ich noch eine lineare Gleichung mit litteralen (unbestimmten) Koeffizienten  $a, b, c, \dots$  hinzu und zeige, wie man auf diesem Wege, ohne je mit fremden Faktoren die Rechnung zu belästigen, zur ächten Resultante gelangen kann. Ist alles Übrige numerisch gegeben, so muß diese Resultante in Faktoren zerlegbar sein, welche alle in Beziehung auf  $a, b, c, \dots$  linear sind. In jedem einzelnen dieser linearen Polynome sind dann die Koeffizienten von  $a, b, c, \dots$  die zu einer Lösung gehörenden Werte der Unbekannten.» Es folgen Anwendungen auf spezielle Fälle im Anschluß an Arbeiten von Hesse, Jacobi und Cayley.

Sodann werden grundlegende Sätze über Klasse und Grad einer algebraischen Mannigfaltigkeit entwickelt, die in der Schule der italienischen Geometer Beachtung gefunden haben. Die Arbeit wird durch Untersuchungen über die Klassengleichung der Kurve dritten Grades beschlossen. Sicher hatte Schläfli mit dieser ersten großen Arbeit insofern Erfolg, als sie seinen Namen den führenden Mathematikern seiner Zeit bekannt machte. Durch sie wurde Cayley auf ihn aufmerksam und schrieb seine Abhandlung *« Sur un théorème de M. Schläfli »*, die mit den Worten beginnt: *« On lit dans § 13 d'un mémoire très intéressant de M. Schläfli un très beau théorème sur les Résultants. »* Die Bekanntschaft führte zu einem ausgedehnten Briefwechsel und öffnete Schläfli den Weg, in englischen Journalen publizieren zu können.

Äußerlich hat Schläfli den Erfolg nicht auszunützen verstanden. Steiner gab ihm Anweisungen, die Arbeit an die einflußreichen Stellen zu versenden, aber umsonst: *« Das sind Dinge, die ich auf jedem Spaziergang gepredigt habe; aber er ist ein Ziegel — ein Selbstmörder aus Fahrlässigkeit — er will sein Licht nicht leuchten lassen. »* Jedoch leuchtet der wissenschaftliche Eindruck der Abhandlungen nochmals in den Worten des Nachrufes auf, den Brioschi ihm gewidmet hat: *« Indem ich in den vergangenen Tagen diese wichtige Arbeit wieder lese, scheint es sich mir zu bestätigen, daß wir darin die hervorragenden Eigenschaften des ganzen Werkes Schläflis erblicken. Und diese sind zunächst tiefe und selbständige Kenntnisse der einschlägigen Arbeiten anderer, sodann die Tendenz und die Leichtigkeit im Verallgemeinern der Resultate, endlich größter Scharfblick in der Untersuchung der Probleme unter den verschiedensten Gesichtspunkten. »*

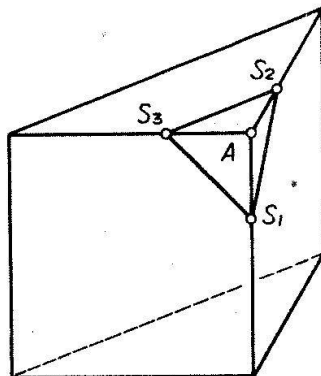
Schlimmer ist es der zweiten großen Jugendarbeit Schläflis ergangen, *« der Weltüberstürmenden, der Erdewälzenden »* (Steiner) Theorie der vielfachen Kontinuität. Die Akademie in Wien lehnte die Drucklegung des großen Umfanges wegen ab, und in Berlin ging es nicht besser. So blieb die Arbeit liegen bis sie nach dem Tod des Verfassers durch J. H. Graf 1901 in den Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft herausgegeben wurde. Nur einzelne Bruchstücke daraus fanden den Weg an die Öffentlichkeit durch das Journal von Crelle, durch Liouvilles Journal und durch das Quarterly Journal of Mathematics.

Die ersten Nachrichten über die Arbeit an der Geometrie in  $n$  Dimensionen stammen aus dem Jahre 1850, der Abschluß fällt ins Jahr 1852. Wir wollen versuchen, einen Einblick in Schläflis Entdeckungen zu geben. Wir dürfen wohl sagen, daß im Mittelpunkt der unvergänglichen Arbeit die ausführliche Theorie der regelmäßigen Körper im euklidischen Raume  $R_n$  von  $n$  Dimensionen und der damit verknüpften Probleme der regelmäßigen Unterteilung der höherdimensionalen Sphären steht.

Im  $R_3$  heißt ein von Ebenen begrenzter Körper ein Polyeder. Wir setzen im folgenden voraus, daß dieses ganz im Endlichen liege und nirgends konkav sei. Entsprechend heißt im  $R_n$  ein von Hyperebenen begrenzter Körper ein Polytop, das wir wiederum ganz im Endlichen gelegen denken und das nirgends konkav sei. Um zum Begriff des



regelmäßigen Polytopes zu gelangen, definiert man vorteilhaft zuerst das gleichförmige Polytop. Denken wir uns im  $R_n$  ein Polytop  $\Pi_n$  gegeben. Wenn es möglich ist, durch eine Spiegelung oder eine Drehung von  $\Pi_n$  eine Ecke  $A$  in eine Ecke  $B$  überzuführen, so nennt man  $A$  und  $B$  äquivalent. Wir definieren rekursiv:



Ein Polygon  $\Pi_2$  heißt gleichförmig, wenn es regelmäßig ist. Ein Polytop  $\Pi_n$  ( $n > 2$ ) heißt gleichförmig, wenn alle seine begrenzenden  $\Pi_{n-1}$  gleichförmig und alle seine Ecken äquivalent sind. In obenstehender Abbildung haben wir ein gleichförmiges Polyeder vor uns, es ist begrenzt von drei Quadraten und zwei gleichseitigen Dreiecken. Die gleichförmigen Polyeder werden auch Archimedische Körper genannt.

Es kann gezeigt werden, daß ein gleichförmiges Polytop  $\Pi_n$  lauter gleich lange Kanten  $\Pi_1$  und eine umschriebene Sphäre besitzt. Wegen der letzteren Eigenschaft ist es möglich, von deren Mittelpunkt  $M$  den Radius zu einem Eckpunkt  $A$  zu ziehen. Auf ihn denken wir uns senkrecht eine Hyperebene derart errichtet, daß diese alle von  $A$  ausgehenden Kanten  $\Pi_1$  schneidet, etwa in den Punkten  $S_1, S_2, \dots, S_i$ . Das hierdurch erhaltene Polytop  $\Pi_{n-1}$  heißt das Eckpolytop des Punktes  $A$ . Da nach Definition des gleichförmigen Polytopes alle Ecken äquivalent sind, ist diese Konstruktion unabhängig von der speziell ausgewählten Ecke  $A$ , wir dürfen daher kurz vom Eckpolytop eines gleichförmigen Polytopes sprechen.

Nach dieser Vorbereitung ist es möglich, ein regelmäßiges Polytop rekursiv zu definieren als ein gleichförmiges Polytop  $\Pi_n$ , dessen Eckpolytop  $\Pi_{n-1}$  regelmäßig ist.

Schläfli legt seiner Untersuchung der regelmäßigen Polytope seine Entdeckung zugrunde, daß ein solches durch ein Symbol, das wir heute das Schläflische Symbol nennen, charakterisiert werden kann. Wir definieren:

$\{k_1\}$  ist das Schläflische Symbol des ebenen regelmäßigen  $k_1$ -Ecks.  $\{k_1, \dots, k_{n-1}\}$  ist das Schläflische Symbol desjenigen regelmäßigen Polytopes  $\Pi_n$ , dessen Begrenzungs-polytope das Symbol  $\{k_1, \dots, k_{n-2}\}$  und dessen Eckpolytope das Symbol  $\{k_2, \dots, k_{n-1}\}$

haben. Habe für ein regelmäßiges Polytop  $II_n$  das Begrenzungspolytop  $II_{n-1}$  das Symbol  $\{k_1, \dots, k_{n-2}\}$  und das Eckpolytop  $II_{n-1}^*$  das Symbol  $\{k_2^*, \dots, k_{n-1}^*\}$ . Wenn wir zeigen können, daß  $k_i = k_i^*$  ( $i = 2, \dots, n-2$ ), so ist die Schläflische Bezeichnungsweise gerechtfertigt.

Sei  $P$  die Operation: Von einem regelmäßigen Polytop nimmt man das  $(n-1)$ -dimensionale begrenzende Polytop. Sei  $Q$  die Operation: Vom selben Polytop nimmt man das Eckpolytop. Bilden wir

$$QP II_n = \{k_2, \dots, k_{n-2}\}, \quad PQ II_n = \{k_2^*, \dots, k_{n-2}^*\}.$$

Weil nach Definition ein regelmäßiges Polytop nur einerlei  $(n-2)$ -dimensionale Begrenzungspolytope besitzt, ist

$$QP II_n = PQ II_n$$

und somit

$$k_i = k_i^* \quad (i = 2, \dots, n-2).$$

Schläfli fand einen Weg, alle regelmäßigen Polytope im  $R_n$  zu bestimmen, indem er die Zahlen  $k_1, \dots, k_{n-1}$  des nach ihm benannten Symbolen berechnete. Werfen wir einen Blick auf sein Verfahren!

In der Ebene gibt es bekanntlich zu jedem  $k_1$  ein regelmäßiges  $k_1$ -Eck. Im Raume  $R_3$  geht Schläfli vom Eulerschen Polyedersatz aus. Diesen hat er sodann als Erster für den  $R_n$  bewiesen und folgendermaßen formuliert: Sei ein Polytop mit  $a_0$  Ecken,  $a_1$  Kanten,  $a_2$  Flächen (zweidimensional),  $\dots$ ,  $a_{n-1}$  begrenzenden  $(n-1)$ -dimensionalen Polytopen gegeben und sei  $a_n = 1$  gesetzt. Dann gilt nach Schläfli

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1. \quad (1)$$

Für  $n = 3$  erkennen wir hierin den bekannten Eulerschen Polyedersatz:

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2. \quad (2)$$

Da ferner für einen Körper mit dem Symbol  $\{k_1, k_2\}$  gilt:

$$k_2 \cdot a_0 = 2 a_1 = k_1 \cdot a_2, \quad (3)$$

so folgt mit Hilfe von (2):

$$a_0 : a_1 : a_2 : 1 = 4 k_1 : 2 k_1 k_2 : 4 k_2 : [4 - (k_1 - 2)(k_2 - 2)].$$

Die Natur der Aufgabe verlangt für  $[4 - (k_1 - 2)(k_2 - 2)]$  einen positiven Wert, somit sind für das Produkt  $(k_1 - 2)(k_2 - 2)$  nur die Werte 1, 2, 3 möglich. Da der kleinste Wert für  $k_1$  sowohl als auch für  $k_2$  die Zahl 3 ist, erhält man die folgenden möglichen Schläflischen Symbole:

$$\begin{array}{lll} \{3, 3\} \text{ Tetraeder,} & \{3, 4\} \text{ Oktaeder,} & \{3, 5\} \text{ Ikosaeder,} \\ \{4, 3\} \text{ Würfel,} & \{5, 3\} \text{ Dodekaeder.} & \end{array}$$

Daß zu diesen Symbolen wirklich Körper gehören, zeigt man durch die Konstruktion.

Es liegt nahe zu versuchen, auf analogem Wege die regelmäßigen Körper im  $R_4$  zu bestimmen. Für  $n = 4$  wird aus (1)

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

Diese Gleichung ist im Unterschied zu (2) homogen, man kann daher nur die Verhältnisse der  $a_i$  bestimmen. Schläfli sagt hierzu: «Es bleibt daher kein anderes Mittel übrig, die Existenz eines regelmäßigen Polytopes zu beurteilen und die Zahl seiner Stücke zu erfahren, als die wirkliche Konstruktion.» Zu diesem Zweck bestimmt er den Radius der umschriebenen Sphäre eines regelmäßigen Polytopes  $\{k_1, k_2, k_3\}$  der Kantenlänge eins. Soll dieser Radius reell sein, so ergibt sich, daß

$$\sin \frac{\pi}{k_1} \cdot \sin \frac{\pi}{k_3} > \cos \frac{\pi}{k_2} \quad (4)$$

sein muß. Die einzigen Zahlentripel, die dieser Bedingung genügen und für die bereits  $\{k_1, k_2\}$  bzw.  $\{k_2, k_3\}$  regelmäßige Körper sind, sind die folgenden sechs:

$$\{3, 3, 3\}, \quad \{4, 3, 3\}, \quad \{3, 3, 4\}, \quad \{3, 4, 3\}, \quad \{5, 3, 3\}, \quad \{3, 3, 5\}.$$

Schläfli zeigt sodann, daß sich zu ihnen tatsächlich Polytope konstruieren lassen, daß es somit im  $R_4$  genau sechs regelmäßige Polytope gibt. Wir sehen, daß Schläfli bei seinem Vorgehen insofern vom Glück begünstigt war, als die Bedingung (4) gerade die nötige Schärfe besitzt, bereits alle regelmäßigen Polytope auszusondern. Sehen wir uns diese etwas näher an:

$\{3, 3, 3\}$  ist das Analogon zum regelmäßigen Tetraeder und wird auch das regelmäßige Simplex genannt. Es besitzt fünf Ecken, zehn Kanten, zehn gleichseitige Dreiecke und fünf begrenzende Tetraeder, weswegen es auch Fünfczelle heißt.

$\{4, 3, 3\}$  ist das Analogon zum Würfel und ist von acht Würfeln begrenzt: Achtzell. Dual dazu ist

$\{3, 3, 4\}$ , das Analogon zum Oktaeder. Die Begrenzung besteht aus sechzehn Tetraedern: Sechzehnzcelle.

Schläfli beweist im weiteren Verlauf seiner Arbeit, daß es in jedem  $R_n$  für  $n > 4$  nur je drei regelmäßige Polytope gibt, nämlich die Analoga zu den drei eben besprochenen:

$\{3, 3, \dots, 3\}$ : Regelmäßiges Simplex.

$\{4, 3, \dots, 3\}$ :  $n$ -dimensionaler Würfel, und dual dazu

$\{3, \dots, 3, 4\}$ : Regelmäßiges  $n$ -dimensionales Oktaeder.

Außer den obigen regelmäßigen Polytopen, die in jedem  $R_n$  auftreten, gibt es im  $R_4$  noch die besonderen drei:

$\{3, 4, 3\}$ , das von 24 Oktaedern begrenzte Vierundzwanzigzell.

$\{5, 3, 3\}$ , das von 120 Dodekaedern begrenzte Einhundertzwanzigzell, und dual dazu

$\{3, 3, 5\}$ , das von 600 Tetraedern begrenzte Sechshundertzell.

Läßt man die Forderung, daß die Polytope konvex sein müssen, fallen, so treten zu den obigen weitere regelmäßige hinzu. So haben wir die Sternpolygone und die teilweise schon Kepler bekannten sternförmigen Polyeder. Mit wesentlich denselben Methoden wie soeben gelingt es Schläfli, die sternförmigen Polytope des  $R_4$  und ihre Artzahl anzugeben.

Wenden wir uns einer anderen nicht minder wichtigen Entdeckung Schläflis zu, sie steht im zweiten Teil der Theorie der vielfachen Kontinuität. Wir wollen das Resultat zuerst für die Ebene und den Raum formulieren: Im Einheitskreis ist bekanntlich das Differential eines Bogens proportional dem zugehörigen Winkel. In einem Kugeldreieck mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  gilt für das Differential der Fläche  $S$ :

$$dS = d\alpha + d\beta + d\gamma, \quad (5)$$

woraus durch Integration  $S = \alpha + \beta + \gamma + \text{const.}$  Die Konstante wird zu  $-\pi$  bestimmt, indem man etwa  $\alpha = \pi$ ,  $\beta = \gamma = 0$  nimmt. Somit gilt für die Fläche  $S$  des Kugeldreieckes

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi, \quad (6)$$

wie bekannt. Sei im  $R_n$  die Einheitssphäre

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \quad (7)$$

gegeben. Ferner seien  $n$  Hyperebenen durch den Nullpunkt gelegt, die wir kurz mit  $(1) = 0$ ,  $(2) = 0$ , ...,  $(n) = 0$  bezeichnen. Durch  $(1) \geq 0$ ,  $(2) \geq 0$ , ...,  $(n) \geq 0$  wird auf der Sphäre (7) ein sphärisches Simplex  $S_n$  ausgeschnitten, dessen «Fläche» wir mit  $S_n$  bezeichnen.  $S_n$  ist begrenzt von sphärischen Simplexen von weniger Dimensionen und die wir als Randsimplexe bezeichnen. Schläflis allgemeiner Satz besagt:

$$dS_n = \frac{1}{n-2} \{\sum S_{n-2} d\lambda\}, \quad (8)$$

wo  $S_{n-2}$  die Fläche eines um zwei Dimensionen niedrigeren Randsimplexes  $S_{n-2}$  ist und  $\lambda$  ein passender Winkel zwischen solchen; die Summation erstreckt sich auf alle eben genannten Randsimplexe. Für  $n = 3$  geht (8) in die frühere Formel (5) über, wenn man  $S_1 = 1$  definiert. Der allgemeine Bau von (8) ist aber aus dem besonderen Falle  $n = 3$  keineswegs leicht zu erraten. Schläflis Entdeckung ist sehr tieflegend, wie die Folgerungen daraus zeigen. Sein Entdecker gibt dafür in der Kontinuität einen Beweis mittels differentialgeometrischer Methoden, später fügt er einen solchen mit Hilfe der Integralrechnung hinzu. Wir wollen mit (8) eine Umformung vornehmen. Sei  $O_n$  die ebenfalls von Schläfli erstmals bestimmte Oberfläche der Sphäre (7). Durch

$$S_n = \frac{1}{2^n} O_n f_n$$

definiert Schläfli die zu  $S_n$  gehörige plagioschematische Funktion  $f_n$ , sie wird heute meist Schläflische oder Simplex-Funktion genannt. Für diese beweist er die Rekursionsformel:

$$f_{2m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k f_{2m-2k} = a_0 \Sigma f_{2m} - a_1 \Sigma f_{2m-2} + \dots, \quad (9)$$

wo  $a_k$  proportional der  $(k+1)$ -ten Bernoullischen Zahl  $B_k$  ist. (9) besagt, daß sich die Schläflische Funktion in einem Raum ungerader Dimension zurückführen läßt auf Schläflische Funktionen in Räumen gerader Dimensionszahl. Wir wollen den Satz durch die folgende Betrachtung erläutern:

Nimmt man das sphärische Simplex im  $R_n$  unendlich klein, so wird es zu einem euklidischen Simplex im  $R_{n-1}$ . (9) besagt dann für  $n = 2$  das bekannte Resultat, daß zwischen den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  eines Dreiecks eine lineare Relation besteht:  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Für  $f_{2m}$  gibt es keine entsprechende Reduktion, dies ist im Falle des Tetraeders bekannt. Diese Tatsache steht wiederum im engen Zusammenhang damit, daß der Eulersche Polyedersatz in Räumen gerader Dimension eine homogene Relation, in solchen ungerader Dimension eine inhomogene ist. Schläfli war sich der Bedeutung seiner Entdeckung voll bewußt, schreibt er doch an Jakob Steiner: «Ich glaube den erwähnten allgemeinen Satz nicht zu überschätzen, wenn ich ihn dem Schönsten, was in der Geometrie geleistet worden ist, an die Seite stelle.»

Nachdem wir zwei der wichtigsten Ergebnisse aus der Theorie der vielfachen Kontinuität besprochen haben, wollen wir einen kurzen Überblick über den sonstigen Inhalt des Werkes geben, das in drei Teile zerfällt.

Der erste Teil enthält die «Lehre von den linearen Kontinuen». Darin wird die Euklidische Geometrie im  $R_n$  begründet. Nachdem die orthogonale Transformation und der Winkel zweier Richtungen eingeführt ist, werden Inhaltsberechnungen angestellt. Hierbei erhält Schläfli den Satz, daß der Inhalt des Parallellflaches gleich der Determinante der orthogonalen Projektionen seiner Kanten ist. Sodann wird das Volumen der

Pyramide durch deren Kanten ausgedrückt und der Pythagoräische Lehrsatz im  $R_n$  bewiesen. Es folgt die Berechnung der  $n$  Winkel zwischen zwei linearen Räumen  $R_n$  und  $R_n^*$ , die nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben. Am Ende des ersten Teiles steht sodann die bereits besprochene Theorie der regelmäßigen Polytope.

Der zweite Teil handelt von der «Lehre von den sphärischen Kontinuen». Außer der oben erwähnten Theorie der Schläflischen Funktion enthält er eine ausführliche Behandlung der Zerlegung eines beliebigen sphärischen Simplexes in rechtwinklige. Der Abschnitt schließt mit dem Satz über die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahles auf die Eckpunktradien eines regelmäßigen Polytopes, der in neuerer Zeit wiederum das Interesse der Forschung gefunden hat.

Der dritte Teil ist überschrieben: «Verschiedene Anwendungen der Theorie der vielfachen Kontinuität, welche das Gebiet der linearen und sphärischen übersteigen». Er behandelt teils die Übertragung von Sätzen von J. Binet, C. Monge, M. Chasles und Ch. Dupin auf quadratische Kontinua im  $R_n$ , teils enthält er Entdeckungen, die Schläfli eigen sind. Zunächst wird für ein quadratisches Kontinuum der Mittelpunkt, die Hauptachsen und die konjugierten Durchmesser bestimmt. Sodann beweist Schläfli das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen mittels einer Stetigkeitsbetrachtung. Schläfli ist somit neben Gauß und J. J. Sylvester, der dieses Gesetz 1852 publiziert hat, als Mitentdecker zu stellen. Hat er wohl darüber mit Jacobi, dem dieses Gesetz um jene Zeit auch bekannt war, bereits in Rom gesprochen?

Es folgt unter anderem eine Verallgemeinerung eines Satzes von J. Binet für ein System konjugierter Halbmesser: Die Summe der Quadrate aller  $m$ -fachen aus den konjugierten Halbmessern eines Systems gebildeten Parallelepipede ist gleich wie wenn das System aus den Hauptachsen gebildet wird. Sodann gelingt Schläfli eine Einteilung aller quadratischen Kontinuen mit Mittelpunkt in zwei Gattungen. Sind alle Hauptachsenquadrate oder nur eines positiv, so hat jede tangierende Hyperebene mit der Fläche nur einen Punkt gemein (für  $n = 3$ : Ellipsoid und zweischaliges Hyperboloid), in den anderen  $n - 2$  Fällen findet ein Schnitt statt. Weiter folgt die Verallgemeinerung des Satzes von Monge über den Direktorkreis oder den Hauptkreis eines Mittelpunktkegelschnittes: Läßt man die begrenzenden Hyperebenen eines rechtwinkligen Ecks eine Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung berühren, so liegt die Ecke auf einer konzentrischen Sphäre, deren Radiusquadrat gleich ist der Summe der Hauptachsenquadrate. Nachdem Schläfli das einzelne quadratische Kontinuum untersucht hat, wendet er sich den konfokalen Systemen zu. Auch für sie gelten die uns aus dem  $R_3$  bekannten Sätze, daß sie orthogonal sind und sich in Krümmungslinien schneiden. Diese letztere Tatsache wird dadurch bewiesen, daß Schläfli gleich zeigt, daß sich irgend zwei orthogonale Flächen in solchen Kurven schneiden. Daß im  $R_3$  die Bestimmung eines Systems orthogonaler Flächen von einer linearen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung abhängt, berichtet Schläfli bereits am 3. Januar 1852 seinem Freunde Jakob Steiner. Hiermit hat er ein Resultat von G. Darboux vorweggenommen. Er begnügt sich aber nicht mit der Feststellung dieses Ergebnisses, sondern gibt uns eine graphische Konstruktion eines Systems orthogonaler Flächen, wenn eine derselben willkürlich gegeben ist. Die Über-



tragung obiger Entdeckung auf den  $R_n$  bereitet ihm große Schwierigkeiten, und wir entnehmen dem angeführten Brief, daß gerade diese es waren, die den Abschluß der Kontinuität verzögerten.

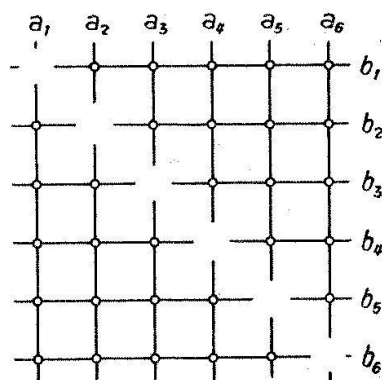
Von den  $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$  im  $R_n$  auftretenden Bedingungen für die Orthogonalität entspricht ein erstes System von  $\binom{n-1}{2}$  Gleichungen der oben angegebenen Gleichung dritter Ordnung, während für  $n > 3$  wesentlich neu ein weiteres System von  $\binom{n-1}{3}$  Differentialgleichungen hinzutritt. Schläfli vermutet, daß diese

Gleichungen bereits aus denjenigen des ersten Systems folgen, doch weiß er für die Lösung dieser Aufgabe « durchaus keinen Rat ». Weiterhin wendet sich Schläfli der Berechnung des Inhaltes zu, der zwischen  $n$  konfokalen quadratischen Kontinuen gelegen ist und bestimmt im Anschluß an Jacobi die geodätischen Linien auf einem solchen. Der Schlußabschnitt der großen Arbeit wird durch ihren Verfasser mit folgenden Worten gekennzeichnet: « Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe des Differentialparameters und des Potentials von Gauß, Lamé, Liouville und anderen eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier einschlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dies nachzuweisen, ist der Zweck der folgenden Paragraphen. Wenn darin das meiste dem Leser bloß als generalisierende Nachahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen muß, so wird er doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allgemeine Form der Entwicklung arbiträrer Funktionen von beliebig vielen Variablen in Reihen von periodischer Natur finden, die vielleicht einiges Interesse darbietet; überdies glaubte ich, Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Kontinuität in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen. »

Sehen wir noch zu, wie Schläflis Jugendarbeit bei ihrem Erscheinen beurteilt wird. « Diese Abhandlung übertrifft an wissenschaftlichem Wert einen guten Teil von allem, was bis heute auf diesem Gebiet der mehrdimensionalen Geometrie erschienen ist », schreibt P. H. Schoute und beklagt das Schicksal des Verfassers mit den Worten: « So erfuhr denn dieser das tiefe Leid, das dem zufällt, der seiner Zeit voraus ist: Die Früchte seiner reifsten Studien nicht weltbekannt machen zu können. Und hierfür wird der Erfolg der Einteilung der kubischen Flächen nur eine kleine Entschädigung gewesen sein, weil diese, so verdienstvoll sie auch sein möge, nach meiner Meinung lange nicht so von Genie spricht, wie die Theorie der vielfachen Kontinuität. »

Die Bekanntschaft Schläflis mit Steiner wirkte sich in der ersten Hälfte der fünfziger Jahre außerordentlich günstig aus, wie uns der ausgedehnte Briefwechsel zeigt. Steiners « Tiefblicke » haben dem lehrbegierigen Jünger neue Gebiete eröffnet. Insbesondere hat

er ihn mit Cayleys Entdeckung der 27 Geraden auf der Fläche dritter Ordnung bekannt gemacht. Nicht umsonst! Am 2. Mai 1854 schreibt Schläfli einen Brief nach Berlin, worin er seine Entdeckung des Doppelsechlers im Anschluß an die 27 Geraden mitteilt. Der Ausgangspunkt der folgenden Darstellung Schläflis bildet die Tatsache, daß sich zu vier windschiefen Geraden (Schläfli sagt « Strahl ») im allgemeinen zwei Geraden finden lassen, die alle vier schneiden. « Durch einen Strahl  $a_1$  gehen fünf beliebige Strahlen  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ . Läßt man von diesen der Ordnung nach je einen weg, so geht durch die vier übrigen, außer  $a_1$  immer noch ein Strahl, und man erhält so die fünf Strahlen  $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ . Nun kann durch  $a_3, a_4, a_5, a_6$  außer  $b_2$  noch ein Strahl gelegt werden; dann wird dieser  $b_1$  von selbst auch durch  $a_2$  gehen. Werden nämlich auf  $a_1$  vier beliebige Punkte, und auf jedem der durchgehenden Strahlen  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  deren beliebige drei gegeben, so ist durch alle 19 Punkte eine  $F^3$  bestimmt, und man erkennt sogleich, daß alle sechs Strahlen darein fallen, usf. Ich nenne dieses System von  $2 \times 6$  Cayleysche Strahlen, wo je einer der einen Hälfte den gleichnamigen der anderen nicht, aber alle fünf übrigen schneidet, während die sechs Strahlen derselben Hälfte sich nicht schneiden, — einen *Doppelsechser*. Die  $F^3$  hat deren 36. » Zur Erläuterung geben wir



in beistehender Abbildung das Inzidenzschema der Geraden eines Doppelsechlers. Schläfli hat seine Entdeckung im 2. Band des Quarterly Journal of Mathematics 1858 veröffentlicht und dieser Arbeit in den Londoner Transactions 1863 seine Einteilung der Flächen dritter Ordnung nach Maßgabe der Singularitäten in 22 Arten folgen lassen. Hierfür erhielt er 1870 von der Berliner Akademie den Steiner-Preis von 600 Thalern.

In Schläflis Nachlaß befindet sich eine 60 Seiten lange Einführung in die Theorie der Flächen dritten Grades mit der Herleitung der darauf befindlichen Doppelsechser, sie stammt wohl aus dem Jahre 1871. Wir geben daraus die Seite 11 wieder und hoffen, daß diese Arbeit bei Gelegenheit veröffentlicht werden kann. (Das Faksimile ist etwas verkleinert.)

### Fläche dritten Grades.

(11)

Die Anzahl der Punkte, durch die sie bestimmt wird, ist 19; das Polynom ihrer Gleichung enthält  $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$  Terme.

Classe. Man die Gleichung einer bestimmten Fläche in Coordinaten vorlegt, so müssen noch zwei lineare Gleichungen hinzugefügt werden damit das System aller drei Gleichungen eine Ebene bestimmt. Die Ebene geht durch zwei der drei Punkte (die seien A, B), durch die linearen Gleichungen an gegeben, und berührt die bestimmte Fläche. Es gibt so manne Ebenen dieser Art, als das System Lösungen hat, d. h. so alle die Classe an zeigt.

$f(w, x, y, z) = 0$  sei die Gt. der Fläche dritten Grades in Punktcoordinaten. Der Entwicklungspunkt  $(w, x, y, z)$  der Ebene erfüllt die drei Bedingungen  $f = 0, Af = 0, Bf = 0$ . Die Anzahl der Lösungen ist  $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ . Die allgemeine Fläche dritten Grades ist also von der 12ten Classe.

### Kumpfbrenner Regel.

Von einem beliebigen Punkte A aus werden alle Entwicklungsebenen an die Fläche  $f = 0$  gelegt; diese erfüllen die Kumpfbrenner Regel; je zwei einander nicht auf einander folgende Ebenen schneiden sich in einem von A aus gefundenen Punkte, welche die Basis ( $f = 0$ ) berührt. Der Entwicklungspunkt genügt den drei Gleichungen  $f = 0, Af = 0$ . Die Kumpfbrenner, in der alle solchen Entwicklungspunkte liegen, man Entwicklungsebenen heißen. Denselben man sie mit irgend einer Ebene, so hat man ein System von 3 Gleichungen, deren Grad der Reihe nach 3, 2, 1 ist; das System hat also 6 Lösungen; die Kumpfbrenner wird folglich von jeder Ebene in 6 Punkten geschnitten; man sagt daher, sie sei vom sechsten Grade; sie sei daher mit  $R^6$  (Kumpfbrenner vom sechsten Grade) bezeichnet. Man bestimme den Grad, die Classe der einen

Werfen wir noch einen Blick auf Schläflis übrige geometrische Arbeiten! Im Jahre 1866 veröffentlichte er die Arbeit «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen» (J. reine angewandte Math. 65). Zwei polare Simplexe im  $R_n$  haben danach die Eigenschaft, daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken assoziiert sind, d. h. daß jeder lineare Raum  $R_{n-2}$ , der  $n$  dieser Geraden schneidet, auch die  $(n+1)$ -te schneidet. Solche Simplexe heißen seither in Schläflischer Lage, die Umkehrung des Satzes wurde von Berzolari bewiesen. In unserer Zeit haben die Herren Prof. Kollros, Longhi und Sydler Beiträge zu diesem Problemkreis geliefert. — Nach der Aufstellung der allgemeinen Eigenschaften der orthogonalen Substitutionen in der Theorie der vielfachen Kontinuität ist Schläfli nochmals auf dieses Problem zurückgekommen und hat die Reduktion einer orthogonalen Matrix durch Ähnlichkeitstransformation behandelt, was später von C. Jordan vervollständigt wurde.

Schläfli bearbeitete erfolgreich Probleme aus der Schule der italienischen Geometer. Er gab eine Bedingung dafür an, daß eine Mannigfaltigkeit konstante Krümmung besitzt: Ihre geodätischen Linien müssen in einem passenden Koordinatensystem als Geraden erscheinen. Ferner untersuchte er die Frage nach dem Raum kleinster Dimension, in den eine Mannigfaltigkeit eingebettet werden kann; seine darauf bezügliche Vermutung ist erst in neuerer Zeit durch M. Janet und E. Cartan (1926/27) bewiesen worden.

In die Betrachtung nichteuklidischer Raumformen schloß Schläfli den physikalischen Raum mit ein. Riemann folgend, hatte für ihn der Raum der wirklichen Erscheinungen nichteuklidische Metrik. In einem Aufsatz «Über die Beziehung zwischen Analyse und geometrischer Intuition» zieht er hieraus die Konsequenzen. Er beschreibt darin den Raum als lineare, unendliche, orthogonale Mannigfaltigkeit und verknüpft mit ihm, Euler folgend, die Zeit durch das Trägheitsgesetz. Dabei scheut er die Auseinandersetzung mit der herrschenden orthodoxen Anschauung nicht.

Kehren wir zum Ausgangspunkt von Schläflis geometrischen Forschungen zurück! Nach der Abfassung seines Jugendwerkes wurde er durch seinen Landsmann Jakob Steiner mächtig gefördert. Aus der Zeit des gemeinsamen Briefwechsels sind uns viele Hefte geometrischen Inhaltes hinterlassen, aus denen nach einer Bemerkung von Herrn Prof. W. Scherrer hervorgeht, daß Schläfli zu Steiners Lösung des isoperimetrischen Problems kritisch eingestellt war und die Notwendigkeit, die Existenz des Extremums zu beweisen, gesehen hat.

Obschon Schläfli nur eine einzige Arbeit zur Zahlentheorie veröffentlicht hat, dürfen wir doch nicht unterlassen, seine Leistung und seinen Einfluß auf diesem Gebiet zu erwähnen. Wie wir schon bemerkten, wurde er vom ersten Interpreten von Gaußens Jugendwerk in die königliche Wissenschaft eingeführt, und es ist nicht verwunderlich, daß dieser Unterricht in Schläflis Schaffen seinen Niederschlag gefunden hat. Seine Publikation betrifft die Komposition der quadratischen Formen, für die er eine symbolische Formel angibt, mit der er wohl das bei Gauß fehlende assoziative Gesetz beweisen wollte. Aufschlußreicher als diese Arbeit ist für Schläflis Schaffen sein Nachlaß.

Außer einigen hervorragenden Ausarbeitungen befinden sich darin bemerkenswerte Tabellen. Um diese zu erläutern, darf ich kurz an folgendes erinnern: Gauß, ausgehend von Eulers Arbeiten, betrachtete die binäre quadratische Form

$$(a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wo  $a, b, c$  gegebene ganze Zahlen, die Koeffizienten, sind, und  $x$  und  $y$  unbestimmte ganze Zahlen. Als Determinante wird der Ausdruck  $D = b^2 - ac$  bezeichnet. Man betrachte die Transformationen

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y', \quad |\alpha\delta - \beta\gamma| \neq 0; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganzzahlig,} \end{aligned}$$

von verschiedenen Formen ineinander. Solche Formen müssen gleiche Determinante haben und heißen äquivalent. Äquivalente Formen bilden eine Formenklasse, als Repräsentant einer Formenklasse kann man eine reduzierte Form nehmen. Ferner teilt man die Formen ein in Geschlechter mittels gewisser Restcharaktere. Der Hauptsatz besagt nun, daß zu gegebener Determinante nur endlich viele Klassen gehören. Dabei gestaltet sich die Untersuchung für positives  $D$  wesentlich anders wie für negatives. Diese Ergebnisse hat Gauß zum Teil mittels großer Tabellen gefunden, die im Nachlaß herausgegeben wurden (C. F. Gauß, Werke, Bd. 2, Seite 450 ff.). Auch in Schläflis Nachlaß befinden sich hierzu Tabellen, und zwar für positives wie auch für negatives  $D$ .

Für negative Determinante reichen die Schläflischen Tabellen von  $D = -135$  bis  $-1303$ , während die Gaußschen viel weiter gehen. Schläfli gibt aber im Unterschied zu Gauß überall die reduzierten Formen an, nicht nur die Anzahl der Klassen pro Geschlecht. Insbesondere interessieren dabei die sog. irregulären Determinanten. Bekanntlich bilden die Klassen des Hauptgeschlechtes eine Abelsche Gruppe. Diese ist meist zyklisch. Aber schon Gauß hat bemerkt, daß sie auch nicht zyklisch sein kann und hat dann die Determinante eine irreguläre genannt. Im ersten Tausend fand er 13 solche. Nach Schläfli hat er dabei vier irreguläre übersehen.

Für positive Determinanten findet sich bei Schläfli eine Tabelle für  $D = 75$  bis 1006. Diese ist viel umfangreicher als diejenige von Gauß, die bis 300 und von 800 bis 1000 geht und darüber noch vereinzelte Determinanten anführt. Da die Reduktionstheorie für positive Determinanten viel mühsamer als diejenige für negative Determinanten ist, steckt in den Schläflischen Tabellen eine ungeheure Arbeit. Auch hier zeigen sich wieder einige Abweichungen von Gauß, und es ist merkwürdig, daß Schläfli nirgends hierauf aufmerksam macht, stammen doch seine Rechnungen wahrscheinlich aus den Jahren 1878–80, jedenfalls nach 1863, dem Erscheinungsjahr von Gaußens Nachlaß. Im Exemplar der Gaußschen Tabellen, das aus dem Nachlaß von Schläflis Schüler Arnold Meyer stammt, habe ich einige Korrekturen finden können, vielleicht wußte Meyer durch Schläfli von den Abweichungen. Es scheint mir begründet, diese Ergebnisse mühsamster Arbeit der Wissenschaft nicht verborgen zu halten und es ist zu hoffen, für die Publi-



kation den geeigneten Weg zu finden. — Schläflis Kenntnisse der quadratischen Formen haben wohl ihre größte Wirkung durch die Forschungen seines Schülers Arnold Meyer gefunden, dessen bahnbrechende Arbeiten über die indefiniten ternären Formen erst in jüngster Zeit durch die Arbeiten von Martin Eichler ihre volle Bedeutung erlangt haben.

Den geometrischen und arithmetischen Arbeiten stehen Schläflis funktionentheoretische Arbeiten nicht nach, sie haben seinen Namen dauernd in der Wissenschaft verankert. Es ist erstaunlich, daß sich Schläfli völlig selbständig in die neuen Zweige der damals mächtig aufblühenden Funktionentheorie einarbeiten und darin Bleibendes leisten konnte. Der Ausgangspunkt ist eine kleine Veröffentlichung in den Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern 1862 «Über den Gebrauch des Integrationsweges».

Hier berechnet Schläfli einige Integrale, wie etwa  $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$  für  $0 < \Re(a) < 1$

oder das Wahrscheinlichkeitsintegral  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  mittels Integration im Komplexen, in-

dem der Integrationsweg passend gewählt wird. Solche Beispiele werden heute den Studierenden als Übungen zur Funktionentheorie gegeben, Schläfli bemerkt abschließend: «Die hier angeführten Beispiele stehen in allen Lehrbüchern, werden aber meist mit Hilfe von Doppelintegralen bewiesen. Ich wollte nur zeigen, daß man für diese Zwecke weder Doppelintegrale noch unendliche Summen oder Produkte bedarf.» Der Integration im Komplexen bedient sich Schläfli auch in seinen übrigen funktionentheoretischen Arbeiten mit größtem Erfolg. Sie betreffen das Gebiet der Kugelfunktionen und der Besselfunktionen, und Schläflis Name reiht sich würdig an diejenigen seiner Landsleute Daniel Bernoulli und Leonhard Euler.

Angeregt durch C. Neumanns Untersuchungen (1867) gibt er im 3. Bande der Mathematischen Annalen im Anschluß an die Darstellung der Gamma-Funktion durch ein Schleifenintegral die Integraldarstellung der Besselschen Funktion  $J_n(z)$  für beliebige, auch nicht ganzzahlige  $n$ .

In seiner letzten Veröffentlichung «Über  $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$  und verwandte Integrale»

(Acta Mathematica 1885) ist der anerkannte Meister nochmals auf die Integration im Komplexen zurückgekommen, indem er diese bereits von Cauchy betrachteten Integrale neu berechnet. — Im Gegensatz zu manchen anderen Arbeiten sind diejenigen über Funktionentheorie bereits zu Lebzeiten voll anerkannt worden und haben die Entwicklung dieses Zweiges der Mathematik nachhaltig befruchtet. Seine Leistungen sind gewürdigt und dargestellt worden in dem Werke G. N. Watson, Theory of Bessel Functions (1922), auf das wir hier verweisen möchten. Eine beachtliche Anzahl von Schülern hat die Ideen von Schläfli aufgenommen und weiterentwickelt, vorab sein Nachfolger



J. H. Graf. Aus der von ihnen begründeten Berner Schule der Funktionentheorie sind hervorgegangen: L. Crelier, A. Gasser, E. Gubler, F. Iseli, W. Kœstler, H. Otti, A. Reineck, J. J. Schönholzer und C. Wagner. Auch in anderen Gebieten der Funktionentheorie war Schläfli gut bewandert, so namentlich in der Theorie der elliptischen Funktionen. Sein Interesse wurde durch eine Arbeit von A. Cayley geweckt, von der er eine freie Bearbeitung im Archiv der Mathematik und Physik 1850 erscheinen ließ. Ausgehend von der Produktdarstellung der elliptischen Funktionen leitet er die grundlegenden



Sätze ungezwungen her. Besonders möchten wir dabei auf Schläflis Kenntnisse der Eigenschaften der ebenen Gitter hinweisen, die bisher wohl nicht beachtet wurden. Über diese Arbeit berichtet Steiner in einem Brief vom 20. April 1856 an Schläfli: «Als ich dabei von Ihrem Schicksal mit Liouville sprach, war Sturm sehr gerührt und platzte mit dem Urteil heraus, daß Ihre Aufsätze über elliptische Transzendenten in Grunerts Archiv das Beste wären, was er über denselben Gegenstand gelesen habe.» Seine genaue Kenntnis der doppelt periodischen Funktionen konnte Schläfli sodann verwerten in der großen Arbeit «Über die Bewegung eines starren Körpers, der in bezug auf seinen Schwerpunkt zwei gleiche Hauptträgheitsmomente hat, wenn ein in der Axe des dritten ungleichen Hauptträgheitsmoments befindlicher Punkt befestigt und der Körper der Schwere unterworfen ist» (zum Lektionskatalog der Berner Hochschule 1867). Hiervon hat der Verfasser in den *Annali di Matematica* 1868 eine italienische Bearbeitung veröffentlicht.

Die hervorragendsten Arbeiten aber, die hier zu nennen sind, betreffen das Gebiet der elliptischen Modularfunktionen. Zwar hat Schläfli hierüber nur eine einzige Arbeit

(1870) veröffentlicht, woraus die Bezeichnung «Schläflische Modulargleichung» hervorgegangen ist. Doch zeugt der umfangreiche Nachlaß von einer außerordentlich intensiven und erfolgreichen Bearbeitung des Gebietes. Er ist von A. Häusermann in seiner Dissertation «Über die Berechnung singulärer Moduln bei Ludwig Schläfli» (Zürich 1943) durchgearbeitet und dargestellt worden. Ihr entnehmen wir: «Wichtige numerische Beziehungen ahnte Schläfli lange voraus und begründete auf diese Erkenntnis seine allgemeine Theorie der Modularfunktionen und Modulargleichungen. Zunächst entdeckte er (im Sommer 1867) zehn Jahre vor Dedekind den Diskontinuitätsbereich der Modulgruppe und führte mit dessen Hilfe eine sorgfältige Analyse der Hermiteschen Modularfunktionen nach analytischen, zahlentheoretischen und geometrischen Gesichtspunkten durch. Im Februar 1868 benützte er schon Mittel, die Weber erst zwanzig Jahre später entdeckte und als  $f$ -Funktionen oder Klasseninvarianten bezeichnete. Numerisch fand er zahlreiche, neue Ableitungen, sowohl einzelner singulärer Moduln als auch ihrer Invarianten und zugehörigen algebraischen Gleichungen. Über diese ausgedehnten und gründlichen Untersuchungen hat er nichts veröffentlicht.»

Daß Schläfli ein scharfsinniger Analytiker war, zeigt sich insbesondere in seiner Kritik an Dirichlets Behandlung der Fourierentwicklung einer willkürlichen Funktion. Er macht, wie später auch Du Bois Reymond, darauf aufmerksam, wie man die Summe der Reihe in einem Unstetigkeitspunkt bestimmen muß.

Auch mit der konformen Abbildung haben sich Schläfli und seine Schüler befaßt. H. A. Schwarz zeigte, wie man ein von Geraden begrenztes Vieleck auf die obere Halbebene konform abbildet. Hierbei entsteht das Problem, die auftretenden Integrationskonstanten numerisch zu bestimmen, was Schläfli in dieser Abhandlung durchführt.

Endlich dürfen wir nicht vergessen, daß Schläfli in einem Brief an F. Klein im Jahre 1874 als Erster auf die Einseitigkeit der projektiven Ebene hingewiesen hat.

Er wurde zuerst bei seiner Einteilung der Flächen dritter Ordnung, von der wir bereits gesprochen haben, auf diese Auffassung geführt. Klein führte sodann 1873 die Untersuchungen über die genannten Flächen weiter, und gewisse Abweichungen an der Schläflischen Auffassung fanden ihre Erklärung in der Tatsache, daß Schläfli die projektive Ebene als einseitige Fläche betrachtete. In dieser Ansicht wurde er durch seine Untersuchungen über Abelsche Funktionen bestätigt. Die Entdeckung der Einseitigkeit der projektiven Ebene ist eine schöne Bestätigung des zu Anfang erwähnten Urteils von Brioschi, daß Schläfli «größten Scharfblick in der Untersuchung der Probleme unter den verschiedensten Gesichtspunkten» besaß. Und zudem zeigt sie uns, wie vielseitig seine Begabung war. Es ist nicht möglich, ihn unter die Geometer oder unter die Funktionentheoretiker oder sonst eine Fachgruppe von Mathematikern einzureihen. Seine Begabung war mathematischer Natur im tiefsten Sinne des Wortes, und er ist hierin nur mit den Größten der Mathematik zu vergleichen.

Überblicken wir dieses fruchtbare Lebenswerk, so dürfen wir Schläflis Fachkollegen aus Zürich beistimmen, die ihm zum 70. Geburtstag schreiben: «Hat doch in dem Jahrhundert, das seit des unvergleichlichen Leonhard Eulers Tode verflossen ist, kein Schweizer so vielseitig wie Sie das mathematische Wissen seiner Zeit beherrscht, und unter den

jetzt lebenden Mathematikern aller Länder wüßten wir, was die Mannigfaltigkeit der von Ihnen durchforschten Gebiete betrifft, nur Wenige Ihnen an die Seite zu stellen.»

Umso erstaunlicher ist es, daß Schläfli noch Zeit und Kraft fand, sich zu einem vielseitigen Sprachforscher und scharfsinnigen Veda-Kenner auszubilden.

Sein handschriftlicher Nachlaß zeugt hierfür, enthält er doch unter anderem 90 Hefte Sanskrit und Kommentar zu Rigveda. Herr Professor A. Debrunner in Bern hatte die Freundlichkeit, den Nachlaß durchzusehen: Schläfli hat mit außerordentlicher Gründlichkeit die einschlägigen Werke seiner Zeit durchgearbeitet. «Über den Wert dieser Arbeiten kann ich mich nur mit Vorsicht äußern. Die Stücke, die ich durchgelesen habe, machen mir den Eindruck, daß Schläfli sehr tief in die Sprache eingedrungen ist und sich ein Urteil erlauben darf . . . Ob Schläfli Eigenes zur Erklärung dieser Texte beige-steuert hat, kann ich nicht sagen; dazu wäre ein genauer Vergleich mit den oben genannten Werken nötig. Immerhin habe ich einzelne Stücke, die ich zufällig etwas kannte, durchgesehen, und dabei ist mir nichts aufgefallen, was den Eindruck des Neuen machte. Es scheint dabei sein Bewenden zu haben, daß er auf Grund der eingehenden Durch-arbeitung vieler Texte sich sehr gute Kenntnis des Altindischen erworben hat und deshalb im Falle des Auseinandergehens der Erklärer ein eigenes, wohlbegründetes Urteil erlauben durfte. Ich wiederhole: dieses Urteil gebe ich mit starkem Vorbehalt ab. Ich möchte empfehlen, bei Gelegenheit einem Vedisten ein Stück vorzulegen zur genauen Prüfung.» Wie Schläfli bei seinen mathematischen Forschungen nie um des äußeren Erfolges willen gearbeitet hat, so dürfen wir wohl seine umfangreichen Sprachstudien als den Ausfluß seines Dranges auffassen, Neues aufzunehmen und zu verarbeiten, was ihm durch seine geniale Leichtigkeit, Sprachen zu lernen, ermöglicht wurde. Und diese Arbeit mag dazu beigetragen haben, seine wahrhaft stoische Lebensruhe auch in den widrigsten Umständen zu bewahren.

Zum Abschluß unserer Biographie dürfen wir noch einen Blick auf die zweite Lebens-hälfte des vielseitigen Forschers werfen. Langsam gestalteten sich die äußeren Lebens-bedingungen erträglich, 1868 wird er Ordinarius und 1879 wird er in seiner Besoldung einigermaßen gleich gehalten wie andere Professoren. Ein vielseitiger Briefwechsel ver-band ihn mit Schülern und Freunden. Daß die Anregung, die von seinem Schaffen aus-ging, hochgeschätzt wurde, bezeugen die Ehrungen, die ihm von vielen Seiten zuteil wurden. 1863 verlieh ihm die philosophische Fakultät Bern den Ehrendoktor: «Es ge-reicht ihr zur besonderen Genugtuung, durch diesen Akt kund zu tun, daß die Hoch-achtung, deren sich Ihre Leistungen bei dem wissenschaftlichen Publikum Europas er-freuen, Ihnen in nicht geringerem Maße auch an der Anstalt zu Teil wird, welche die Ehre hat, Sie zu den ihrigen zu zählen.»

Auswärtige gelehrte Gesellschaften wählten ihn zum korrespondierenden Mitglied: 1868 das Reale Istituto Lombardo di Science e Lettere in Mailand, 1871 die Gesell-schaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1883 die Reale Accademia dei Lincei in Rom.

Daß Schläfli 1870 den Steiner-Preis für seine geometrischen Arbeiten erhalten hat, haben wir schon erwähnt, das Institut de France überreichte ihm die Werke von Cauchy,

Norwegen diejenigen Abels, und die Berliner Akademie die Werke von Lejeune Dirichlet. Sein Freund C. W. Borchardt übersandte ihm ab 1867 das durch den Tod Poncelets frei gewordene Geschenkexemplar des Journales für die reine und angewandte Mathematik zum Dank für seine Beiträge.

Schläfli war bis an sein Lebensende von einer großen Schar anhänglicher Schüler umgeben. Wir sehen aus seinen Manuskripten, welch großes Gewicht er auf die Ausarbeitung seiner Vorlesungen gelegt hat. Dies geht auch aus einem Brief an seinen Freund Hugo Schiff hervor: « Was die rein wissenschaftliche Tätigkeit betrifft, so steht ihr die allgemeine Ermüdung des Geistes, daher die Häufigkeit logischer Irrtümer und Schwerfälligkeit des Herauswindens aus wirklichen oder vermeintlichen Widersprüchen entgegen. Ich bin über pflichtmäßige Unterrichtstätigkeit äußerst froh und bemühe mich, meine mathematische Hartknockigkeit und Routine auf andere zu übertragen. Ich trachte immer im Unterricht so frisch und unmittelbar als möglich zu sein und, wenn es mir gelingt, mich in dieser Tätigkeit aufzubrauchen, so will ich mich für glücklich halten. »

Von Schläflis funktionentheoretischer Schule haben wir bereits gesprochen. Zwölf Schüler haben bei ihm promoviert, sechs von ihnen haben später an einer Hochschule gelehrt, eine für unsere Verhältnisse einzig dastehende Anzahl. Wir geben die Liste seiner Doktoranden:

| Jahr der Prom. | Name   |
|----------------|--|
| 1866           | C. F. Geiser (1843—1934), Prof. der Mathematik an der E.T.H. Zürich von 1870—1913.   |
| 1871           | Arnold Meyer-Keyser (1844—1896), 1877—1896 o. Prof. der Mathematik an der Universität Zürich, 1870—1877 Privatdozent an der E.T.H. Zürich.     |
| 1877           | J. H. Graf von Wildberg (1852—1918), 1892 o. Prof. der Mathematik an der Universität Bern als Nachfolger Schläflis.                            |
| 1878           | Elisabeth von Litwinoff-Iwaschkina.  |
| 1878           | Jakob Hilfiker (1851—1913), ab 1893 Ingenieur der Landestopographie Bern (vorher Lehrer).  |
| 1879           | Friedrich Græfe (1855—1919), geb. in Wiesbaden, 1879 Dozent in Bern, 1881 Dozent, 1885 Prof. und 1897—1918 etatm. Prof. an der T.H. Darmstadt. |
| 1883           | G. Huber (1857—1923), 1890 Prof. der Mathematik und 1900—1921 Prof. der theor. Astr. Universität Bern.   |
| 1884           | U. Bigler (1852—1941), Prof. an der Kantonsschule St. Gallen.  |
| 1886           | Chr. Moser (1861—1935), 1904—15 Dir. des Eidg. Versicherungsamtes Bern, 1901 a. o. Prof. und 1915—31 o. Prof. an der Universität Bern.         |
| 1888           | Alfred E. Jonquière (1862—1899), 1890—93 Dozent der Mathematik in Basel, 1894/95 Statistiker des Schweiz. stat. Amtes in Bern.                 |
| 1888           | F. Bützberger (1862—1922), Prof. an der Kantonsschule Zürich.  |
| 1891           | Hans Tschumi.  |



Es ist nicht leicht, den Charakter eines großen Gelehrten in Worten festzuhalten, sein Wesen geht in seinem Werk auf, und dieses ist stets sein bestes Charakterbild. Da dieser Weg über das wissenschaftliche Lebenswerk stets nur für wenige gangbar ist, versucht die Mitwelt den Charakter eines Gelehrten in Anekdoten festzuhalten, erinnern wir etwa an die betreffenden über Leonhard Euler oder David Hilbert. So auch bei Schläfli. Etwas tiefer wie dieser Weg führt der Versuch, einen Gelehrten durch Vergleich mit seinen Zeitgenossen zu kennzeichnen. Jakob Steiner, der vorwärtsstürmende Entdecker und Erforscher neuer Gebiete der Geometrie, gehört bereits einer älteren Generation an. Von seinem Landsmann, Karl Ludwig Rütimeyer (1825—1895), dem erfolgreichen Vertreter der aufblühenden deskriptiven Naturwissenschaften, trennt Schläfli die kritische Einstellung. Wenn wir unter den engeren Fachgenossen keinen finden, mit dem sich Schläfli passend vergleichen läßt, so drängen sich gewisse Parallelen zu Jacob Burckhardt (1818—1897) auf. Ihre seelische Grundhaltung weisen gewisse gemeinsame Züge auf, insbesondere auch ihre Einstellung zur Politik. Daß beide, Schläfli und Burckhardt, von der Theologie ausgingen, ist in den schweizerischen Verhältnissen nicht zu verwundern. Beide haben ihr absagen müssen, Burckhardt wegen Glaubensdifferenzen in Sachen Offenbarung, Schläfli, weil er « nicht alles glaube ». Trotz dieser Absage an die Theologie sind weder Schläfli noch Burckhardt ins Lager der Freigeister getreten, wie das damals üblich war.

Beide opfern ihr Leben gänzlich der Wissenschaft, auf ihre eigene Person keine Rücksicht nehmend. Sie harren in ihrer Vaterstadt aus, und wenn wir dies heute nicht mehr richtig würdigen können, so doch nur deshalb, weil diese beiden der Forschung erneut die Bahn gebrochen haben. Wir denken dabei daran, daß ein Euler und ein Steiner in ihrer Heimat keine Möglichkeit hatten, zu wirken.

Jacob Burckhardts Werke sind in neuerer Zeit herausgegeben worden, eine Biographie ist im Erscheinen. So scheint uns auch für Schläfli die Zeit reif zu sein, seine Abhandlungen zu sammeln.

In diesem Sinne hat die Schweizerische mathematische Gesellschaft im Jahre 1943 dem Komitee Steiner-Schläfli der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft den Auftrag erteilt, diese Arbeit durchzuführen. Die auf drei Bände berechnete Ausgabe befindet sich zur Zeit beim Verlag Birkhäuser in Basel im Satz. Wir hoffen, damit nicht nur Schläfli ein würdiges Denkmal zu setzen, sondern glauben, daß von seinen Arbeiten erneut Anregung und Befruchtung ausgehen wird.

## LITERATUR

## A.

*Verzeichnis der Briefe von und an L. Schläfli, die veröffentlicht wurden.*

Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli, Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1896, Bern 1897. Seiten 61—264.

Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley, herausgegeben von J. H. Graf, Bern, K. J. Wyss 1905,

Briefwechsel Ludwig Schläflis mit C. W. Borchardt (1856—1877), Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1915, Bern 1916. Seiten 50—69.

*La correspondance entre L. Schläfli et des mathématiciens italiens de son époque,*  
par J. H. Graf

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche (herausgegeben von G. Loria, Turin).

Bd. 17 (1915) S. 36—40: I.: Lettres de D. Chelini à L. Schläfli.

Bd. 17 S. 81—86, 113—122: II. Correspondance entre E. Beltrami et L. Schläfli.

Bd. 18 (1916) S. 21—35, 49—64, 81—83, 113—121, Bd. 19 (1917) S. 9—14: III. Correspondance entre L. Schläfli et F. Casorati.

Bd. 19 S. 43—49, 65—73: IV. Correspondance entre Luigi Cremona et Ludwig Schläfli.

Zwei Briefe von Schläfli an P. Tardy aus dem Jahre 1865 sind veröffentlicht auf S. 519—531 der: Atti delle R. Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe sc. fis. Vol. 24 (1915): G. Loria, Commemorazione del Socio Prof. Placido Tardy.

## B.

J. H. Graf, Ludwig Schläfli. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern 1896, S. 120—203.

W. Rytz, Prof. Ludwig Schläfli als Botaniker, ebenda, 1919, S. 213—220.

O. Schlaginhaufen, Der Schädel des Mathematikers Ludwig Schläfli, ebenda, 1931, S. 35—66.

J. J. Burckhardt, Der mathematische Nachlaß von Ludwig Schläfli, mit einem Anhang: Über Schläflis nachgelassene Manuskripte zur Theorie der quadratischen Formen, ebenda, 1942, S. 1—22.

L. Kollros, Jakob Steiner. Beiheft 2 zur Zeitschrift «Elemente der Mathematik». Basel 1947.

Das Original der Reproduktion auf Seite 1 befindet sich im Dekanat der Philosophischen Fakultät II der Universität Bern. Das Klischee der Reproduktion auf Seite 18 wurde uns vom Atlantis Verlag Zürich aus seinem Werk «Große Schweizer Forscher» (1939) freundlich zur Verfügung gestellt, das Original befindet sich in der Porträtsammlung der Stadtbibliothek Bern.



Leere Seite  
Blank page  
Page vide