Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1/2 (1947)

Artikel: Spannung und Spannungstensor
Autor: Schüepp, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1190

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BEIHEFTE ZUR ZEITSCHRIFT
« ELEMENTE DER MATHEMATIK »
REDAKTION: L. LOCHER-ERNST

Beiheft Nr. 1 — Februar 1947 — Verlag Birkhäuser, Basel

Spannung und Spannungstensor

I

In seinem bekannten Werke: «Raum — Zeit — Materie» sagt H. Weyl in einem abschließenden Bericht über die Entwicklung der Relativitätstheorie[1]): «Immer klarer tritt zutage, daß die Physik eine Wissenschaft von genau dem gleichen Gepräge ist, wie es die Geometrie war, die jetzt von ihr aufgesogen wird.» Dieser enge Zusammenhang von Geometrie und Physik tritt im Unterricht wenig hervor, weil sich die elementare Geometrie in der Regel nicht eingehend mit der Untersuchung eines Axiomsystems, sondern beinahe ausschließlich mit deduktiven Entwicklungen befaßt, während in der elementaren Physik umgekehrt die Erarbeitung der Grundbegriffe die wichtigste Aufgabe darstellt, der gegenüber deduktive Entwicklungen zurücktreten. Daß aber beide Wissenschaften ihre Erkenntnisse auf gleiche Art aufbauen, wird auch auf elementarem Gebiete ersichtlich, sobald man auf die Frage eingeht, wie die Grundbegriffe eingeführt werden.

Grundbegriffe lassen sich nicht definieren. So beginnt Hilbert seine Ausführungen über ein Axiomsystem der Geometrie ohne jede Definition der Grundbegriffe Punkt, Gerade, Ebene mit den Worten[2]): «Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte . . . die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade . . . die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen . . .»

«Grundbegriffe entstammen der Anschauung»[3]). Aufbauend auf diesen Grundbegriffen wird die Geometrie nach einer Formulierung von Gonseth und Marti[4]) zu einem «Schema von gedachten Dingen, einem Gedankenschema, das den physischen Raum und die Möglichkeiten der Lage in diesem Raum zum Gegenstand hat. Die geometrischen Begriffe und Beziehungen entsprechen dabei gewissen Gegenständen und Phänomenen dieses Raumes.» Die Hauptmerkmale eines solchen Schemas sind[5]): «a) Gewisse Zeichen oder Symbole werden an Stelle von Gegenständen eingeführt. b) Gewisse Beziehungen der Symbole entsprechen eindeutig gewissen Beziehungen

[1]) Hermann Weyl. Raum — Zeit — Materie. 1918. Seite 227.
[2]) D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage, 1903. Seite 2.
[3]) Hilbert. Vgl. 2) Motto der Einleitung, Seite 1.
[4]) Gonseth und Marti. Planimetrie. Leitfaden. 2. Teil. Zürich 1936. Seite 126.
[5]) Gonseth und Marti. Vgl. 4) Seiten 121/22.

zwischen den symbolisch dargestellten Gegenständen. c) Schlüsse, die auf Grund des Schemas gezogen werden, sind nur dann zulässig, wenn jeder dabei vorkommende Schritt in die Wirklichkeit übersetzt werden kann. . . . Bemerkung: Ein Schema ist nicht notwendig endgültig. Es kann unter Umständen noch vervollständigt werden.»

Ganz ähnlich spricht sich Hertz über das Wesen physikalischer Erkenntnisse aus.[1]) «Es ist die nächste und in gewissem Sinne wichtigste Aufgabe unserer bewußten Naturerkenntnis, daß sie uns befähige, zukünftige Erfahrungen vorauszusehen, um nach dieser Voraussicht unser gegenwärtiges Handeln einrichten zu können. Als Grundlage für die Lösung jener Aufgabe der Erkenntnis benutzen wir unter allen Umständen vorangegangene Erfahrungen, gewonnen durch zufällige Beobachtungen oder durch absichtlichen Versuch. Das Verfahren aber, dessen wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen, ist dieses: Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserm Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, daß die Forderung erfüllbar ist und daß also solche Übereinstimmungen in der Tat bestehen.» Hertz führt weiter aus, daß die Bilder durch diese Forderungen nicht eindeutig bestimmt werden, daß verschiedene Bilder derselben Gegenstände möglich sind, daß ein Bild in dem Sinne zweckmäßiger sein kann als ein anderes, daß es mehr wesentliche Beziehungen der Gegenstände wiederspiegelt als das andere.

Von der wissenschaftlichen Darlegung der Bilder verlangt Hertz vor allem Klarheit. In seltenen Fällen findet ein Bild, eine Theorie, schon bei ihrer ersten Einführung diese klare Darstellung. Als Beispiel sei die klassische Arbeit von A. Einstein über die spezielle Relativitätstheorie erwähnt[2]). In der Regel aber ist die Arbeit von Jahrzehnten oder — man denke an das Axiomsystem der Geometrie — von Jahrhunderten zur Erreichung dieses Zieles erforderlich. Ist aber ein klares Bild gewonnen, dann darf man von der Lehrbuchliteratur eine klare Darstellung verlangen. Daß diese Forderung speziell auf dem Gebiete der Mechanik häufig nicht erfüllt wird, hat Prof. Meißner in einem Vortrag eindringlich dargelegt[3]). Er beschäftigte sich in demselben vor allem mit denjenigen Gebieten, in welchen die Wirkungen der Körper auf einander durch Kräfte mit Angriffspunkten dargestellt werden können. Im Gebiete der elastischen festen Körper, der Flüssigkeiten und der Gase ist dies nicht mehr möglich. Wir müssen den Begriff der Spannung einführen. Es ist ein in der Lehrbuchliteratur weit verbreiteter Fehler, daß man über diesen Punkt möglichst unvermerkt hinweggleitet, statt im Gegenteil im Sinne der Hertz'schen Forderung nachdrücklich hervorzuheben, daß ein neues Bild,

---

[1]) H. Hertz. Prinzipien der Mechanik. 1894. Einleitung. Seite 1.

[2]) Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik. 17. 1905.

[3]) E. Meißner. Zum Mechanikunterricht an der Mittelschule. 54. Jahrbuch des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer. Versammlung in Baden 1925. Aarau 1926. Seite 101.

ein neues Schema an Stelle der in Punkten angreifenden Kräfte zu treten hat. Das Postulat der stetigen Erfüllung des Raumes durch die Körper, das wir dabei einführen, zeigt übrigens sofort, daß auch das neue Bild nicht alle Erscheinungen wird umfassen können. Es wird versagen, wo bei Vorgängen die atomistische Struktur der Körper sich geltend macht, aber[1]) «man würde bei der Untersuchung der Grundgesetze der Schallwellen oder der Flüssigkeitsströmungen ungeschickt verfahren, wenn man gleich von vornherein auf Molekeln oder gar auf die unveränderlichen Atome der betreffenden Körper zurückgehen wollte, zumal auch die letzteren wiederum nur eine ideale Abstraktion darstellen. Absolut läßt sich die Natur eben überhaupt nicht in menschlichen Gedanken erschöpfen.»

II

Das neue Schema zur Beschreibung der Wirkungen von Körpern aufeinander ist das folgende:

Wir führen unter der Bezeichnung Spannung einen Vektor ein, der längs der Oberfläche eines Körpers oder Körperteiles stetig veränderlich sei. Wir nennen speziell Spannungen, die normal zu einer Fläche vom Körper weg gerichtet sind, Zugspannungen, normal gegen den Körper gerichtete Spannungen Druckspannungen und tangential zu einer Fläche gerichtete Spannungen Schubspannungen. Schief zu einer Fläche gerichtete Spannungen werden wir häufig in eine Zugspannung und eine Schubspannung, beziehungsweise in eine Druckspannung und eine Schubspannung zerlegen.

f sei ein kleines Flächenelement an einer Stelle A, σ die Spannung an dieser Stelle. Dann ordnen wir dem Flächenelement im Punkte A eine Kraft zu in der Richtung σ mit dem Betrage $K = f\,\sigma$.[2]) Wir nehmen an, daß zwischen diesen Kräften K und den Bewegungen der Körper, beziehungsweise Körperteile die gleichen Zusammenhänge bestehen wie bei Kräften mit Angriffspunkten. Wir nehmen ferner an, daß auch für die Spannungen der Satz von Aktion und Reaktion gelte.

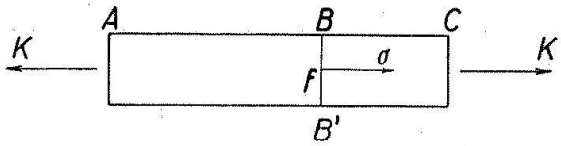
Unser Schema legt nicht fest, längs welcher Flächen und in welcher Verteilung bei den Körpern Spannungen zur Erklärung des Gleichgewichtes und der Bewegungen angenommen werden sollen. Einen greifbaren Inhalt erhält der Begriff Spannung erst durch nähere Angaben, wie das Schema bei verschiedenen Körpern und den bei ihnen möglichen Bewegungen anzuwenden sei. Nur die Erfahrung kann zeigen, ob es zur Darstellung der Erscheinungen in der Mechanik der Kontinua geeignet sei oder nicht. Eine Einführung in die Mechanik der Kontinua verlangt also die Behandlung von Beispielen, welche mit dem Begriff Spannung Zusammenhänge überblicken lassen, die in anderer Weise nicht erfaßt werden können. Auch größere Lehrbücher der Experimentalphysik begnügen sich mit der Behandlung eines extremen Spezialfalles, der Druckspannungen an den Grenzflächen der Flüssigkeiten und Gase. Viel aufschlußreicher und damit für

---

[1]) M. Planck. Einführung in die theoretische Physik. Mechanik der deformierbaren Körper. 1931. Seite 1.

[2]) Eine schärfere Formulierung würde Vertrautheit mit der Infinitesimalrechnung voraussetzen. Bei der Bildung der Kräfte zu gegebenen Spannungen handelt es sich streng genommen um die Bestimmung von Flächenintegralen.

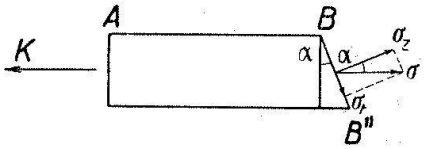
die Klärung des Begriffes Spannung wertvoller ist die Betrachtung der Spannungen im Innern von festen Körpern. Schon die Behandlung einfacher Beispiele wird den Wert der Einführung des Spannungsbegriffes, seine Eignung für die Behandlung von Problemen der Festigkeitslehre zeigen.



Figur 1

Wir untersuchen einen durch zwei Kräfte K (Figur 1) auf Zug beanspruchten Stab vom Normalschnitt f. Auf das Stück AB des Stabes wirken die Kraft K und Spannungen längs des Normalschnittes BB'. Wir werden annehmen dürfen, daß diese Spannungen für die ganze Fläche BB' gleiche Größe und Richtung besitzen. Die Spannungen für den ganzen Querschnitt müssen (wir sehen von der Berücksichtigung des Eigengewichtes ab) mit der Kraft K Gleichgewicht ergeben. Die Spannung σ muß also eine Zugspannung sein, derart daß

$$f \cdot \sigma = K, \qquad \sigma = \frac{K}{f}.$$



Figur 2

Wir legen nunmehr in Gedanken die Trennungsfläche BB'' unter dem Winkel α gegen den Normalschnitt geneigt. Es ist

$$BB'' = \frac{f}{\cos\alpha};$$

also, da wieder das Zusammenwirken von K mit den Spannungen längs BB'' Gleichgewicht ergeben muß:

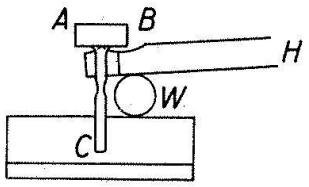
$$\sigma = \frac{K\cos\alpha}{f}.$$

Die Spannung ist in diesem Fall kleiner als im Normalschnitt und unter dem Winkel α gegen die Flächennormale geneigt. Sie nimmt ab mit wachsendem α und wird im Längsschnitt ($\alpha = 90^0$) gleich 0. Die schief zur Fläche BB'' gerichtete Spannung können wir in eine Zug- und eine Schubkomponente zerlegen:

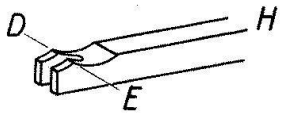
$$\sigma_z = \sigma\cos\alpha = \frac{K\cos^2\alpha}{f}, \quad \sigma_t = \sigma\sin\alpha = \frac{K\sin\alpha\cos\alpha}{f} = \frac{K\sin(2\alpha)}{2f}.$$

Die Zugkomponente nimmt mit wachsendem α beständig ab. Die Schubkomponente ist im Normalschnitt 0, erreicht für $\alpha = 45^0$ den Maximalwert $\frac{K}{2f}$ und sinkt nachher wieder auf den Wert 0 im Längsschnitt. Der Maximalwert der Schubspannung ist halb so groß wie der im Normalschnitt auftretende Maximalwert der Gesamtspannung. Die berechneten Spannungen beschreiben die Beanspruchung des Materials im Innern eines gezogenen Stabes; sie geben an, welche Wirkungen die Teile des Körpers längs beliebiger Flächen aufeinander ausüben müssen, wenn der Stab im Gleichgewicht bleiben soll.

Die Größe der Zugkraft K mag nun so weit gesteigert werden, daß der Stab zerreißt. Die Trennung erfolgt nicht längs einer Fläche mit maximaler Spannung, nicht längs eines Normalschnittes. Die Rißfläche setzt sich zusammen aus Teilflächen, welche gegen die Längsachse annähernd unter 45^0 geneigt sind, also aus Flächen mit großer Schubbeanspruchung. Sehr deutlich zeigt sich die Erscheinung bei Stäben von größerem Querschnitt, wie sie bei Zerreißproben in Materialprüfungsanstalten benutzt werden.

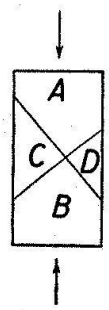


Figur 3



Figur 4

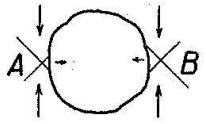
Für einen Demonstrationsversuch stelle man sich auf der Drehbank kleine Versuchskörper von der Form $A\,B\,C$ (Figur 3) her. Dieselben werden bei C zwischen den Backen eines Schraubstockes festgeklemmt. Mit dem Hebel H (Figur 3 und 4) und der auf den Schraubstock gelegten Walze W wird der Versuchskörper zerrissen. Dadurch, daß der Kopf $A\,B$ desselben längs eines Durchmessers auf der Kante $D\,E$ des Hebels aufliegt, wird ein Biegen des Stäbchens vermieden.



Figur 5

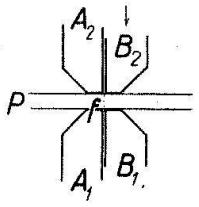
Die gleichen Erscheinungen zeigen sich auch bei auf Längsdruck beanspruchten Säulen. Die Spannungen für die in verschiedenen Richtungen durch einen Punkt gelegten Flächen — wir wollen für die Gesamtheit dieser Spannungen zur Abkürzung die Bezeichnung Spannungstensor gebrauchen — sind gleichartig denjenigen beim gezogenen Stab; nur treten an Stelle der Zugspannungen Druckspannungen. Auch hier erfolgt

der Bruch annähernd längs Flächen maximalen Schubes. Eine Demonstration ist leicht möglich mit einer hydraulischen Presse und kleinen Zementsäulchen aus einem «Anker Steinbaukasten» als Versuchskörpern. Durch den Bruch entstehen keilförmige Stücke $A\,B$ (Figur 5), durch welche Teile des Körpers bei C und D seitlich abgedrängt werden.



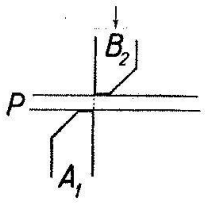
Figur 6

Diese Erscheinung spielt im Bergbau eine Rolle. Nach dem Ausbruch eines Stollens sind die Seitenwände bei A und B (Figur 6) ähnlich beansprucht wie unsere Säulen. Es kann zu «Bergschlägen» kommen, bei welchen abgesprengte Stücke seitwärts in den Stollen hineingeschleudert werden.



Figur 7

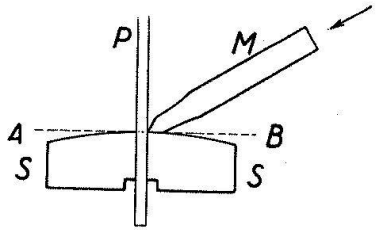
Die für die Technik wichtige Erfahrung aus den geschilderten Versuchen läßt sich mit unserem Schema in einfacher Form aussprechen: Baumaterialien sind empfindlich gegenüber Schubbeanspruchungen. Diese Erfahrung benutzt die Technik, wenn sie Material längs bestimmten Flächen trennen will; sie sorgt für große Schubspannungen längs dieser Flächen. Wir spannen beispielsweise die Platte P (Figur 7) zwischen je zwei Backen $A_1\,A_2$, beziehungsweise $B_1\,B_2$ und schieben $B_1\,B_2$ in der Pfeilrichtung an $A_1\,A_2$ vorbei. In der Fläche f der Platte entsteht starker Schub, welcher bis zur Trennung der Platte gesteigert werden kann. Wir können die Backen $A_2\,B_1$ auch weglassen



Figur 8

(Figur 8) und erhalten dann die normale Schere. Unsere Betrachtung läßt sofort erkennen, daß für die Wirksamkeit derselben wohl scharfkantige, nicht aber messerartig zu-

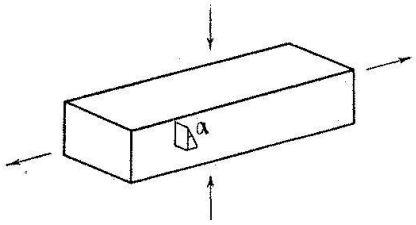
geschärfte Schneiden wesentlich sind. In gleicher Weise wirken ferner Stanzen bei Blechplatten, aber auch bei Karton oder Papier, zum Beispiel beim Entwerten von Fahrkarten. Ebenfalls nach dem gleichen Schema wird bei einer zwischen den Backen S (Figur 9)



Figur 9

eines Schraubstockes eingespannten Platte P durch Schläge gegen den Meißel M der obere Teil längs der Ebene $A\,B$ vom untern abgeschert. Analoge Vorgänge haben wir auch beim Abheben von Spänen an der Drehbank, beim Hobeln, beim Bohren mit dem Spiralbohrer. Die Stelle des Schraubstockes übernimmt bei diesen Vorgängen das Werkstück selbst.

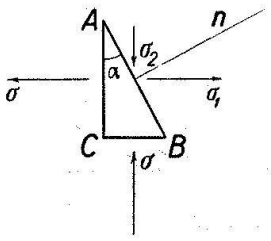
Weitere Einblicke in das Verhalten fester Körper erhalten wir, wenn wir den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Formveränderungen untersuchen. Bei einem auf Zug beanspruchten Stab nehmen die Längen mit wachsender Zugspannung zu, während die Querschnitte kleiner werden. Für manche Materialien sind anfangs Spannung und Dehnung proportional (Hooke'sches Gesetz). Bei weiter wachsender Spannung wächst aber die Dehnung rascher an, und beim Überschreiten der «Fließgrenze» nimmt die Dehnung bei wenig wachsender Spannung sehr stark zu, bis schließlich der Stab zerreißt. Bei Entlastung nach einer Beanspruchung innerhalb der Proportionalitätsgrenze nimmt der Stab wieder die ursprüngliche Form an. Liegt aber eine Beanspruchung bis über die Fließgrenze vor, so bleibt nach der Entlastung eine Verlängerung des Stabes übrig. Wird die Oberfläche eines so behandelten Stabes poliert und geätzt, so lassen die Ätzfiguren Veränderungen des Gefüges längs Flächen erkennen, die gegen die Stabachse um ungefähr 45^0 geneigt sind, die also mit Flächen großer Schubspannung



Figur 10

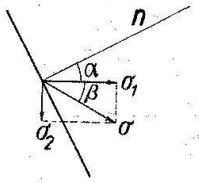
zusammenfallen. Will man also bei Verarbeitung von Werkstücken bleibende Formveränderungen erzielen, so muß man das Material bis über die Fließgrenze hinaus beanspruchen und dazu in geeigneten Flächen hohe Schubspannungen erzeugen.

Soll ein Stab oder eine Platte auf größere Länge bei kleinerem Querschnitt gebracht werden, so ist dazu reiner Zug nicht geeignet. Der Stab würde im schwächsten Quer-



Figur 11

schnitt ins Fließen geraten und zerreißen, ohne größere Formänderungen der übrigen Teile. Einen geeigneteren Spannungszustand, einen geeigneteren Spannungstensor erhalten wir, wenn wir (Figur 10) unseren Körper gleichzeitig in der Längsrichtung auf Zug und in der Querrichtung auf Druck beanspruchen. Wählen wir Zug- und Druckspannung gleich groß gleich σ, so erhalten wir mittels der Gleichgewichtsbedingungen,



Figur 12

angewandt auf ein dreiseitiges Prisma (Figuren 10, 11) für die Spannungskomponenten σ_1 und σ_2 auf eine unter dem Winkel α geneigte Fläche:

$$\text{Fläche } AB = f, \quad \text{Fläche } AC = f\cos\alpha, \quad \text{Fläche } BC = f\sin\alpha,$$

$$\sigma_1 f = \sigma f\cos\alpha, \quad \sigma_2 f = \sigma f\sin\alpha,$$

$$\sigma_1 = \sigma\cos\alpha, \qquad \sigma_2 = \sigma\sin\alpha;$$

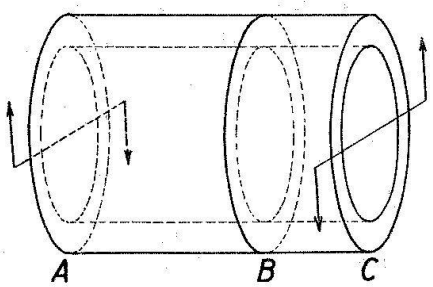
$$\text{also resultierende Spannung: } \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sigma.$$

Die Spannung hat für alle Werte von α den gleichen Betrag. Doch ändert sich von Fläche zu Fläche ihr Charakter, ihr Winkel gegen die Flächennormale n (Figuren 11, 12). Es ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \beta = \alpha.$$

Die Gesamtspannung σ und die Normale n liegen stets symmetrisch zur Längsrichtung (Zugrichtung) unseres Körpers. Für $\alpha = 0$ erhalten wir reine Zugspannung, für $\alpha = 45^0$

reine Schubspannung und für $\alpha = 90^0$ reine Druckspannung. Die maximalen Schubspannungen erreichen doppelt so große Werte wie bei reiner Zugbeanspruchung des Körpers und sind mit keinen Zug- oder Druckspannungen verknüpft.[1]) Das Fließen des Materials wird bei diesem Spannungstensor viel ausgeprägter sein als bei reinem Zug. Praktisch erzeugt man einen derartigen Spannungstensor beim Walzen. Das Verhältnis zwischen Längszug und Querdruck hängt in diesem Falle von den Eigenschaften des Materials, dem Profil des Werkstückes, den Radien und der Einstellung der Walzen ab. Der Vorgang ist in seinen Einzelheiten natürlich der Rechnung nicht zugänglich. Der betrachtete Spannungstensor läßt aber das Wesentliche des Arbeitsvorganges deutlich hervortreten. Ganz ähnlich ist die Beanspruchung des Materials beim Ziehen von Profileisen und Drähten. Der Querdruck wird hier hervorgebracht durch die seitliche Pressung mittels der sich verengenden Öffnung, durch welche das Werkstück gezogen wird. Da der Querdruck nicht nur von der Gestalt der Öffnung, sondern auch von den Eigenschaften des Materials, dem Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und der Verformung abhängt, wird die Form dieser Öffnung dem Material angepaßt sein müssen. Die vorteilhafteste Form ist infolgedessen auch für kalt und warm gezogene Stäbe nicht dieselbe.



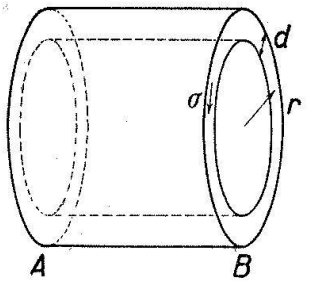
Figur 13

Ein einfacher Spannungstensor ergibt sich bei der Torsion einer Röhre, an deren Endflächen $A\,C$ (Figur 13) zwei entgegengesetzt gerichtete, gleich starke Kräftepaare wirken. Die Spannungen lassen sich in diesem Falle bestimmen, ohne daß die Verformung der Körperteile betrachtet werden muß. Das Drehmoment der Kräftepaare sei M. Mit Rücksicht auf die Symmetrie sind die Spannungen für alle Teile eines Normalschnittes B die gleichen. Die Gleichgewichtsbedingungen für das Röhrenstück $A\,B$ (Figur 14; Komponentensumme in der Achsenrichtung) zeigen sofort, daß im Normalschnitt nur Schubspannungen auftreten. Diese Schubspannungen können ferner keine Komponenten in der Richtung der Radien besitzen. Einer nach außen gerichteten Spannung am Stück

---

[1]) Haben die Zugspannung σ_z in der Längsrichtung und die Druckspannung σ_d in der Querrichtung des Stabes verschiedene Beträge, so liegen, wie man leicht nachrechnet, alle Spannungsbeträge zwischen σ_z und σ_d. Maximale Schubspannung vom Betrage $\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_d)$ weisen wiederum die Flächen $\alpha = 45^0$ auf, aber verbunden mit einer Zugspannung $\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_d)$ [beziehungsweise einer Druckspannung $\frac{1}{2}(\sigma_d - \sigma_z)$]. Flächen mit reiner Schubspannung vom Betrage $\sqrt{\sigma_z \sigma_d}$ ergeben sich für $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_d}}$.

AB müßte nämlich eine nach innen gerichtete am Stück BC entsprechen, was nicht möglich ist, da beide Stücke gleich beansprucht werden. Wir erhalten also im Normal-

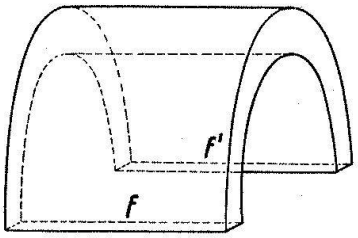


Figur 14

schnitt tangentiale Schubbeanspruchung. Die Gleichgewichtsbedingungen für das Stück AB (Drehmomente in bezug auf die Röhrenachse) ergeben für die Größe derselben:

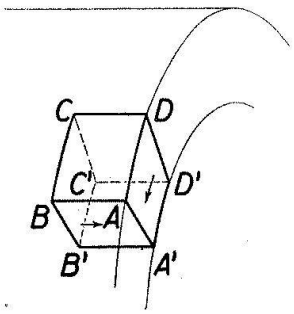
$$\sigma \cdot 2\pi r \cdot d \cdot r = M, \quad \sigma = \frac{M}{2\pi r^2 d}.$$

Entsprechende Überlegungen ergeben, daß in den Axialschnitten $f\,f'$ (Figur 15) nur Schubspannungen in der Achsenrichtung auftreten werden. Wendet man schließlich die



Figur 15

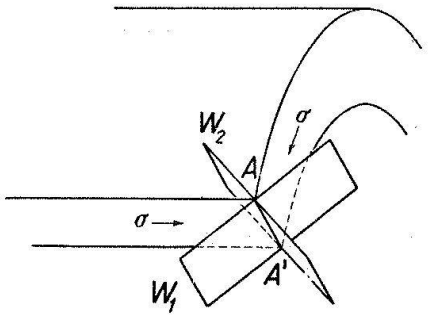
Gleichgewichtsbedingungen auf einen Quader $ABCD$ (Figur 16) an, so liefert der Satz von den Drehmomenten für die Achse CC' die Gleichheit der Schubspannungen σ im



Figur 16

Axialschnitt $ABB'A'$ und im Normalschnitt $ADD'A'$. Dreiseitige Prismen liefern wiederum die Spannungen für andere Ebenen. Für die winkelhalbierende Ebene W_1 (Figur 17)

zwischen Normal- und Axialschnitt ergibt sich reiner Zug σ, für die winkelhalbierende Ebene W_2 reiner Druck σ. Der Spannungstensor ist identisch mit dem bereits früher betrachteten.



Figur 17

Die Behandlung der Torsion von vollen, zylindrischen Stäben ist nur möglich, wenn für den Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und der Verformung bestimmte Annahmen gemacht werden. Die elementare Festigkeitslehre setzt voraus, daß σ der Entfernung von der Röhrenachse proportional sei. Diese Annahme ist mit den Versuchsergebnissen bei kleinen Torsionswinkeln in Einklang. Sie trifft aber nicht mehr zu, wenn das Material in einzelnen Teilen (den äußersten Schichten) bis zum Fließen beansprucht wird.

Treibt man die Torsion bei isotropem Material bis zum Bruch, so erfolgt derselbe angenähert längs eines Normalschnittes. Das Experiment läßt sich ohne Mühe ausführen; aufschlußreich ist es insbesondere dann, wenn man das gleiche Material verwendet wie bei dem früher beschriebenen Zerreißversuch. Es entspricht insofern unseren Erwartungen, als es sich bei der Bruchfläche wieder um eine Fläche mit maximaler Schubbeanspruchung handelt. Daß die genau gleichartig beanspruchten Flächen in axialen Längsschnitten nicht als Bruchflächen vorkommen, hängt damit zusammen, daß jeder Normalschnitt dauernd längs der gleichen Materialteile verläuft, während eine Materialfläche, die bei einem bestimmten Zustand Axialschnitt ist, bei der weiteren Verformung sich schief zur Achse stellt. Im Normalschnitt haben wir dauernd, in den Axialschnitten hat jede Materialfläche nur vorübergehend die maximale Schubspannung. Es handelt sich beim Bruch längs des Normalschnittes um eine Erscheinung vom Typus der «Ermüdungsbrüche».

Das überraschende Ergebnis, daß der Spannungstensor bei einer auf Torsion beanspruchten Röhre genau der gleiche ist wie bei einem auf Längszug und Querdruck beanspruchten Stab, zeigt die Bedeutung solcher Untersuchungen. Es ist möglich, mittels des Spannungstensors die Beanspruchung des Materials einheitlich zu beschreiben und damit eine Grundlage für Festigkeitsberechnungen bei Bauwerken und Maschinen für alle denkbaren Beanspruchungen (Zug und Druck, Torsion, Biegung, aber auch andersartige Beanspruchungen) zu schaffen.[1])

---

[1]) Vergleiche: Meißner und Ziegler. Mechanik. Band I, insbesondere Abschnitt III 19: Bruchhypothesen. Verlag Birkhäuser, Basel.

III

Wir betrachten nunmehr den allgemeinsten Fall des Spannungszustandes in einem Körper, den allgemeinsten Fall eines Spannungstensors. Wir wählen an der betrachteten Stelle einen kleinen Quader mit Kanten in den Achsenrichtungen (Figur 18). Die Figur zeigt die Bezeichnung der Komponenten der Spannungen in den Achsenrichtungen für die drei sichtbaren Flächen.

σ_{xx} = Spannungskomponente in Richtung der x-Achse für ein Flächenelement mit der x-Richtung als Normalenrichtung.

σ_{xy} = Spannungskomponente in Richtung der y-Achse für ein Flächenelement mit der x-Achse als Normalenrichtung, usw.

(Der erste Index gibt die Normalenrichtung des betrachteten Flächenelementes, der zweite die Richtung der bezeichneten Komponente.)

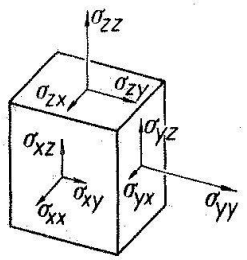
Für die gegenüberliegenden Flächen, also die entgegengesetzten Normalenrichtungen, besitzen die Spannungen nach dem Satz von Aktion und Reaktion die entgegengesetzten Richtungen. Die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen, und zwar des Satzes von den Drehmomenten für die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden durch die Quadermitte liefert für die Komponenten der Schubspannungen die Gleichungen:

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}\,, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}\,, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}\,.$$

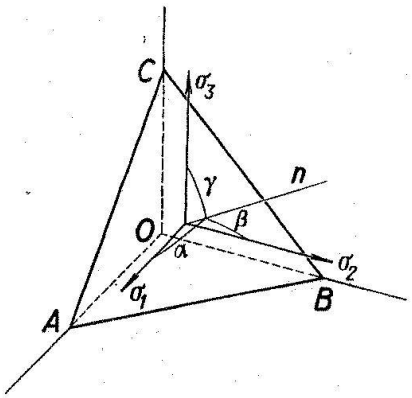
Diese drei Werte zusammen mit

$$\sigma_{xx}\,, \quad \sigma_{yy}\,, \quad \sigma_{zz}$$

nennen wir die Komponenten des Spannungstensors im betrachteten Punkt für das gewählte Koordinatensystem. Aus den 6 Zahlen lassen sich Größe und Richtung der



Figur 18



Figur 19

Spannung für irgendeine Fläche berechnen. Es sei $ABC = f$ (Figur 19) eine derartige Fläche. Ihre Normale n schließe mit den Koordinatenrichtungen die Winkel α, β, γ ein.

Dann wird

$$OBC = f\cos\alpha\,, \quad OCA = f\cos\beta\,, \quad OAB = f\cos\gamma\,.$$

Die Spannungen auf diesen Dreiecksflächen sind durch die Tensorkomponenten $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \ldots, \sigma_{zz}$ gegeben. Die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen auf das Tetraeder $OABC$ (Komponentensummen der Kräfte in den Achsenrichtungen) liefert für die Komponenten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ der Spannung im Flächenelement f:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{xx}\cos\alpha + \sigma_{xy}\cos\beta + \sigma_{xz}\cos\gamma\,, \\ \sigma_2 &= \sigma_{yx}\cos\alpha + \sigma_{yy}\cos\beta + \sigma_{yz}\cos\gamma\,, \\ \sigma_3 &= \sigma_{zx}\cos\alpha + \sigma_{zy}\cos\beta + \sigma_{zz}\cos\gamma\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Wählt man im Punkt O ein anderes Koordinatensystem, so ergeben diese Formeln auch die Spannungen für die neuen Koordinatenebenen und damit die Tensorkomponenten im neuen System. Wir erhalten auf diesem Wege die Transformationsformeln für die Tensorkomponenten. Es seien x', y', z' die Achsen des neuen, ebenfalls rechtwinkligen Koordinatensystems; α', β', γ' bzw. $\alpha'', \beta'', \gamma''$ und $\alpha''', \beta''', \gamma'''$ die Winkel, die diese neuen Achsen mit den Achsen des ursprünglichen Systems einschließen. Entsprechend wie im ursprünglichen System (Figur 18) bedeute

σ_{xx}' = Spannungskomponente in der Richtung der x' Achse für ein Flächenelement mit der Normalenrichtung x',

$\sigma_{yx}' = \sigma_{xy}'$ = Spannungskomponente in der Richtung der x' Achse für ein Flächenelement mit der Normalenrichtung y'
= Spannungskomponente in der Richtung der y' Achse für ein Flächenelement mit der Normalenrichtung x';

. . . . . .

Mit den Formeln (1) erhalten wir für dieselben:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}' = {} & \sigma_{xx}\cos^2\alpha' + \sigma_{xy}\cos\alpha'\cos\beta' + \sigma_{xz}\cos\alpha'\cos\gamma' \\ & + \sigma_{yx}\cos\beta'\cos\alpha' + \sigma_{yy}\cos^2\beta' + \sigma_{yz}\cos\beta'\cos\gamma' \\ & + \sigma_{zx}\cos\gamma'\cos\alpha' + \sigma_{zy}\cos\gamma'\cos\beta' + \sigma_{zz}\cos^2\gamma' \quad ; \\ \sigma_{xy}' = {} & \sigma_{xx}\cos\alpha''\cos\alpha' + \sigma_{xy}\cos\alpha''\cos\beta' + \sigma_{xz}\cos\alpha''\cos\gamma' \\ & + \sigma_{yx}\cos\beta''\cos\alpha' + \sigma_{yy}\cos\beta''\cos\beta' + \sigma_{yz}\cos\beta''\cos\gamma' \\ & + \sigma_{zx}\cos\gamma''\cos\alpha' + \sigma_{zy}\cos\gamma''\cos\beta' + \sigma_{zz}\cos\gamma''\cos\gamma'\,; \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\ \sigma_{zz}' = {} & \sigma_{xx}\cos^2\alpha''' + \sigma_{xy}\cos\alpha'''\cos\beta''' + \sigma_{xz}\cos\alpha'''\cos\gamma''' \\ & + \sigma_{yx}\cos\beta'''\cos\alpha''' + \sigma_{yy}\cos^2\beta''' + \sigma_{yz}\cos\beta'''\cos\gamma''' \\ & + \sigma_{zx}\cos\gamma'''\cos\alpha''' + \sigma_{zy}\cos\gamma'''\cos\beta''' + \sigma_{zz}\cos^2\gamma''' \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

Für einen Punkt O existieren stets drei zu einander senkrechte Ebenen, die keine Schubspannungen aufweisen, zu denen also reine Zug- oder Druckspannungen gehören. Man nennt dieselben die Hauptspannungen für den Punkt O. Wir beweisen die Existenz dieser Hauptspannungen, indem wir zeigen, wie sie sich berechnen lassen. Sollen zu einem Flächenelement keine Schubspannungen gehören, so muß die resultierende Spannung σ aus σ_1, σ_2, σ_3 (Gleichungen 1, Figur 19) in die Richtung der Flächennormalen n mit den Richtungswinkeln α, β, γ fallen. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß gilt:

$$\sigma_1 = \sigma \cos \alpha\,, \quad \sigma_2 = \sigma \cos \beta\,, \quad \sigma_3 = \sigma \cos \gamma\,. \tag{3}$$

Zusammen mit den Formeln (1) folgt daraus:

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_{xx} - \sigma) \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta + \sigma_{xz} \cos \gamma \\ 0 &= \sigma_{yx} \cos \alpha + (\sigma_{yy} - \sigma) \cos \beta + \sigma_{yz} \cos \gamma \\ 0 &= \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \cos \beta + (\sigma_{zz} - \sigma) \cos \gamma\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Für die Richtungscosinus besteht ferner die bekannte Beziehung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1\,. \tag{5}$$

Aus den vier Gleichungen (4) und (5) ergeben sich die vier Unbekannten σ, α, β, γ. Die Gleichungen (4) sind in $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ linear und homogen. Eine Lösung ist also nur möglich, wenn die zugehörige Determinante verschwindet, also:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma) & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma) & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & (\sigma_{zz} - \sigma) \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6}$$

Das ist für σ eine kubische Gleichung. Sie besitzt stets mindestens eine reelle Wurzel. Ist dieselbe berechnet, so ergeben sich aus (4) die Verhältnisse $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$ und mit (5) auch die Beträge der Richtungswinkel. Damit ist eine der Hauptspannungen nach Größe und Richtung bestimmt.

Die gefundene Richtung wählen wir als z-Achse eines neuen Koordinatensystems. Wir bezeichnen einfachheitshalber die neuen Achsen wieder mit $x\ y\ z$. Da die z-Richtung eine Hauptspannungsrichtung ist, sind für das zugehörige Flächenelement keine Schubspannungen vorhanden, es ist also (Figur 18)

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0\,.$$

und die Berechnungsformeln für σ_1, σ_2, σ_3 vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta\,, \\ \sigma_2 &= \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta\,, \\ \sigma_3 &= \sigma_{zz} \cos \gamma\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei weitere Hauptspannungen, wenn wir die Flächennormale n in die xy-Ebene legen. Wir wählen also als Richtungswinkel

$$\alpha, \quad \beta = 90^0 - \alpha, \quad \gamma = 90^0.$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{xx} \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha, \\ \sigma_2 &= \sigma_{yx} \cos\alpha + \sigma_{yy} \sin\alpha, \\ \sigma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Soll σ wieder in die Richtung von n fallen, so ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sigma_1 = \sigma \cos\alpha, \quad \sigma_2 = \sigma \sin\alpha.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\sigma_{xx} - \sigma) \cos\alpha + \sigma_{xy} \sin\alpha, \\ 0 &= \sigma_{yx} \cos\alpha + (\sigma_{yy} - \sigma) \sin\alpha \end{aligned}$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{yx}}{\sigma - \sigma_{yy}}. \tag{7}$$

Die quadratische Gleichung für σ liefert

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\,\sigma_{xy}^2}\right).$$

Wir erhalten also stets zwei reelle Lösungen. Die zugehörigen Werte von $\operatorname{tg}\alpha$ werden nach (7):

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{1}{2\,\sigma_{xy}}\left(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} \pm \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\,\sigma_{xy}^2}\right).$$

Es wird daher

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = -1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 90^0.$$

Die beiden damit bestimmten Hauptspannungen stehen also zueinander und auch auf der zuerst berechneten Hauptspannung normal.

Alle Hauptspannungen, auch die zuletzt bestimmten, genügen der kubischen Gleichung (6). Jede Gleichung dieser Form besitzt also stets drei reelle Lösungen. Durch die vollständige Lösung der kubischen Gleichung sind daher die Größen und durch die Gleichungen (4) und (5) auch die Richtungen aller Hauptspannungen gegeben. Die Existenz der Hauptspannungen zeigt, daß der allgemeinste Spannungstensor nicht wesentlich komplizierter aufgebaut ist als die von uns in Abschnitt II betrachteten Beispiele.

Wir führten den Spannungstensor als Gesamtheit der Spannungen in einem Punkte eines Körpers ein. Wir wollen diese vorläufige Definition durch eine genauere ersetzen

und gleichzeitig die Begriffe «Spannung» und «Spannungstensor» in einen größeren Zusammenhang einordnen.

Wir nennen eine Gruppe von drei Zahlen $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ einen «Tensor erster Stufe» oder einen «Vektor», die einzelnen Zahlen «Komponenten des Vektors». Die Vektorkomponenten haben je nach dem Anwendungsgebiet verschiedene Bedeutung. Sie sind zum Beispiel in der analytischen Geometrie die drei Raumkoordinaten eines Punktes, in der Physik die Komponenten einer Geschwindigkeit, einer Beschleunigung, einer elektrischen Feldstärke nach drei Koordinatenrichtungen.

Wir führen ferner eine Gruppe von neun Zahlen a_{ik} ein. Mit denselben ordnen wir jedem Vektor ξ_1, ξ_2, ξ_3 einen Vektor ξ_1', ξ_2', ξ_3' zu:

$$\begin{aligned} \xi_1' &= a_{11}\,\xi_1 + a_{12}\,\xi_2 + a_{13}\,\xi_3 \\ \xi_2' &= a_{21}\,\xi_1 + a_{22}\,\xi_2 + a_{23}\,\xi_3 \\ \xi_3' &= a_{31}\,\xi_1 + a_{32}\,\xi_2 + a_{33}\,\xi_3\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir nennen den Übergang vom Vektor ξ_1, ξ_2, ξ_3 zum Vektor ξ_1', ξ_2', ξ_3' eine Transformation des Vektors. Wir benutzen im folgenden ausschließlich «orthogonale Transformationen», Transformationen, bei denen die Zahlen a_{ik} die «Orthogonalitätsbedingungen» erfüllen:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1 \qquad a_{11}\,a_{21} + a_{12}\,a_{22} + a_{13}\,a_{23} = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1 \qquad a_{21}\,a_{31} + a_{22}\,a_{32} + a_{23}\,a_{33} = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \qquad a_{31}\,a_{11} + a_{32}\,a_{12} + a_{33}\,a_{13} = 1\,. \end{aligned} \tag{9}$$

In der Anwendung auf analytische Geometrie bedeutet eine orthogonale Transformation den Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem. Die a_{ik} sind die cos-Werte der Winkel, welche die neuen Achsen mit den alten Achsen einschließen.

Es sei nun η_1, η_2, η_3 ein zweiter Vektor. Die Transformationsformeln (8) mögen denselben in $\eta_1', \eta_2', \eta_3'$ überführen. Aus den Vektorkomponenten ξ_i und η_k bilden wir eine Gruppe von neun Zahlen:

$$\begin{matrix} \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\eta_3 \\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3 \\ \xi_3\eta_1 & \xi_3\eta_2 & \xi_3\eta_3\,. \end{matrix} \tag{10}$$

Ihr entspricht im transformierten System die Zahlengruppe

$$\begin{matrix} \xi_1'\eta_1' & \xi_1'\eta_2' & \xi_1'\eta_3' \\ \xi_2'\eta_1' & \xi_2'\eta_2' & \xi_2'\eta_3' \\ \xi_3'\eta_1' & \xi_3'\eta_2' & \xi_3'\eta_3'\,. \end{matrix} \tag{11}$$

Setzen wir für die ξ' und η' nach (8) ihre Werte ein, so erhalten wir Berechnungsformeln, Transformationsformeln für den Übergang von der Zahlengruppe (10) zur Zahlengruppe (11). Diese Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
\xi_1'\,\eta_1' = {} & a_{11}^2(\xi_1\eta_1) + a_{11}a_{12}(\xi_1\eta_2) + a_{11}a_{13}(\xi_1\eta_3) \\
& + a_{12}a_{11}(\xi_2\eta_1) + a_{12}^2(\xi_2\eta_2) + a_{12}a_{13}(\xi_2\eta_3) \\
& + a_{13}a_{11}(\xi_3\eta_1) + a_{13}a_{12}(\xi_3\eta_2) + a_{13}^2(\xi_3\eta_3)\ ; \\
\xi_1'\,\eta_2' = {} & a_{11}a_{21}(\xi_1\eta_1) + a_{11}a_{22}(\xi_1\eta_2) + a_{11}a_{23}(\xi_1\eta_3) \\
& + a_{12}a_{21}(\xi_2\eta_1) + a_{12}a_{22}(\xi_2\eta_2) + a_{12}a_{23}(\xi_2\eta_3) \\
& + a_{13}a_{21}(\xi_3\eta_1) + a_{13}a_{22}(\xi_3\eta_2) + a_{13}a_{23}(\xi_3\eta_3)\ ; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ; \\
\xi_3'\,\eta_3' = {} & a_{31}^2(\xi_1\eta_1) + a_{31}a_{32}(\xi_1\eta_2) + a_{31}a_{33}(\xi_1\eta_3) \\
& + a_{32}a_{31}(\xi_2\eta_1) + a_{32}^2(\xi_2\eta_2) + a_{32}a_{33}(\xi_2\eta_3) \\
& + a_{33}a_{31}(\xi_3\eta_1) + a_{33}a_{32}(\xi_3\eta_2) + a_{33}^2(\xi_3\eta_3)\ .
\end{aligned} \tag{12}$$

Wir definieren nun: Unter einem Tensor zweiter Stufe verstehen wir eine Gruppe von neun Zahlen, für welche die Transformationsformeln (12) bestehen. Tensoren zweiter Stufe können wir nach dieser Definition nach dem Schema (10) aus den Komponenten zweier beliebiger Vektoren bilden. In den Anwendungen können aber auch andere Zahlengruppen vorkommen, welche bei Einführung neuer Koordinatensysteme Umrechnungen, Transformationen entsprechend den Gleichungen (12) erfordern, Zahlgruppen also, die nach unserer Definition ebenfalls als Tensoren zweiter Stufe zu bezeichnen sind.

In den Beispielen, welche wir in Abschnitt II betrachtet haben, waren die Vektorkomponenten Komponenten von Spannungen, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Die Transformationen (8), (9) bedeuteten den Übergang zu den Spannungskomponenten, bezogen auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem. Wir führten ferner unter dem Namen «Spannungstensor», der noch zu rechtfertigen sein wird, eine Gruppe von 6 Zahlen σ_{xx}, σ_{xy}, . . ., σ_{zz} ein. Es ist nur eine Änderung der Ausdrucksweise, wenn wir an Stelle dieser sechs Zahlen eine Gruppe von neun Zahlen bilden:

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix} \tag{13}$$

mit der Bemerkung, daß zwischen denselben die Beziehungen bestehen sollen:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}\,, \qquad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}\,, \qquad \sigma_{zx} = \sigma_{xz}\,. \tag{14}$$

daß also unsere Zahlen symmetrisch sein sollen in bezug auf die Diagonale $\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}$. Beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem hatten wir diese Zahlen zu transformieren nach den Formeln (2). Berücksichtigt man, daß, wie bereits erwähnt, bei der Anwendung auf rechtwinklige Koordinatensysteme die a_{ik} cos-Werte der Winkel zwischen den neuen und alten Koordinatenachsen sind, daß also mit den in den Gleichungen (2), (8), (9) verwendeten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\alpha' & a_{12} &= \cos\beta' & a_{13} &= \cos\gamma', \\ a_{21} &= \cos\alpha'' & a_{22} &= \cos\beta'' & a_{23} &= \cos\gamma'', \\ a_{31} &= \cos\alpha''' & a_{32} &= \cos\beta''' & a_{33} &= \cos\gamma''' \end{aligned}$$

gilt, so erkennt man sofort, daß die Transformationsformeln (2) und (12) identisch sind. Diese Feststellung ermöglicht uns die Definition des Spannungstensors:

«Der Spannungstensor ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Seine Komponenten sind die Komponenten der Spannungen in einem Punkte eines Körpers, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem für drei Flächenelemente, deren Normalenrichtungen in die Richtungen der Koordinatenachsen fallen.»

Wir haben unter Verwendung einer geometrisch anschaulichen Bezeichnung für den Spannungstensor Hauptspannungen gefunden. Wählt man die Richtungen derselben als Richtungen der Koordinatenachsen, so nimmt der Spannungstensor in unserer neuen Schreibweise die einfache Form an:

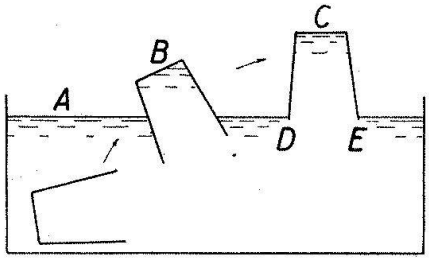
$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{matrix} \tag{15}$$

Genau die gleichen Schlüsse sind auch möglich ohne Bezugnahme auf die Bedeutung unserer Zahlengruppe als Spannungstensor. Das Ergebnis läßt sich daher allgemein in der Form aussprechen: Zu jedem symmetrischen Tensor zweiter Stufe gibt es eine orthogonale Transformation, welche den Tensor in die Form (15) transformiert.

Es mag auffallen, daß die «Definition» des Spannungstensors nicht am Anfang, sondern am Ende unserer Ausführungen steht. Das ist kein Zufall. Begriffe lassen sich nur definieren, wenn über ihren Inhalt volle Klarheit herrscht. Klare Erkenntnisse, in knappe Definitionen zusammengefaßt, sind aber nicht Ausgangspunkt, sie sind Ergebnis, Abschluß von oft langer Forschungsarbeit. Definitionen eignen sich darum in der Regel auch nicht als Ausgangspunkt für die Übermittlung wissenschaftlicher Erkenntnisse; sie sind nur verständlich, wenn man die Gedanken, welche die großen Forscher zu diesen Erkenntnissen geführt haben, nach-denkt.

IV

Verzichtet man bei den festen Körpern auf die Behandlung des Spannungstensors und beginnt man die Lehre von den Flüssigkeiten mit dem Satz über die Fortpflanzung des Druckes nach allen Richtungen, so erscheinen die Mechanik der festen Körper und die Mechanik der Flüssigkeiten als zwei Wissensgebiete von ganz verschiedenem Charakter. Die Behandlung der Spannungen schon bei den festen Körpern erlaubt es, diese Kluft zu überbrücken, das gleiche Schema für die Behandlung der Mechanik der festen Körper, der Flüssigkeiten und der Gase zu verwenden; sie macht es ferner möglich, die wichtigste, die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu stellen.

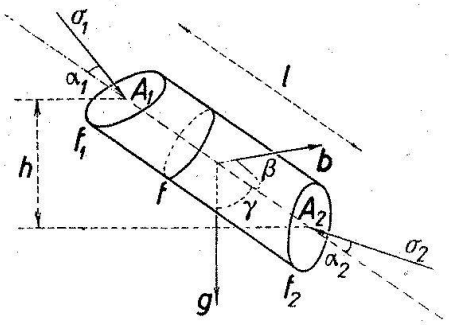


Figur 20

Wir gehen aus von einem einfachen Versuch: Wir tauchen ein Glas in ein Wassergefäß (Figur 20 *A*), richten es gefüllt mit Wasser derart auf (Figur 20 *B*, *C*), daß der Rand *DE* dicht unter der Wasseroberfläche liegt, und verschieben die Wassermasse im Glas längs der Ebene *DE* gegenüber der Wassermasse im Gefäß. Die Wassermasse des Gefäßes leistet dieser Verschiebung keinen merklichen Widerstand; es treten keine merklichen Schubspannungen längs D E auf. Eine Flüssigkeit, welche diese Eigenschaft vollkommen besitzt, nennen wir «ideale Flüssigkeit». Ruhende Flüssigkeiten verhalten sich genau wie ideale Flüssigkeiten; aber auch bewegte Flüssigkeiten lassen sich weitgehend als ideale Flüssigkeiten betrachten. Aus dem Fehlen der Schubspannungen ergeben sich alle Gesetze über Gleichgewicht und Bewegung von idealen Flüssigkeiten. Da die Gesetze für das Gleichgewicht als Spezialfall in den Bewegungsgesetzen enthalten sind, sei sofort der allgemeinste Fall einer Flüssigkeitsbewegung betrachtet. Wir setzen nur voraus, daß die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen stetige Ortsfunktionen seien.

Wenn keine Schubspannungen auftreten, stehen die Spannungen stets normal zu den zugehörigen Flächen; sie sind also in den Flüssigkeiten Druckspannungen. Wir fragen, in welchem Zusammenhang zu einer bestimmten Zeit diese Druckspannungen an einer Stelle in verschiedenen Richtungen, ferner an verschiedenen Stellen in der Flüssigkeit stehen, wenn die Flüssigkeit eine beliebige Bewegung ausführt. Wir bezeichnen (Figur 21) die Druckspannungen für zwei in der kleinen Entfernung l voneinander an den Stellen A_1 und A_2 liegende, beliebige gestellte Flächen mit σ_1 und σ_2, die Beschleunigung der Flüssigkeit mit b und die Schwerebeschleunigung mit g, die Dichte der Flüssigkeit — sie ist für ideale Flüssigkeiten eine Konstante — mit d, ihr

spezifisches Gewicht mit $s = d \cdot g$. Wir schneiden eine Zylinderfläche mit dem Normalschnitt f und der Achsenrichtung $A_1 A_2$ mit den Flächen bei A_1 und A_2. Die Größen der



Figur 21

Schnittflächen seien f_1 und f_2. Auf unsern schief abgeschnittenen Flüssigkeitszylinder wenden wir den Fundamentalsatz der Mechanik an in der Form:

Komponente der resultierenden Kraft in der Richtung $A_1 A_2$
= Masse $\times$ Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung.

Da die Druckspannungen auf die Mantelfläche des Zylinders in dieser Gleichung nicht auftreten, erhalten wir

$$f_1 \sigma_1 \cos \alpha_1 - f_2 \sigma_2 \cos \alpha_2 + l f d g \cos \gamma = l f d b \cos \beta$$

oder, da $$f_1 \cos \alpha_1 = f_2 \cos \alpha_2 = f,$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{l} = d (b \cos \beta - g \cos \gamma).$$

Wir wollen nun der Fläche bei A_1 alle möglichen Stellungen geben, während wir alle andern Teile unserer Figur unverändert lassen. Dann sind in unserer Gleichung alle neben σ_1 auftretenden Größen konstant. Also hat auch σ_1 stets denselben Wert, und es ergibt sich als Folge des Fehlens der Schubspannungen:

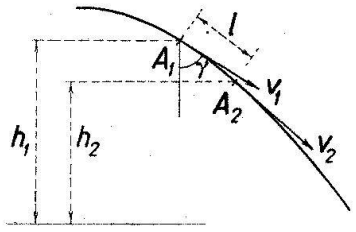
In Flüssigkeiten, und zwar auch in bewegten Flüssigkeiten, ist an einer Stelle die Druckspannung in allen Richtungen die gleiche.

Der Spannungszustand ist also in Flüssigkeiten viel einfacher als in festen Körpern; es liegt stets ein ganz entarteter Spannungstensor vor.

Die Grundgleichung für das Druckgefälle $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{l}$ liefert für ruhende Flüssigkeiten (Figur 21)

$$\sigma_2 - \sigma_1 = l \cos \gamma \cdot d g = h s.$$

Mit dieser Gleichung ist die ganze Hydrostatik gegeben. Unsere Grundgleichung macht aber auch mit elementaren Mitteln ein näheres Eingehen auf Probleme der Hydrodynamik möglich. Sie enthält als Spezialfall die Gleichung von Bernoulli. Wir legen



Figur 22

(Figur 22) bei einer stationären Flüssigkeitsbewegung $A_1\ A_2$ in die Strömungsrichtung. v_1 und v_2 seien die Geschwindigkeiten in A_1 und A_2, t die Zeit, welche ein Flüssigkeitsteilchen zum Durchlaufen der Strecke $A_1\ A_2$ benötigt, so daß wir setzen können

$$l = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \cdot t\,.$$

$b \cos \beta$, die Beschleunigungskomponente in der Richtung $A_1\ A_2$, also die Tangentialkomponente beträgt

$$b \cos \beta = \frac{v_2 - v_1}{t}\,,$$

und daher nach unserer Grundgleichung (Figur 22):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{(v_1 + v_2)}{2} \cdot t\, d \cdot \frac{(v_2 - v_1)}{t} - l\, d\, g \cos \gamma$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(v_2{}^2 - v_1{}^2)\, d - (h_1 - h_2)\, dg$$

oder

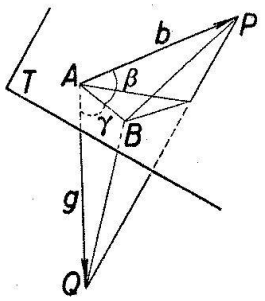
$$\sigma_1 + h_1\, d\, g + \tfrac{1}{2}\, d\, v_1{}^2 = \sigma_2 + h_2\, d\, g + \tfrac{1}{2}\, d\, v_2{}^2 = \text{konstant.}$$

Damit ist bekanntlich die Lösung gegeben für die Berechnung der Ausflußgeschwindigkeit aus Gefäßen und für die Messung von Geschwindigkeiten mit dem Staurohr. Unsere Entwicklungen gelten auch für Gase, soweit deren Dichteänderungen vernachlässigt werden können. Die Bernoulli'sche Gleichung liefert hier einen Einblick in den Zusammenhang zwischen der Luftströmung um einen Flugzeugflügel und den am Flügel wirkenden Kräften.[1])

---

[1]) Eine vollständige Erklärung verlangt bei diesen Vorgängen noch die Berücksichtigung von Schubspannungen, die nicht vernachlässigt werden können.

Nach unserer Grundformel ist das Druckgefälle an einer Stelle A (Figur 23) in denjenigen Richtungen AB gleich O, für welche $g \cos \gamma = b \cos \beta$, also für alle Richtungen in der Ebene T. T, die Normalebene zu PQ durch A, ist also die Tangentialebene für

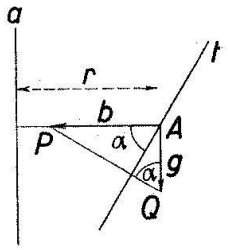


Figur 23

die Fläche gleichen Druckes durch den Punkt A. Führt eine Flüssigkeitsmasse eine Translation aus, beispielsweise die Flüssigkeit in einem gefüllten Kesselwagen bei der Fahrt eines Zuges auf gerader Strecke, so sind die Flächen gleichen Druckes Ebenen, die beim Anfahren des Zuges entgegen der Fahrtrichtung, beim Abbremsen in der Fahrtrichtung ansteigen. Für den Neigungswinkel α dieser Ebenen gegenüber der Horizontalebene gilt dabei, wie leicht ersichtlich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{g} .$$

Rotiert eine Flüssigkeitsmasse derart, daß die Winkelgeschwindigkeit aller Punkte den gleichen Wert ω besitzt, rotiert mit andern Worten die Flüssigkeit wie ein starrer



Figur 24

Körper um die Achse a (Figur 24), so werden die Flächen gleichen Druckes Rotationsflächen sein. Für die Meridiantangente t in A wird, wegen

$$b = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r ,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{g} = \frac{r \omega^2}{g} = r \cdot \text{konst.}$$

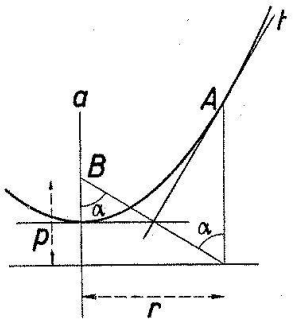
Diese Eigenschaft ist charakteristisch für Parabeln mit der Achse a. Aus der bekannten Tangentenkonstruktion dieser Kurven (Figur 25) folgt nämlich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{p} = r \cdot \text{konst.}$$

Die Vergleichung der beiden Konstanten liefert

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{p}, \quad p = \frac{g}{\omega^2} .$$

p wird also um so kleiner, je rascher die Flüssigkeit rotiert. Eine Fläche gleichen Druckes ist die freie Flüssigkeitsoberfläche (Druckspannung = Luftdruck). Diese wird also, was der Versuch bestätigt, ein Rotationsparaboloid sein. Aus der Form desselben, den Werten



Figur 25

von p, ergeben sich Winkelgeschwindigkeit und Drehzahl der Flüssigkeit. Auch im menschlichen Körper, z. B. im Gehirn, treten bei Bewegungen mit großer Beschleunigung starke Veränderungen des Druckes auf. Diese machen es verständlich, daß beim raschen Durchfliegen von engen Kurven Bewußtseinsstörungen auftreten können.

Unsere Grundformel für das Druckgefälle schafft auch volle Einsicht in die Vorgänge, welche sich in einer Peltonturbine abspielen. Zunächst ein Paradoxon: Das Wasser verläßt die Düse einer Peltonturbine mit großer Geschwindigkeit. Die Druckspannung an der Oberfläche des Wasserstrahles ist gleich dem Luftdruck. Unsere Formel zeigt, daß das Druckgefälle quer zum Strahl (wegen $\beta = \gamma$ und $b = g$) gleich 0 ist, daß also im ganzen Strahl nur eine Druckspannung gleich dem Luftdruck herrscht. Es ist eine nette Denkaufgabe, die Erklärung dafür zu suchen, warum wir trotzdem die Hand nicht in den Strahl halten dürfen.

Der Wasserstrahl trifft hierauf die löffelförmigen Schaufeln des Peltonrades, breitet sich auf ihnen aus und wird in scharfem Bogen abgelenkt. Auf der Luftseite der Wasserschicht ist der Druck dabei stets gleich dem Luftdruck. Unsere Formel zeigt, warum

der Wasserdruck an der Schaufelfläche trotzdem große Werte erreichen wird. Die Beschleunigungskomponente $\frac{v^2}{r}$ gegen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn ist für unsere Wasserteilchen sehr groß. Legen wir $A_1 A_2$ (Figur 21) in die Richtung gegen den Krümmungsmittelpunkt, so erhalten wir also ein sehr großes Druckgefälle; der Wasserdruck nimmt von der Luftseite der Wasserschicht gegen die Schaufel hin sehr rasch zu. Ganz analog lassen sich auch bei allen andern Formen der Wasserturbinen aus den Bahnkurven des Wassers und den damit gegebenen Geschwindigkeiten die Druckverhältnisse und damit die Wirkungsweise der Maschinen ablesen.

Das Bild der idealen Flüssigkeit ist für die Mechanik wertvoll, weil es auf einen sehr einfachen Spannungstensor führt, und weil damit die Lösung vieler Probleme möglich wird. Untersucht man aber Flüssigkeitsströmungen in engen Röhren, in Kapillaren, so genügt das Bild nicht mehr. Man redet bei diesen Erscheinungen von innerer Reibung. Unser Schema erweist sich auch für die Behandlung dieser Probleme als geeignet; man muß aber auch bei Flüssigkeiten mit Schubspannungen rechnen. Dieselben sind von anderem Typus als bei festen Körpern. Bei den letzteren ist der Spannungstensor abhängig von der Formänderung der Körperelemente; bei den Flüssigkeiten sind für den Spannungstensor die Geschwindigkeitsunterschiede in der Umgebung der betrachteten Stelle maßgebend. Für die Anwendung des Bildes, das sich mit den Begriffen Spannung und Spannungstensor aufbauen läßt, bestehen wie für jedes Bild Grenzen; es bietet aber einen Überblick über eine derartige Fülle von insbesondere für die Technik wichtigen Vorgängen, daß es seine Bedeutung stets behalten wird.

H. SCHÜEPP, Zürich

48, Sch, 284