

Zeitschrift:	Eclogae Geologicae Helvetiae
Herausgeber:	Schweizerische Geologische Gesellschaft
Band:	39 (1946)
Heft:	2
Artikel:	Graphische Bestimmung der Wirkung gegenüber dreidimensionaler Massen auf die Schwerkreintensität
Autor:	Gassmann, Fritz / Prosen, Dragutin
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-160785

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Graphische Bestimmung der Wirkung gegebener dreidimensionaler Massen auf die Schwereintensität.

Von **Fritz Gassmann** (Zürich) und **Dragutin Prosen** (Belgrad).

Mit 8 Textfiguren und 3 Tafeln (XV, XVI, XVII).

1. Summary.

A graphico-numerical method is given for determining the effect of given three-dimensional masses of any shape on the gravitational intensity. The surface of the given mass, which is presumed to be homogeneous with an excess of density of ϱ in relation to its surroundings, is represented on the reduced scale of 1 : V by contour-lines at the altitudes H_1, H_2, \dots, H_K above sea-level (Fig. 6). The body is now replaced by cylinders, the guiding lines of which are these contour-lines (Fig. 7). The altitudes Z_1, Z_2, \dots, Z_{K-1} above sea-level of the areas of these cylinders are determined in accordance with the equations (7). Z_0 is the level of the highest, Z_K that of the lowest point of the surface of the body. Let b be the difference between the radii of two adjacent circles in Fig. 2, and p_i the difference between the level Z_s of the station S , for which the gravity anomaly is to be determined, and the level Z_i , measured in Fig. 7, (scale 1 : V) with the distance b as a unit distance. The horizontal projection of the substitute body, seen from above and below (Fig. 8) is plotted on the counting diagram (Fig. 2), (Fig. 9). Let a_{in} be the number of the "compartments" in the n^{th} ring of the counting diagram included in the area F_i and b_{in} the number of the "compartments" of the n^{th} ring included in the area G_i . The number $t_n(p_i)$ is obtained from Fig. 3 and Fig. 4. The gravity anomaly s which the substitute body in Fig. 7 provokes at the point S should then be determined by summation in accordance with equation (9). In 7. the gravity anomaly of the body which is represented in Figs. 6—9 is calculated on the assumption that these figures are drawn at the reduced scale of 1 : V = 1 : 50'000 and that the difference of density between the body and its surroundings amounts to $\varrho = 0.4 \text{ gr/cm}^3$.

2. Vorbemerkung.

Wer sich über die graphische Bestimmung der Wirkung von Massen auf die Schwereintensität ohne nähere Begründung orientieren will, findet in 7. eine anhand eines Zahlenbeispiels gegebene zusammenfassende Darstellung des Verfahrens.

3. Einleitung.

Die Bestimmung einer unterirdischen Masse, die eine gegebene, an der Erdoberfläche vermessene Schwerestörung verursacht, ist eine in der angewandten Geophysik häufig vorkommende Aufgabe. Sie ist aber bekanntlich nicht eindeutig lösbar. Röhrt z. B. eine Schwerestörung von einer homogenen Kugel her,

so kann man wohl die Lage ihres Mittelpunktes und ihre Gesamtmasse bestimmen, nicht aber den Radius und die Dichte. Ganz allgemein gibt es stets unendlich viele Massenverteilungen im Untergrund, die eine gegebene Schwerestörung hervorrufen können. Es sind geologische Überlegungen, die die unendlich vielen Möglichkeiten so einzuschränken gestatten, dass schliesslich für die gegebene Schwerestörung mit mehr oder weniger grosser Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Massenverteilung als Ursache erkannt wird. Bei der Aufsuchung einer solchen Massenverteilung ist man auf ein Verfahren angewiesen, das gestattet, rasch die Schwerestörung einer gegebenen Massenverteilung für verschiedene Punkte der Erdoberfläche zu bestimmen, denn man muss kontrollieren können, ob die angenommene Massenverteilung wirklich die gemessene Schwerestörung ergibt. Der Natur der Sache nach sind an das Verfahren keine allzugrossen Genauigkeitsansprüche zu stellen, aber es muss so beweglich sein, dass es jedem praktisch vorkommenden Fall angepasst werden kann und die Schwerestörung nicht nur für einen Punkt der Erdoberfläche, sondern für beliebig verteilte Stationen mit verschiedenen Meereshöhen liefert.

Das nachstehend beschriebene Verfahren gestattet die Bestimmung der Schwerestörung von beliebigen, sog. „dreidimensionalen“ Massenanordnungen, also von Anordnungen, bei denen die vereinfachende Annahme von unendlich langen, horizontal liegenden Zylindern (sog. „zweidimensionale“ Massenanordnungen) nicht zulässig ist.

4. Der Hohlzylindersektor.

Zunächst sei ein Körper betrachtet, dessen Form sich besonders gut zur Berechnung der Schwerestörung eignet. Es ist ein vertikal stehender homogener Zylinder, dessen Grunfläche $A_1 B_1 B_2 A_2$ in der gleichen Horizontalebene liegt wie die Station S und die Form eines Kreisringsektors besitzt (man vgl. dazu Fig. 1). Zu allen folgenden Berechnungen sei, wo nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt ist, das absolute CGS-System verwendet (Grundeinheiten 1 cm, 1 gr = 1 Massengramm, 1 sec.).

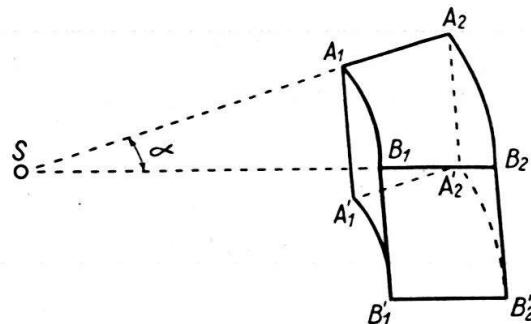


Fig. 1. *Hohlzylindersektor und Station S.*

Da die Schwere in S nach unten zeigt, ist die Schwerestörung s offenbar positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem sie nach unten oder nach oben zeigt. Um in der Formel (2) für s das Vorzeichen zu berücksichtigen, ist es praktisch, auch H mit einem Vorzeichen zu versehen. H soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Zylinder von der durch S gehenden Horizontalebene aus nach unten (wie in Fig. 1) oder nach oben geht. Es soll ferner die Funktion $\operatorname{sgn} r$ eingeführt werden, wo r irgendeine reelle Zahl ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} r &= 1 \text{ für } r > 0, \\ \text{,, } r &= 0 \text{,, } r = 0, \\ \text{,, } r &= -1 \text{ für } r < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Die vom Zylinder von Fig. 1 herrührende Schwerestörung in S ist dann¹⁾

$$s = \operatorname{sgn} H \cdot k_0 \varrho \cdot \operatorname{arc} \alpha (R_2 - R_1 + \sqrt{R_1^2 + H^2} - \sqrt{R_2^2 + H^2}). \quad (2)$$

Die Formel (2) ist für die unmittelbare Berechnung von Schwerestörungen unhandlich, sie bildet lediglich die Grundlage für die folgenden Ausführungen. Der Grundfläche $A_1 A_2 B_2 B_1$ des Hohlzylindersektors soll nun eine spezielle Form gegeben werden. Sie soll nämlich, wenn man sie im verkleinerten Maßstab 1 : V aufzeichnet, mit irgendeinem Feld des Auszähldiagramms, Tafel XV, übereinstimmen. Der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise dieses Auszähldiagramms entspricht dann offenbar der Station S . Die Kreise teilen das ganze Auszähldiagramm in Kreisringe, die von innen nach aussen fortlaufend numeriert sind. Alle Kreisringe haben die gleiche Breite b (= Differenz der Radien benachbarter Kreise). Jeder Kreisring ist durch Radien in Sektoren geteilt, und zwar sei die Anzahl der Sektoren des n . Kreisringes mit e_n bezeichnet. Auf Tafel XVI sind die Werte von e_n für die verschiedenen Kreisringe angegeben. Ist nun das verkleinerte Abbild der Grundfläche $A_1 A_2 B_2 B_1$ ein Feld des n . Kreisringes und ferner p das Verhältnis der Höhe des Zylinders von Fig. 1 zu seiner Breite $A_1 A_2$, so sind in Formel (2) offenbar folgende Größen einzusetzen:

$$H = p \cdot \overline{A_1 A_2} = p \cdot b V,$$

$\operatorname{sgn} H = \operatorname{sgn} p$, weil b und V positive Größen sind.

$$\operatorname{arc} \alpha = \frac{2\pi}{e_n}, \quad R_2 = V n b, \quad R_1 = V(n-1) b.$$

Man erhält dann

$$s = \operatorname{sgn} p \cdot \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \cdot t_n(p), \quad (3)$$

wo $p = \frac{H}{bV}$ ist und $t_n(p)$ die in Tafel XVI angegebene Bedeutung hat. Wird das Auszähldiagramm, Tafel XV, in seiner Originalgröße verwendet, so ist $b = 0,5$ cm, also $\frac{b}{0,5} = 1$. Die Berechnung der Schwerestörung nach Formel (3) ist daher denkbar einfach, da der Wert von $t_n(p)$ aus Tafel XVI resp. XVII entnommen werden kann. Bei der Berechnung von p ist nicht zu vergessen, dass H in cm einzusetzen ist. Wie die Formel für $t_n(p)$ zeigt, kommt es bei dieser Größe nicht auf das Vorzeichen von p an, d. h. $t_n(-p) = t_n(+p)$.

¹⁾ Siehe z. B. F. R. HELMERT, Die math. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, 1884, Seite 170.

5. Der vertikale Zylinder.

Als störender Körper sei nunmehr ein homogener Zylinder mit vertikalen Mantellinien genommen. Die Grundfläche F sei horizontal und habe eine beliebige Form, die Deckfläche sei auch horizontal und demnach kongruent zur Grundfläche. Z_0 sei die Meereshöhe der Deckfläche, Z_1 die Meereshöhe der Grundfläche. Die Meereshöhen sind in cm auszudrücken und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die betreffende Fläche über oder unter dem Meeresspiegel liegt. Da die Deckfläche über der Grundfläche liegt, ist stets $Z_0 > Z_1$. Die Dichtedifferenz des Zylinders gegen die Umgebung sei ϱ mit der gleichen Vorzeichenfestsetzung wie in 4. Die Station S , für die die Schwerestörung zu berechnen ist, liege in der Meereshöhe Z_S . Es soll zunächst $Z_S > Z_0$ angenommen werden, doch kann

diese Einschränkung später wieder fallen gelassen werden. Um die Schwerestörung des Zylinders zu ermitteln, wird er aufgefasst als Differenz zweier Zylinder, nämlich eines Zylinders mit Grundfläche F auf der Höhe Z_1 und Deckfläche auf der Höhe Z_S und eines Zylinders mit der gleichen Grundfläche auf der Höhe Z_0 und Deckfläche auf der Höhe Z_S (siehe Fig. 2, Aufriss). Diese beiden ineinandergeschachtelten Zylinder können mit Hilfe des Auszähl-diagramms, Tafel XV, weiter unterteilt werden. Der Grundriss des Zylinders, d. h. die Grundfläche F , sowie der Grundriss S' der Station werden im Maßstab 1 : V verkleinert auf Pauspapier aufgezeichnet (siehe Fig. 2, Grundriss) und so auf das Auszähl-diagramm gelegt, dass der Punkt S' in das Zentrum des Diagramms fällt. Das Diagrammnetz zerlegt dann die Grundfläche F in einzelne Felder. Jedes Feld kann aufgefasst werden als Grundfläche zweier Zylinder, von denen der eine vom Niveau Z_S zum Niveau Z_1 , der andere vom Niveau Z_S

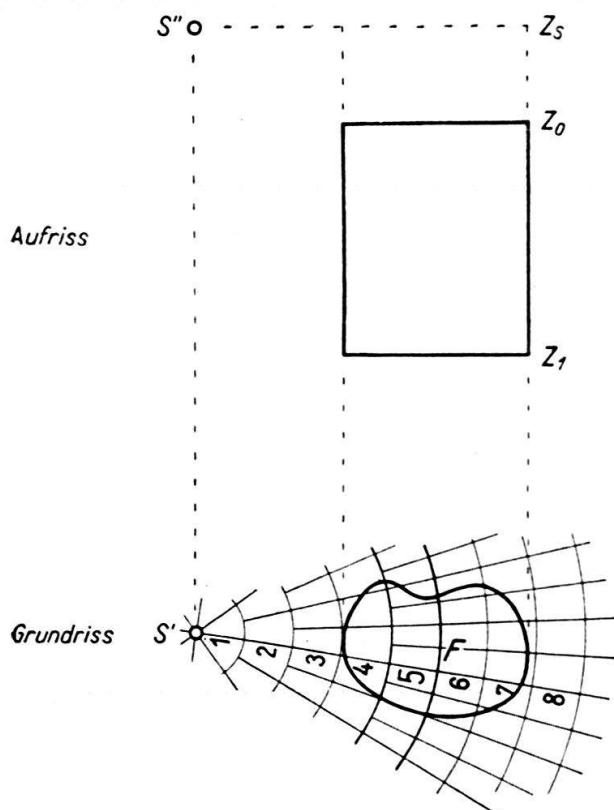


Fig. 2. Beliebiger Vertikalzylinder.

zum Niveau Z_0 reicht. Diese beiden Zylinder haben gerade die Form, die in 4. behandelt wurde und für welche die Gleichung (3) die Schwerestörung in S ergibt. Man hat jetzt nur die Schwerestörungen aller Zylinder, die zum Niveau Z_1 reichen, zu addieren und davon die Schwerestörungen der Zylinder, die zum Niveau Z_0 reichen, zu subtrahieren. Man hat zu diesem Zwecke einfach die Anzahl der Felder jedes Ringes des Auszähldiagrammes zu ermitteln, die in F liegen. Für den n . Ring sei diese Anzahl a_n . Bei angebrochenen Feldern werden die Zehntel geschätzt. In Fig. 2 geben die Ringe $n = 4, 5, 6$ und 7 Beiträge, und zwar ist $a_4 = 2,5$; $a_5 = 5,6$; $a_6 = 5,0$; $a_7 = 2,7$. Wendet man Gleichung (3) auf die beiden Zylinder an, die zu einem bestimmten Feld des n . Ringes gehören, so hat man für den Zylinder zwischen den Niveaux Z_S und Z_1 zu setzen:

$$p = p_1 = \frac{Z_S - Z_1}{bV}, \quad \text{sgn } p = 1.$$

für den Zylinder zwischen den Niveaux Z_s und Z_0 :

$$p = p_0 = \frac{Z_s - Z_0}{b V}, \quad \text{sgn } p = 1.$$

p_0 und p_1 haben eine einfache geometrische Bedeutung. p_0 ist nämlich nichts anderes als die Niveaudifferenz zwischen der Station S und der oberen Fläche des Zylinders, gemessen in dem im Maßstab $1:V$ gezeichneten Aufriss von Fig. 2, wobei man als Maßstab einen Radius von Tafel XV verwendet, d. h. einen Maßstab, dessen Einheits-Strecke die Länge b hat. p_1 ist die in gleicher Weise gemessene Niveaudifferenz zwischen der Station S und der unteren Fläche des Zylinders.

Die nach (3) berechneten Einflüsse der beiden Zylinder sind zu subtrahieren, also

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho [t_n(p_1) - t_n(p_0)]. \quad (4)$$

Auf der Grundfläche F liegen a_n Felder des n . Ringes. Ihre Schwerestörung ist daher das a_n -fache des Ausdrückes (4). Die gesamte Schwerestörung s ist schliesslich die Summe der Einflüsse, die von den Zylindern der verschiedenen Ringe herrühren, also ist

$$s = \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_n [t_n(p_1) - t_n(p_0)] \quad (5)$$

die Schwerestörung, die herrührt vom ursprünglich gegebenen vertikalen Zylinder mit der Grundfläche F im Niveau Z_1 und der Deckfläche im Niveau Z_0 . Die Summe \sum_n ist zu erstrecken über alle Nummern n von Ringen des Auszähldiagrammes, die zur Fläche F einen Beitrag liefern. Man kann sich nachträglich leicht überzeugen, dass die Formel (5) die Schwerestörung in jedem Falle mit dem richtigen Vorzeichen wiedergibt, wenn man für die Lage der Station S die am Anfang erwähnte Beschränkung fallen lässt, also Z_s ein beliebiges Niveau ist.

6. Körper beliebiger Form.

Der Körper sei in Fig. 3 im verkleinerten Maßstabe $1:V$ in Grund- und Aufriss aufgezeichnet. Seine Körperoberfläche kann mit jeder gewünschten Genauigkeit dargestellt werden durch Höhenlinien, die im Aufriss als horizontale Strecken und im Grundriss in wahrer Gestalt erscheinen. Die von oben unsichtbaren Teile der Höhenlinien sind im Grundriss gestrichelt eingezeichnet. Es ist nicht nötig, und auch praktisch nicht immer vorteilhaft, sich auf äquidistante Höhenlinien festzulegen. Man erspart sich überflüssige Arbeit, wenn man den

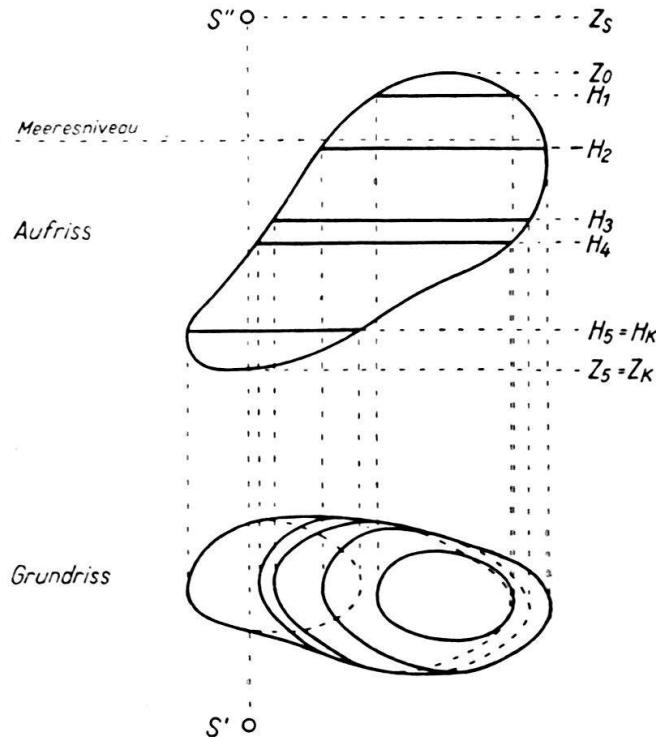


Fig. 3. Dreidimensionale Masse mit Höhenlinien.

Abstand benachbarter Höhenlinien nach der zu erstrebenden Genauigkeit und nach der Form der Körperoberfläche richtet. Die Lage der Höhenlinien lässt sich durch die zugehörigen Meereshöhen festlegen. Diese Meereshöhen seien, in der Reihenfolge von oben nach unten numeriert, H_1, H_2, \dots, H_K . Z_0 sei die Meereshöhe des obersten, Z_K die des untersten Punktes des Körpers.

Die Berechnung der Schwerestörung, verursacht durch den gegebenen Körper im Stationspunkt S (Meereshöhe Z_S), wird nur angenähert durchgeführt. Die Annäherung besteht darin, dass der Berechnung nicht der gegebene Körper, sondern ein Ersatzkörper zugrunde gelegt wird. Dieser Ersatzkörper wird folgendermassen konstruiert. Zwischen die Horizontalebenen in den Niveaux H_1 bis H_K werden $K-1$ weitere Horizontalebenen in den Niveaux Z_1, Z_2, \dots, Z_{K-1}

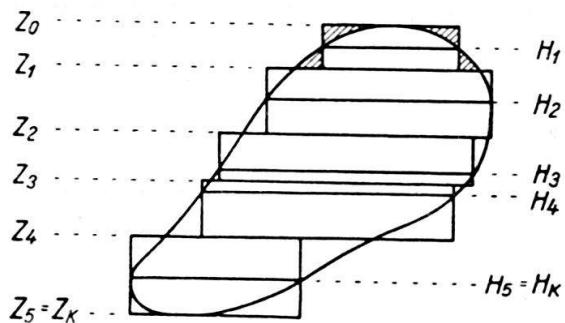


Fig. 4. Dreidimensionale Masse und Ersatzkörper.

eingeschaltet (siehe Fig. 4). Zwischen den verschiedenen Niveaux bestehen offenbar folgende Ungleichungen:

$$Z_0 > H_1 > Z_1 > H_2 > Z_2 > \dots > Z_{K-1} > H_K > Z_K.$$

Die Schicht des Körpers zwischen den Horizontalebenen mit den Niveaux Z_{i-1} und Z_i wird ersetzt durch einen Zylinder, dessen Mantel gebildet wird aus den Vertikalen, die in sämtlichen Punkten der Höhenlinie H_i errichtet werden. Die Grundfläche des Zylinders liegt im Niveau Z_i , die Deckfläche im Niveau Z_{i-1} . In den Grundrissen der Figuren 3 und 4 fallen Grund- und Deckfläche des i . Zylinders zusammen und die Fläche erscheint in wahrer Gestalt, da sie einfach die von der ursprünglich gegebenen Höhenlinie im Niveau H_i begrenzte Fläche ist. Der Ersatzkörper besteht aus K Zylindern. Man hat es offenbar durch geeignete Wahl der Anzahl K der Zylinder in der Hand, den gegebenen Körper beliebig genau durch einen Ersatzkörper der beschriebenen Gestalt zu approximieren.

Der Fehler, den man dadurch begeht, dass man der Berechnung der Schwerestörung in einem Stationspunkt S nicht den ursprünglich gegebenen Körper, sondern den Ersatzkörper zugrunde legt, hängt nicht nur von der Wahl der Höhenlinien ab, sondern auch noch von der Lage von S . Der Fehler kann besonders gross werden, wenn S in der Nähe der Oberfläche des Körpers liegt. Praktisch wichtig ist der Fall von Stationen, die in der Nähe des obersten Punktes des Körpers liegen. Es ist in Rücksicht auf diesen Fall vorteilhaft, wenn das Niveau Z_1 so gewählt wird, dass die Höhenlinie H_1 in der Mitte zwischen Grundfläche und Deckfläche des obersten Zylinders des Ersatzkörpers liegt. Wie durch die schraffierten Flächen in Fig. 4 angedeutet ist und wie eine eingehendere Analyse der praktisch wichtigen Fälle ergeben hat, kompensieren sich in diesem Falle der positive und der negative Fehler beim Übergang vom ursprünglich gegebenen

Körper zum Ersatzkörper am besten. Damit dem Niveau Z_1 die gewünschte Lage gegeben werden kann, müssen die Höhenlinien des Körpers so gegeben sein, dass H_1 näher an Z_0 als an H_2 liegt, also die Bedingung

$$Z_0 - H_1 < H_1 - H_2 \quad (6)$$

erfüllt ist. Die übrigen Niveaux Z_2, Z_3, \dots, Z_{K-1} werden am einfachsten in die Mitte zwischen die Niveaux der benachbarten Höhenlinien gelegt. Aus den Niveaux der Höhenlinien sind daher die Niveaux Z_i nach folgenden Formeln zu berechnen:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2H_1 - Z_0 \\ Z_i &= \frac{1}{2}(H_{i+1} + H_i) \quad i = 2, 3, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Es sei nun das Niveau Z_i betrachtet. In diesem Niveau berühren sich zwei Zylinder des Ersatzkörpers, wobei sich die Grundfläche des oberen Zylinders und die Deckfläche des unteren im allgemeinen teilweise überdecken. Das nicht überdeckte Stück der Grundfläche des oberen Zylinders sei mit F_i , das nicht überdeckte Stück der Deckfläche des unteren mit G_i bezeichnet. Setzt man nun zunächst voraus, dass die Station S mindestens so hoch liegt wie der höchste Punkt des Körpers, so dass die Bedingung $Z_S \geq Z_0$ erfüllt ist, so lässt sich der Ersatzkörper durch Addition und Subtraktion zusammensetzen aus Zylindern mit vertikalen Mantellinien, deren Deckflächen ausnahmslos im Niveau Z_S liegen. Wir brauchen nur die Zylinder zusammenzufügen, die die Grundflächen F_1, F_2, \dots, F_K besitzen, und davon die Zylinder mit den Grundflächen G_0, G_1, \dots, G_{K-1} zu subtrahieren (siehe Fig. 5).

Ganz entsprechend kann man nun die Schwerestörung des Ersatzkörpers bestimmen. Spezialisieren wir zunächst Fig. 2 auf den Fall $Z_0 = Z_S$, so liefert Gleichung (5) die Schwerestörung eines Zylinders mit vertikalen Mantellinien, der bis zum Niveau Z_S reicht, nämlich

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_n t_n(p_1).$$

Bei der Anwendung auf den Zylinder mit der Grundfläche F_i haben wir p_1 zu ersetzen durch

$$p_i = \frac{Z_S - Z_i}{b V}, \quad i = 0, 1, \dots, K. \quad (8)$$

Zu a_n fügen wir ferner einen zweiten Index i . a_{ni} ist also entsprechend wie a_n in 5. die Anzahl der Felder des n . Ringes des Auszähldiagrammes, die im Grundriss in F_i liegen, wenn dieser Grundriss eine zeichnerische Darstellung des Ersatzkörpers im Maßstab 1 : V ist (Fig. 6). Entsprechend sei b_{ni} die Anzahl der Felder des n . Ringes des Auszähldiagrammes, die in G_i liegen. Der Zylinder mit der Grundfläche F_i ergibt dann die Schwerestörung

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_{ni} t_n(p_i),$$

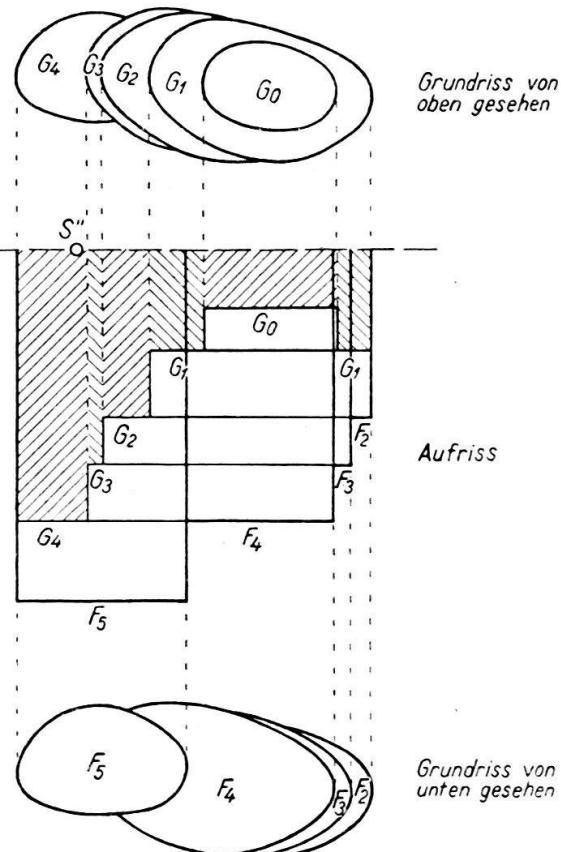


Fig. 5. Zusammensetzung des Ersatzkörpers aus Zylindern.

der Zylinder mit der Grundfläche G_i die Störung

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \left(\sum_n b_{n,i} t_n(p_i) \right).$$

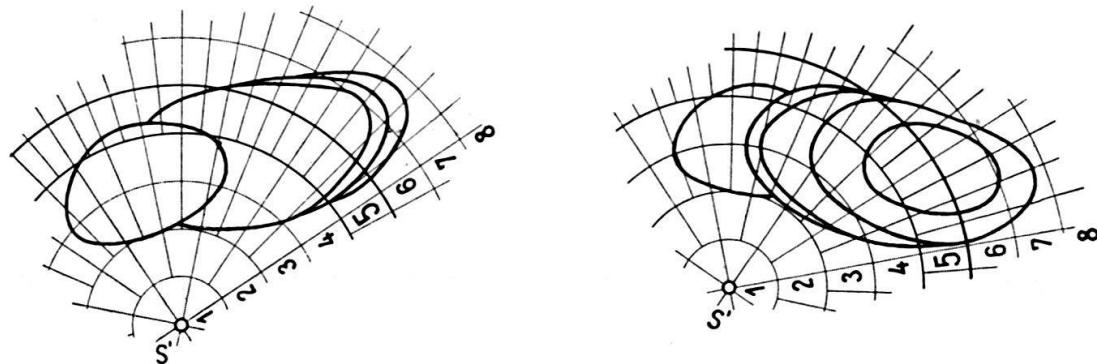


Fig. 6. Die Grundrisse des Ersatzkörpers mit dem Auszähldiagramm.

Die gesamte Schwerestörung s des Ersatzkörpers ist die Summe der Schwerestörungen der Zylinder mit den Grundflächen F_1, F_2, \dots, F_K minus die Summe der Schwerestörungen der Zylinder mit den Grundflächen $G_0, G_1 \dots G_{K-1}$, also

$$s = \sum_{i=1}^K \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_{n,i} t_n(p_i) - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n b_{n,i} t_n(p_i).$$

Führt man die Bezeichnungen $a_{n0} = 0$ und $b_{nK} = 0$ ein, und ersetzt die beiden

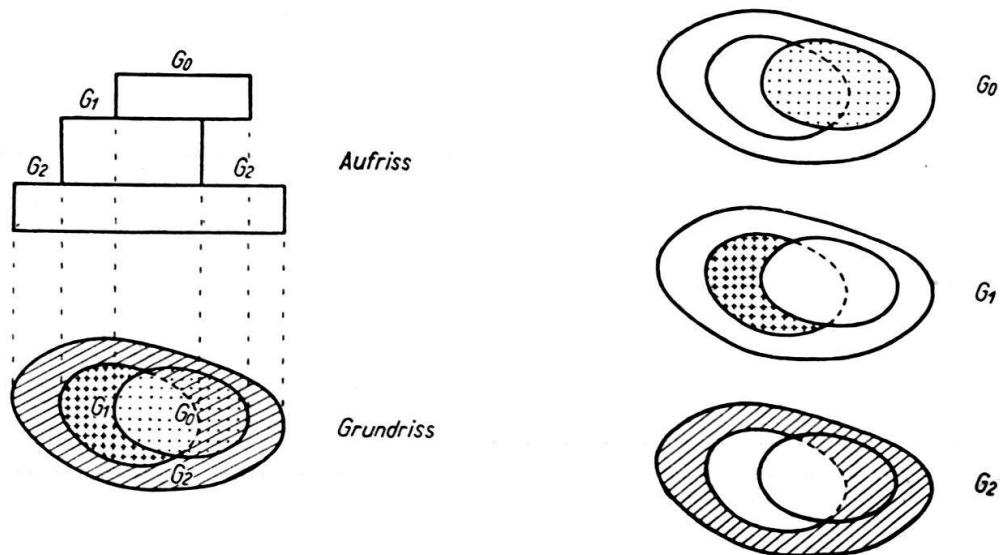


Fig. 7. Sonderfall eines Ersatzkörpers.

Nenner 10^8 durch 10^5 , so erhält man folgende Formel (9), die s nicht mehr im CGS-System, sondern direkt in Milligal (1 Milligal = 0,001 cm/sek²) liefert:

$$s = C \sum_{i=0}^K \sum_n (a_{n,i} - b_{n,i}) t_n(p_i), \quad C = \frac{b V \varrho}{0,5 \cdot 10^5}. \quad (9)$$

Diese Formel, abgeleitet unter der vorläufigen Annahme, dass die Station mindestens so hoch liege wie der höchste Punkt des Körpers, gibt auch die Schwerestörung mit dem richtigen Vorzeichen, wenn die Station mindestens so tief liegt wie der tiefste Punkt, also für $Z_S \leq Z_K$. Ist das Niveau von S zwischen dem des höchsten und des tiefsten Punktes, also $Z_0 > Z_S > Z_K$, so empfiehlt es sich, durch die Horizontalebene im Niveau der Station den Körper in zwei Teile zu zerlegen und die Schwerestörung für jeden Teil gesondert zu berechnen. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass es Fälle gibt, in denen eine Fläche G_i nicht wie in Fig. 5 von oben gesehen vollständig sichtbar ist, sondern durch einen höher gelegenen Zylinder ganz oder teilweise verdeckt ist. Z. B. wird in Fig. 7 die Fläche G_2 teilweise verdeckt durch den obersten Zylinder. Entsprechendes gilt natürlich für die Flächen F_i .

Entsprechend der Bemerkung über die geometrische Bedeutung von p_0 und p_1 in 5. empfiehlt es sich, vor allem wenn die Schwerestörung für ein ganzes Netz von Stationen S mit verschiedenen Meereshöhen zu berechnen ist, die Grössen p_i von Gleichung (8) folgendermassen zu bestimmen:

Man misst in dem im Masstab 1 : V gezeichneten Aufriss von Fig. 3 die Meereshöhen der Station S , des obersten und des untersten Punktes des Körpers und der verschiedenen Höhenkurven. Als Masstab verwendet man dabei wie in 5. einen Radius von Tafel XV, d. h. einen Masstab mit der Einheitsstrecke von der Länge b . Die Niveaux über Meereshöhe werden positiv, die unter Meereshöhe negativ genommen. Man erhält so direkt die Grössen

$$y_S = \frac{Z_S}{bV}, \quad y_0 = \frac{Z_0}{bV}, \quad y_K = \frac{Z_K}{bV}, \quad h_i = \frac{H_i}{bV}, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (10)$$

Entsprechend den Gleichungen (7) berechnet man daraus

$$\begin{aligned} y_1 &= 2h_1 - y_0, \\ y_i &= \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_i), \quad i = 2, 3, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (11)$$

Nach Gleichung (8) wird nunmehr

$$p_i = -y_i + y_S, \quad i = 0, 1, \dots, K. \quad (12)$$

Die Grössen $-y_i$ sind für einen gegebenen Körper unabhängig von der Station S zum voraus zu bestimmen. Für jede Station S muss dann einfach zur Zahlenreihe der $-y_i$ die feste Grösse y_S addiert werden, um die Zahlenreihe der p_i zu erhalten. (Man vergleiche das Zahlenbeispiel von 7.)

7. Zahlenbeispiel.

Der Körper, dessen Schwerestörung s im Punkte S nach Formel (9) von 6. bestimmt werden soll, und für dessen Dichte gegenüber der Dichte der Umgebung ein Überschuss von $\varrho = 0,4 \text{ gr/cm}^3$ angenommen werde, ist in Fig. 3 im Grund- und Aufriss dargestellt. Die Darstellung habe den Masstab 1 : 100000 = 1 : V. Sie enthält den Umriss des Körpers, sowie $K = 5$ Höhenlinien, die die Form der Oberfläche des Körpers zu charakterisieren haben. Ferner ist im Aufriss das Meeressniveau eingezeichnet. In Tafel XV misst man den radialen Abstand zweier benachbarter Kreise. Er beträgt $b = 0,5 \text{ cm}$. Durch Einsetzen der Grössen b , V und ϱ erhält man für den Faktor C in Formel (9) den Wert $C = 0,4$.

Nunmehr sollen die Grössen p_i von Formel (9) bestimmt werden. Mit einem Masstab, dessen Einheitsstrecke b beträgt, hat man im Aufriss von Fig. 3 von

folgenden Punkten, resp. Linien die Höhenunterschiede gegenüber dem Meeresniveau abzumessen. (Statt des Spezialmasstabes kann in unserem Fall wegen $b = 0,5$ cm auch ein gewöhnlicher mm-Masstab verwendet werden. Die erhaltenen, in cm ausgedrückten Masszahlen sind dann einfach zu verdoppeln.)

	Höhenunterschied gegenüber dem Meeresniveau:	Höhenunterschied gegenüber dem Meeresniveau:
Station S	$y_S = 2,55$	erste (oberste) Höhenlinie $h_1 = 0,9$
oberster Punkt des Körpers	$y_0 = 1,4$	zweite Höhenlinie $h_2 = -0,2$
unterster Punkt des Körpers	$y_5 = -4,8$	dritte Höhenlinie $h_3 = -1,7$ vierte $h_4 = -2,2$ fünfte $h_5 = -4,0$

Nach den Formeln (11) von 6. berechnet man nun y_1 bis y_4 und nach (12) die p_i . Für unser Zahlenbeispiel sind die Werte in Tab. 1 eingetragen. Die Tabelle ist ohne weiteres auch für mehrere Stationen zu gebrauchen; man hat nur für jede weitere Station eine besondere Kolonne für die p_i anzufügen.

Tabelle 1.

i	Formel	y_i	p_i	p_i für die Stationen		
				S	S*	S**
0	8	$y_0 = 1,4$	p_0	1,15		
1	$y_1 = 2 h_1 - y_0$	$y_1 = 0,4$	p_1	2,15		
2	$y_2 = \frac{1}{2} (h_3 + h_2)$	$y_2 = -0,95$	p_2	3,50		
3	$y_3 = \frac{1}{2} (h_4 + h_3)$	$y_3 = -1,95$	p_3	4,50		
4	$y_4 = \frac{1}{2} (h_5 + h_4)$	$y_4 = -3,1$	p_4	5,65		
5	—	$y_5 = -4,8$	p_5	7,35		

Zur Bestimmung der Größen a_{ni} und b_{ni} in Formel (9) sind aus dem Grundriss von Fig. 3 die Höhenlinien auf Pauspapier durchzuzeichnen. Der Umriss des Körpers ist nicht mitzuzeichnen. Es sind zwei Pausen herzustellen, eine für die a_{ni} , die andere für die b_{ni} . Bei der ersten beginnt man mit der untersten, dem Meeresniveau H_5 entsprechenden Linie, die vollständig gezeichnet wird. Die nächste darüber liegende, H_4 , wird nur so weit gezeichnet, als sie nicht von der Fläche F_5 überdeckt wird. F_5 ist die Fläche, die von der Höhenlinie H_5 umgrenzt wird. Der Reihe nach werden so die Höhenlinien H_4 , H_3 , H_2 und H_1 gezeichnet und die umgrenzten Flächen nach Fig. 5, Grundriss von unten gesehen, mit F_5 , F_4 bis F_1 bezeichnet. (In unserem Beispiel fällt F_1 weg, da diese Fläche von F_2 vollständig überdeckt wird.) Die zweite Pause wird in gleicher Weise hergestellt. Nur wird begonnen mit der obersten, dem Meeresniveau H_1 entsprechenden Kurve. Bei der Bezeichnung der Flächen hat man zu beachten, dass die Fläche, die von H_1 umgrenzt wird, nicht mit G_1 , sondern mit G_0 zu bezeichnen ist, die von der Kurve H_2 umgrenzte mit G_1 usw., wie dies in Fig. 5, Grundriss von oben gesehen, dargestellt ist. (In dem in Fig. 7 dargestellten Ausnahmefall, der in unserem Zahlenbeispiel nicht eintritt, wären natürlich die zugehörigen Bemer-

kungen über die Definition der Fläche G_i , resp. F_i zu beachten.) In den beiden Pausen werden auch die Grundrisse S' der Stationen eingetragen, für die man die Schwerestörung s bestimmen will. Zur Bestimmung der a_{ni} ist die Pause mit den Flächen F_i so auf das Diagramm, Tafel XV, zu legen, dass der Grundriss S' der Station, für die die Schwerestörung zu bestimmen ist, mit dem Mittelpunkt der Kreise von Tafel XV zusammenfällt (siehe Fig. 6). Die Lage der Pause über Tafel XV ist sonst beliebig, d. h. sie kann um den Punkt S' beliebig gedreht werden. a_{ni} ist die Anzahl der Felder des Kreisringes mit der Nummer n , die in das Feld F_i , b_{ni} die Anzahl der Felder des gleichen Ringes, die in das Feld G_i fallen. Beim Abzählen der Felder werden Bruchteile von Feldern auf Zehntel geschätzt. Zur Notierung der Größen a_{ni} und b_{ni} sowie zur Bestimmung der einzelnen Summanden von Formel (9) wird eine Tabelle benutzt (siehe Tab. 2), die so in Felder

a_{ni}	$a_{ni} - b_{ni}$
b_{ni}	$t_n(p_i)$

Fig. 8.

eingeteilt ist, dass in jedes Feld vier Zahlen eingeschrieben werden können, und zwar nach dem Schema von Fig. 8. Jede Kolonne der Tabelle 2 entspricht einem Index i , jede Zeile einer Nummer n .

Tabelle 2.

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5
3		0 - 0,2 0,2 0,16	0 - 2,8 2,8 0,275	0 - 0,6 0,6 0,34	2,0 - 0,6 2,6 0,39	4,7 4,7 0 0,445
	0 - 0,5 0,5 0,03	0 - 2,8 2,8 0,1	0 - 1,9 1,9 0,195	0,1 - 0,4 0,5 0,255	2,8 0,7 2,1 0,31	5,0 5,0 0 0,375
4	0 - 4,3 4,3 0,0105	0 - 3,5 3,5 0,032	0,2 - 1,1 1,3 0,07	0,6 0,1 0,5 0,097	8,6 8,2 0,4 0,124	1,1 1,1 0 0,157
	0 - 3,2 3,2 0,007	0 - 2,2 2,2 0,023	0,5 0,5 0 0,051	0,9 0,9 0 0,075	3,6 3,6 0 0,1	
5	0 - 0,1 0,1 0,005	0 - 1,6 1,6 0,017	1,1 1,1 0 0,04	0,6 0,6 0 0,059		

In unserem Zahlenbeispiel geht, wie Tabelle 1 zeigt, i von 0 bis 5, so dass die Tabelle 2 sechs entsprechende Kolonnen erhält. Nach Fig. 7 sind beim Auszählen

der a_{ni} und b_{ni} die Kreisringe mit den Nummern $n = 3$ bis $n = 7$ des Diagramms, Tafel XV, beteiligt. Tabelle 2 erhält daher die entsprechenden 5 Zeilen. Das Auszählen der a_{ni} geschieht Ring für Ring, wobei man mit dem innersten Ring ($n = 3$) beginnt. Die a_{ni} werden daher Zeile für Zeile in die linken oberen Ecken der Felder von Tabelle 2 eingetragen. Entsprechend geht man bei den b_{ni} , wiederum mit dem innersten Ring beginnend, vor. Die b_{ni} werden in die linken unteren Ecken der Felder von Tabelle 2 eingetragen. Nach Abschluss der Abzählarbeit wird in jedem Feld von Tabelle 2 die untere Zahl von der oberen subtrahiert und die Differenz entsprechend Fig. 8 in die rechte obere Ecke des Feldes eingetragen. Es fehlen noch die $t_n(p_i)$, die kolonnenweise bestimmt werden. Man beginnt mit $p_0 = 1,15$ von Tabelle 1, liest in Tafel XVI resp. XVII für $p = p_0$ die Größen $t_n(p)$ für $n = 3, 4, 5, 6, 7$ ab. Die Zahlen werden eingetragen in die rechten unteren Ecken der Felder der mit 0 überschriebenen Kolonne der Tabelle 2. Entsprechend verfährt man mit p_1 bis p_5 von Tabelle 1.

Die Summanden von Formel (9) sind die Produkte der beiden rechtsstehenden Zahlen der Felder von Tabelle 2. Man berechnet diese Produkte und trägt sie in eine neue Tabelle (Tabelle 3) so ein, dass die positiven und die negativen Summanden getrennt addiert werden können.

Tabelle 3.

i	n	+	-	i	n	+	-
					Übertrag	0,0255	1,8024
0	4		0,0150	2	7	0,0440	
0	5		0,0452	3	3		0,204
0	6		0,0224	3	4		0,1020
0	7		0,0005	3	5	0,0097	
1	3		0,032	3	6	0,0675	
1	4		0,280	3	7	0,0354	
1	5		0,1120	4	3		0,234
1	6		0,0506	4	4	0,217	
1	7		0,0272	4	5	1,0168	
2	3		0,770	4	6	0,3600	
2	4		0,3705	5	3	2,0915	
2	5		0,0770	5	4	1,875	
2	6	0,0255		5	5	0,1727	
Übertrag		0,0255	- 1,8024			5,9151	- 2,3424
						= 3,5727	

Die Tabelle erübrigt sich, wenn eine Rechenmaschine benutzt wird, die die Produkte unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen vorweg summiert. Die algebraische Summe aller Beträge, nämlich 3,5727, multipliziert mit der Zahl $C = 0,4$ ergibt die Schwerestörung $s = 1,43$ Milligal des Körpers von Fig. 3 an der Station S.

Zürich, Institut für Geophysik der Eidg. Techn. Hochschule.

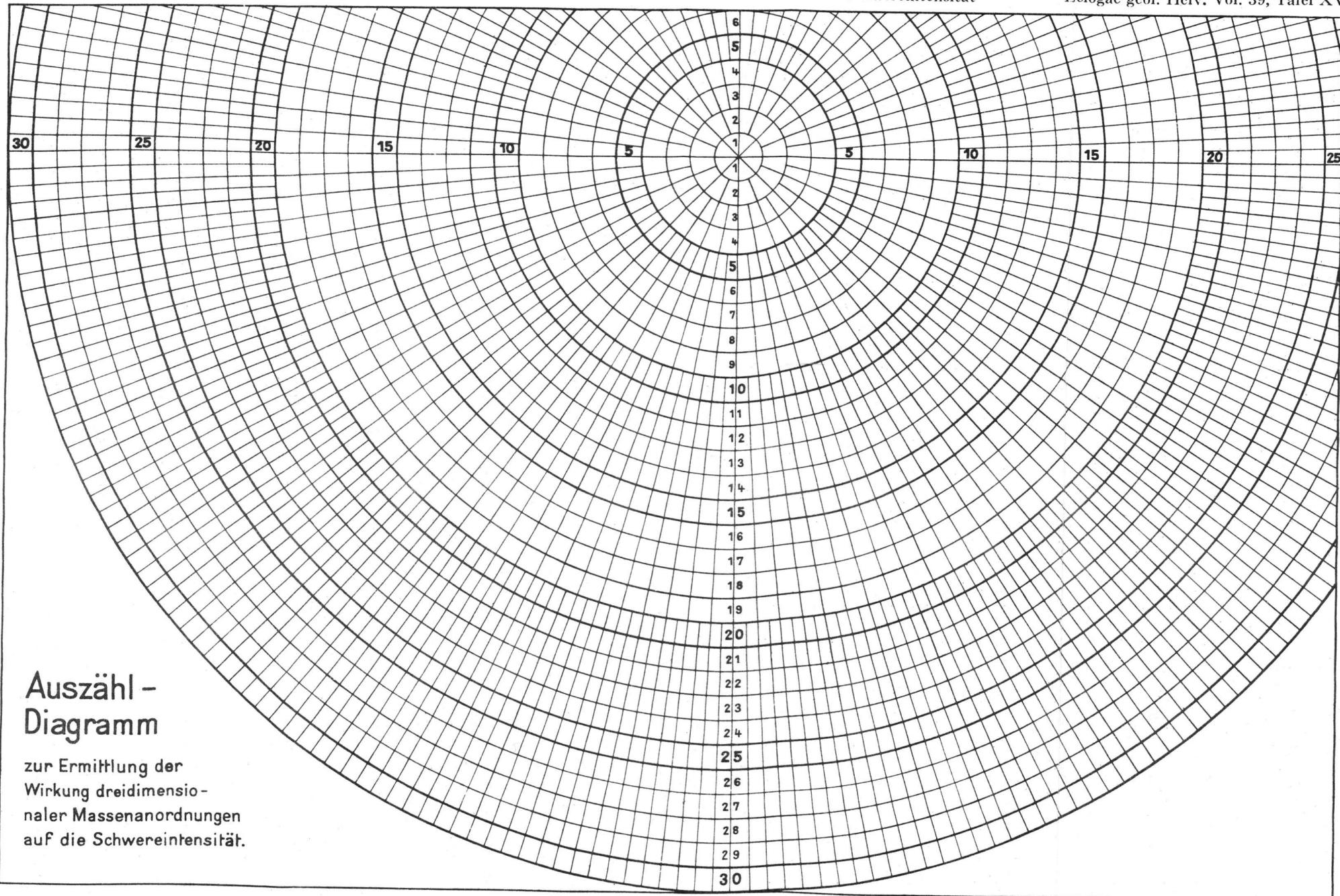
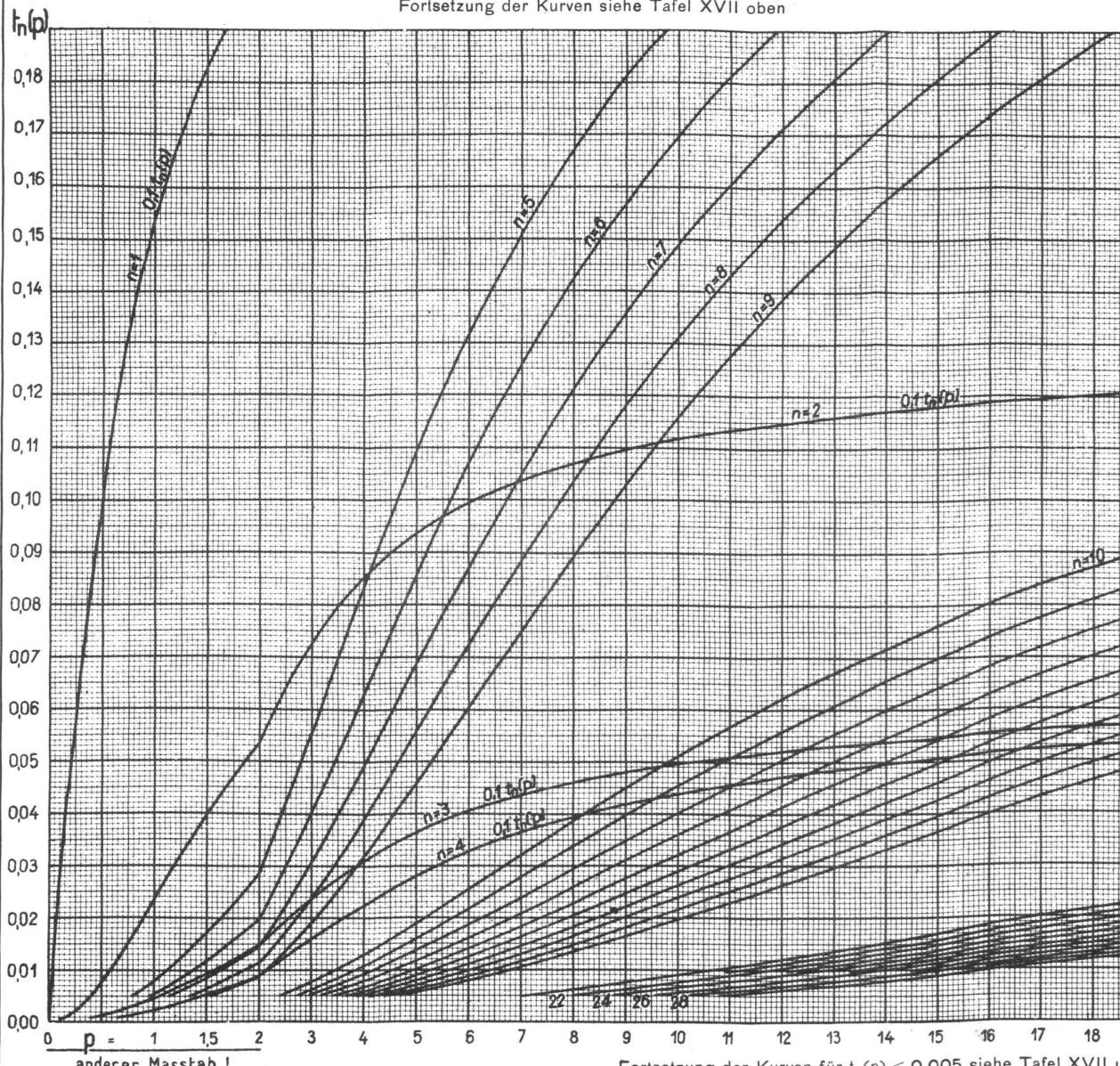


Diagramm zur Bestimmung des Einflusses dreidimensionaler Massenanordnungen auf die Schwereintensität

Fortsetzung der Kurven siehe Tafel XVII oben



$$h_n(p) = \frac{2 \pi \cdot 6.667 \cdot 0.5}{e_n} [1 + \sqrt{(n-1)^2 + p^2} - \sqrt{n^2 + p^2}]$$

n	e _n
1	8
2	16
3 u. 4	32
5 bis 9	64
10 bis 19	128
20 bis 30	256

N.B. Die Ordinaten der Kurven von $n = 1$ bis 4 liefern $0,1 h_n(p)$; alle anderen $h_n(p)$ selbst.

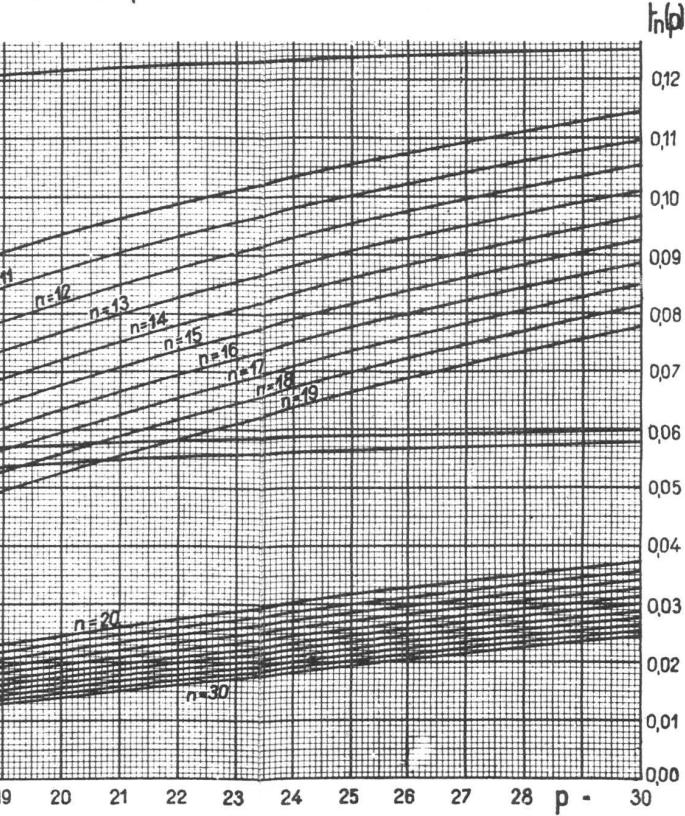
Fortsetzung der Kurven für $h_n(p) < 0,005$ siehe Tafel XVII unten

Diagramm zur Bestimmung des Einflusses dreidimensionaler Massenanordnungen auf die Schwerkraftintensität

Fortsetzung der Kurven von Tafel XVI, Formel für $t_n(p)$ siehe Tafel XVI