

Zur Geschichte der Arithmetik der Algebren (1843 - 1932)

Autor(en): **Frei, Günther**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8493>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur Geschichte der Arithmetik der Algebren (1843–1932)

Günther Frei

Einleitung. Im Jahre 1927 ist bei Orell Füssli in Zürich das Buch von *Leonard Eugene Dickson* „Algebren und ihre Zahlentheorie“ erschienen. Es wurde im wesentlichen von *Johann Jakob Burckhardt* im Auftrag von *Andreas Speiser* aus dem Englischen übersetzt und hat auf *Emil Artin* und *Helmut Hasse*, sowie auf *Emmy Noether* einen grossen Einfluss ausgeübt und eine Entwicklung eingeleitet, die zur abstrakten Theorie der nicht-kommutativen Algebren und auch zur Kohomologietheorie der Gruppen führte. Im folgenden soll die Entwicklung dieser Zahlentheorie der Algebren in ihren wesentlichen Zügen von 1843 bis 1932 nachgezeichnet werden.

1 Strukturtheorie

1.1 Anfänge. 1. Die Theorie der Algebren wurde gewissermassen von *Leonhard Euler* in seiner „*Introductio in analysin infinitorum*“ vorbereitet, wo eine komplexe Zahl z als Punkt in der Ebene mit reellen Koordinaten (x, y) als $z = x + yi$, oder in Polarkoordinaten (r, ϕ) als $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, aufgefasst werden kann, wobei Euler auch schon mittels Potenzreihen die Beziehung $e^{i\phi} = (\cos \phi + i \sin \phi)$ fand und daraus die bemerkenswerte Formel $e^{i\pi} = -1$ herleitete.¹⁾ Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene wurden allerdings erst vom norwegisch-dänischen Mathematiker *Caspar Wessel* im Jahre 1797 und vom Schweizer *Robert Argand* (1806) genauer gefasst, nämlich – in moderner Sprache ausgedrückt – als Operationen in einem zweidimensionalen Vektorraum über den reellen Zahlen. D.h. die komplexen Zahlen wurden als gerichtete, am Ursprung angeheftete Strecken (Vektoren) oder als Punkte betrachtet, die Addition komponentenweise definiert, und die Multiplikation so, dass sie der Relation $i^2 = -1$ unterliegt. Aus den Eulerschen Formeln geht hervor, dass Multiplikation mit i als Drehung um 90° der komplexen x - y -Ebene aufgefasst werden kann.

2. Es waren diese Eigenschaften, welche den irischen Mathematiker *William Rowan Hamilton* bewogen, nach einer dreidimensionalen Verallgemeinerung der komplexen Zahlen zu suchen, nämlich nach einer weiteren „komplexen Zahl“ j derart, dass sich die Punkte $\mathbf{p}$ im Raum als $\mathbf{p} = x + yi + zj$ darstellen lassen und Multiplikation mit j eine Drehung um 90° in einer zur x - y -Ebene orthogonalen Richtung bewirkt. Erst

1) s. [Eu-1748], § 133 und § 138.

nach langem Suchen wurde es ihm am 16. Oktober 1843 klar, dass das nicht gelingen konnte, dass es aber möglich ist, in einem vierdimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{H} = \{\mathbf{q} = x + yi + zj + tk; x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$ einen dreidimensionalen Unterraum zu finden, nämlich den imaginären Anteil $\mathbb{J} = \{yi + zj + tk\}$, in welchem Multiplikation mit i, j bzw. k Drehungen um 90° bewirken. Allerdings ist das nur möglich unter Verzicht auf die Eigenschaft der Kommutativität der Multiplikation. Für die „Basiselemente“ $1, i, j, k$ fand Hamilton die fundamentalen Eigenschaften:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j; \quad ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik.$$

Die Elemente der so definierten Algebra²⁾ $\mathbb{H}$ nannte er *Quaternionen*, und er wies nach, dass die Multiplikation der Quaternionen dem assoziativen Gesetz gehorcht.

3. In der Folge wurden kurz nacheinander eine ganze Reihe von weiteren Algebren entdeckt, insbesondere durch englische Mathematiker. Schon im Dezember 1843 fand *John Thomas Graves* die *Oktonionen* (ein reeller Vektorraum der Dimension 8 mit Multiplikation³⁾), die aber weder dem kommutativen noch dem assoziativen Gesetz genügen, sondern nur dem sogenannten alternativen, einer Abschwächung der Assoziativität. Hingegen besitzt jede von Null verschiedene Oktonion $\mathbf{q}$ – wie auch jede von Null verschiedene Quaternion – eine eindeutig bestimmte multiplikative Inverse $\mathbf{q}^{-1}$. Daher haben weder die Quaternionen noch die Oktonionen Nullteiler.⁴⁾ Unabhängig von Graves fand auch *Arthur Cayley* 1845 die Oktonionen.

1853 führte Hamilton die *Biquaternionen* $\mathbb{B} = \{\mathbf{q} = x + yi + zj + tk; x, y, z, t \in \mathbb{C}\}$ ein, die Quaternionen über den komplexen Zahlen, also abermals einen reellen Vektorraum der Dimension 8 mit Multiplikation, die aber von der der Oktonionen wesentlich verschieden ist. Denn die Biquaternionen besitzen nicht-triviale Nullteiler. Die komplexen Quaternionen $\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathbb{B}$ sind daher auch von den reellen Quaternionen $\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \mathbb{H}$ strukturell sehr verschieden. Das hängt mit dem unterschiedlichen Verhalten der quadratischen Form $\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zusammen. Über $\mathbb{R}$ ist nämlich die Form Φ *anisotrop*, d.h. es ist $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ nur im trivialen Falle $x = y = z = t = 0$ lösbar, während über $\mathbb{C}$ die Form Φ *isotrop* ist, d.h. es gibt für $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ auch nicht-triviale Lösungen $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}$. Daher hat in $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ jede von Null verschiedene Quaternion $\mathbf{q} = x + yi + zj + tk$ eine eindeutig bestimmte Inverse $\mathbf{q}^{-1}$, nämlich $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}'}{N(\mathbf{q})}$, wobei $\mathbf{q}' = x - yi - zj - tk$ die *Konjugierte* und $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ die *Norm* von $\mathbf{q}$ bedeutet.⁵⁾ Und es ist $\mathbf{q} = 0$, d.h. $x = y = z = t = 0$ genau dann, wenn $N(\mathbf{q}) = 0$ ist. Hingegen gibt es in $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ nicht-triviale Nullteiler, nämlich die Quaternionen $\mathbf{q} = x + yi + zj + tk$, für welche $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ ist. Denn es ist dann $\mathbf{q}\mathbf{q}' = N(\mathbf{q}) = 0$ mit $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \neq 0$. Dass die Algebra der Biquaternionen nicht-triviale Nullteiler besitzt, geht auch daraus hervor,

2) Als *Algebra* wollen wir einen Vektorraum bezeichnen, in welchem eine Multiplikation von Vektoren definiert ist.

3) Die Dimension einer Algebra wird von Hasse als *Rang* bezeichnet, von Wedderburn als *Ordnung* (s. [We-1907], S. 79). Der Einfachheit halber wollen wir die Bezeichnung Dimension auch für Algebren beibehalten.

4) Ein Element $q \neq 0$ heisst *Nullteiler*, wenn ein $r \neq 0$ existiert, so dass $qr = 0$ ist.

5) Die Links-Inverse stimmt mit der Rechts-Inversen überein.

dass sie, wie Cayley 1858 bemerkte, isomorph der (vollen) Matrizenalgebra $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist. Denn der Quaternion $\mathbf{q} = x + yi + zj + tk$ in $\mathbb{B}$ entspricht die Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x + yi & -z + ti \\ z + ti & x - yi \end{pmatrix}$ in $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ und umgekehrt. Dabei ist die Norm von $\mathbf{q}$ gleich der Determinanten von $\mathbf{M}$. Die Algebra der Biquaternionen ist daher assoziativ, im Gegensatz zu den Oktonionen.

4. Matrizen wurden 1855 von Cayley eingeführt, um die Theorie der Determinanten und die Invariantentheorie der linearen Transformationen durchsichtiger zu gestalten. Die Bezeichnung *Matrix* stammt aber von *James Joseph Sylvester* (1850). In einer grundlegenden Arbeit im Jahre 1858 zeigte Cayley, dass die (quadratischen) Matrizen (mit Elementen aus einem Körper K) als Vektorraum (über K) aufgefasst und aufgrund der Eigenschaften der Komposition von linearen Transformationen mit einer Multiplikation versehen werden können und dadurch zu einer Algebra (über K) werden, die assoziativ aber nicht kommutativ ist und Nullteiler aufweisen kann. Die Basiselemente sind die Matrizen E_{ij} mit lauter Nullen, ausgenommen einer Eins in der i -ten Reihe und j -ten Kolonne. Dadurch bilden die $n \times n$ Matrizen $\mathcal{M}(n, K)$ (über K) eine Algebra der Dimension n^2 (über K). Auch war es Cayley, der als erster hyperkomplexe Zahlen mit Hilfe von Matrizen behandelte. In einer wichtigen Arbeit von 1854 hatte Cayley sogar schon die Gruppenalgebra über einer endlichen Gruppe betrachtet, nachdem er dort den abstrakten Gruppenbegriff eingeführt hatte.

1.2 Allgemeine Struktursätze. 1. Weitere auch für die Geometrie und Zahlentheorie wichtige Algebren oder *hyperkomplexe Systeme*, wie sie fortan oft genannt wurden, stammen von *Hermann Günther Grassmann* (1844, 1862) und *William Kingdon Clifford* (1873, 1878), nach denen sie heute benannt werden.

Aufgrund der Vielfalt der bis dahin gefundenen Algebren entstand die Aufgabe, alle möglichen Algebren (mit Einselement), für welche das Assoziativgesetz und die beiden Distributivgesetze gelten, zu klassifizieren. Einen ersten bedeutenden Beitrag dazu lieferte *Benjamin Peirce* mit seiner im Jahre 1881, nach seinem Tode erschienenen Arbeit „*Linear Associative Algebras*“, in der Peirce die Begriffe *nilpotent* und *idempotent* einführt und damit erste Struktursätze gewann. Ein Element a einer Algebra $\mathcal{A}$ heisst *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, und *idempotent*, wenn $a^2 = a$ gilt. Peirce hatte damit bereits viele Algebren bis zur Dimension 6 klassifizieren können.

Wichtige Struktursätze für assoziative Algebren mit Einselement über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erhielten *Georg Scheffers* und *Theodor Molien* im Jahre 1891. Molien zeigte, dass jede einfache⁶⁾ Algebra über $\mathbb{C}$ eine vollständige Matrizenalgebra ist, d.h. isomorph einer Algebra von quadratischen Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Unabhängig von Molien – und vollständiger – hat auch *Élie Cartan* diesen Satz sieben Jahre später bewiesen.

2. Eine allgemeine Theorie der assoziativen Algebren mit Einselement, fortan kurz *Algebren* genannt, über *beliebigen Körpern* wurde 1907 von *J.H. Maclagan Wedderburn* in seiner bedeutenden Arbeit „*On Hypercomplex Numbers*“ entwickelt. Diese sollte für die Arithmetik der Algebren die Grundlage bilden. Wedderburn definiert dort Summe

6) vgl. unten, art. 2.

und Produkt von linearen Unterräumen – bei Wedderburn „Komplexe“ genannt – einer gegebenen Algebra $\mathcal{A}$ sowie die Begriffe *invariant*, *einfach*, *halbeinfach* und *Radikal*.

Eine Unter-Algebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heisst bei Wedderburn *invariant*, wenn $\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ gilt, also wenn $\mathcal{B}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ ist. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heisst *einfach*, wenn sie keine nicht-triviale invariante Unter-Algebra enthält, also ausser dem Nullideal (0) und dem Einsideal $(1) = \mathcal{A}$ keine anderen zweiseitigen Ideale. Wedderburn nennt eine Algebra *halbeinfach*, wenn sie keine invariante nilpotente Unter-Algebra⁷⁾ enthält, d.h. wenn ihr Radikal das Nullideal (0) ist. Das *Radikal* $\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ erscheint bei Wedderburn als die maximale nilpotente invariante Unter-Algebra von $\mathcal{A}$. Dazu weist er nach, dass $\mathcal{N}$ die Vereinigung aller nilpotenten invarianten Unter-Algebren in $\mathcal{A}$ ist. Dann beweist Wedderburn seinen⁸⁾

Hauptsatz 1 (1) *Jede Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist Summe aus ihrem eindeutig bestimmten Radikal und einer bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten halbeinfachen Algebra über K .*

- (2) *Jede halbeinfache Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist eine direkte Summe von eindeutig bestimmten einfachen Algebren über K .*
- (3) *Jede einfache Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist isomorph einer vollen Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, \mathcal{F})$ über einem Schiefkörper $\mathcal{F}$ über K .*

Weiter gilt:

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{F}$ sind eindeutig bestimmt bis auf einen inneren Automorphismus von $\mathcal{A}$.⁹⁾

- (4) *Das Zentrum Z einer einfachen Algebra $\mathcal{A}$ über einem Körper K ist ein Relativkörper über K .¹⁰⁾*

Ein *Schiefkörper*,¹¹⁾ bei Wedderburn *primitive Algebra* oder *Divisionsalgebra* genannt, ist eine Algebra, in der alle Körperaxiome gelten ausser der Kommutativität für die Multiplikation, also eine Algebra ohne Nullteiler. Insbesondere hat jedes von Null verschiedene Element in einem Schiefkörper ein eindeutig bestimmtes Links-Inverses und ein Rechts-Inverses, die dann miteinander identisch sind.

3. *Georg Frobenius* hatte 1878 gezeigt, dass die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und die Quaternionen $\mathbb{H}$ die einzigen Schiefkörper über dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ sind, und dass es über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ausser $\mathbb{C}$ keine weiteren Schiefkörper mehr gibt.

7) Eine Algebra heisst nilpotent, wenn jedes ihrer Elemente nilpotent ist. Bei Wedderburn heisst eine Algebra $\mathcal{A}$ zunächst *nilpotent*, wenn $\mathcal{A}^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n .

8) s. [We-1907], S. 109.

9) s. [Di-1923], S. 78 und [Hs-1932], S. 177 und 186/7.

10) s. [Di-1923], S. 80 und [Hs-1931], S. 497.

11) Die Bezeichnung *Schiefkörper* stammt von van der Waerden (s. [Ar-1927a], S. 245).

2 Arithmetik

2.1 Arithmetik der Quaternionen. 1. Bereits in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie hatte *Richard Dedekind* im Jahre 1871 im Supplement X (§ 159) den Begriff des *Körpers* eingeführt und gezeigt, dass ein algebraischer Zahlkörper n -ten Grades über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als eine kommutative Algebra der Dimension n über $\mathbb{Q}$ aufgefasst werden kann, etwa erzeugt durch die Potenzen einer Wurzel eines über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynomes n -ten Grades. Er nannte n (linear über $\mathbb{Q}$) *unabhängige* Elemente des Körpers eine *Basis* des Körpers, später auch *Haupteinheiten* des Körpers. Die ebenfalls von Dedekind im Supplement X (§ 163) entwickelte Arithmetik eines algebraischen Zahlkörpers K über $\mathbb{Q}$, d.h. der Idealtheorie im Ring $\mathcal{R}$ der ganzen Zahlen in K , hat *Adolf Hurwitz* dazu angeregt, auch in nicht-kommutativen Algebren über algebraischen Zahlkörpern, speziell für die Quaternionen über $\mathbb{Q}$, in Anlehnung an Dedekind eine entsprechende Ring- und Idealtheorie zu entwickeln.¹²⁾ Mit diesem Problem hatte sich schon *Rudolf Lipschitz* im Jahre 1886 beschäftigt, aber erst Hurwitz gelang es, die geeignete Definition der ganzen rationalen Quaternionen zu finden, nämlich so, dass sie zu einer Maximalordnung in der Algebra der rationalen Quaternionen führt.

2. Eine *rationale Quaternion* $\mathbf{a} = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, mit $a_\nu \in \mathbb{Q}$, $\nu = 0, 1, 2, 3$, heisst bei Hurwitz *ganz*, wenn entweder alle a_ν ganze rationale Zahlen oder alle a_ν halbe rationale Zahlen, d.h. von der Form $a_\nu = n + \frac{1}{2}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ sind. Die ganzen rationalen Quaternionen bilden einen Ring $\mathcal{R}$ innerhalb des Schiefkörpers $\mathbb{H}(\mathbb{Q}) = \mathcal{Q}$ der rationalen Quaternionen, und zwar den grössten Integritätsbereich innerhalb $\mathcal{Q}$, der die Schiefkörper-Basis $\{1, i, j, k\}$ enthält. Er wird über $\mathbb{Z}$ erzeugt durch i, j, k und $l = \frac{1+i+j+k}{2}$.

Um die Arithmetik von $\mathcal{R}$ herzuleiten, beweist Hurwitz zunächst den grundlegenden Satz, dass jeder Automorphismus ϕ von $\mathcal{Q}$ – bei Hurwitz „Permutation“ genannt – ein innerer ist, d.h. es ist $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{q}\mathbf{a}\mathbf{q}^{-1}$ für eine gewisse Quaternion $\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathcal{Q}$.¹³⁾ Hierbei ist die eindeutig bestimmte Inverse $\mathbf{q}^{-1}$ von $\mathbf{q}$ gegeben durch $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}'}{N(\mathbf{q})}$, wobei $\mathbf{q}' = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$ die *Konjugierte* und $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ die *Norm* von $\mathbf{q}$ bedeutet.

Dann bestimmt Hurwitz die Einheiten in $\mathcal{R}$, d.h. die Elemente $\mathbf{e}$ in $\mathcal{R}$, für die $N(\mathbf{e}) = 1$ gilt. Davon gibt es genau 24, nämlich $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ und $\frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}$.¹⁴⁾ Daraus folgt, dass $\mathcal{R}$ genau 24 Automorphismen gestattet, und diese werden durch Konjugation mit den Einheiten $\mathbf{q} = \mathbf{e}$ von $\mathcal{R}$ und deren Produkte mit $\mathbf{g} = 1 + i$ vermittelt. Weiter zeigt Hurwitz, dass $\mathcal{R}$ *euklidisch* ist, d.h. dass $\mathcal{R}$ einen rechtsseitigen und einen linksseitigen Divisions-Algorithmus gestattet. Daraus folgt, dass jedes rechtsseitige (bzw. linksseitige) Ideal in $\mathcal{R}$ ein rechtsseitiges (bzw. linksseitiges) *Hauptideal* ist. Schliesslich ergibt sich aus Betrachtungen über die Norm der *Fundamentalsatz der Arithmetik* für $\mathcal{R}$, nämlich dass jede ganze Quaternion bis auf die Reihenfolge und bis auf Einheiten auf nur eine

12) vgl. [Hu-1896] und ausführlicher in [Hu-1919].

13) vgl. [Hu-1896], § 2. Dieser wichtige Satz wurde später von *Emmy Noether* und *Albert Thoralf Skolem* auf einfache Algebren erweitert.

14) Die Gruppe der Einheiten ist isomorph zur Gruppe der homogenen Tetraedersubstitutionen, die in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine wichtige Rolle spielt.

Weise in *Primquaternionen* zerlegt werden kann.¹⁵⁾ Denn eine ganze Quaternion ist genau dann prim, wenn ihre Norm eine Primzahl ist; und es ist die Norm multiplikativ, d.h. es gilt $N(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) = N(\mathbf{q}_1)N(\mathbf{q}_2)$ für $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathcal{Q}$.

3. Nach dem Vorbild der Hurwitzschen Arbeit hat *Gustav Du Pasquier*, ein Schüler von Hurwitz, dessen Arbeit über Quaternionen zu einer Zahlentheorie der linearen Substitutionen erweitert. Damit hat Du Pasquier im wesentlichen die Theorie der Arithmetik von halbeinfachen Algebren in Angriff genommen. Diese wurde von *Leonard Eugene Dickson* zu einer Arithmetik der assoziativen Algebren weiter ausgebaut, nämlich zu einer Arithmetik der Maximalordnungen der assoziativen Algebren.¹⁶⁾

2.2 Struktur der Schiefkörper und ihre Beziehung zur Arithmetik der algebraischen Zahlkörper.

1. Nach dem Hauptsatz von Wedderburn hängt die Struktur einer (einfachen) Algebra über einem Körper K von der Struktur des dazugehörigen Schiefkörpers ab. Bis 1906 waren aber ausser den Quaternionen keine weiteren Schiefkörper bekannt. Eine völlig neue Art von Schiefkörper gab nun *Dickson* in einer kurzen Mitteilung an.¹⁷⁾ Dickson ging dabei von der Tatsache aus, dass sich die reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ als Algebra der Dimension 2 über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen lassen:

$$\mathbb{H}(\mathbb{R}) = \{x + yi + zj + tk = x + yi + zj + tij = (x + yi) + (z + ti)j = r + sj\}$$

mit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{C}$. Hierbei sind i und j zwei voneinander unabhängige quadratische Elemente über $\mathbb{R}$, die der algebraischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ genügen. Es ist also $\mathbb{H}(\mathbb{R})$ ein Schiefkörper über $\mathbb{R}$, der den über $\mathbb{R}$ quadratischen Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ enthält.

2. Nach diesem Vorbild konstruierte Dickson 1912 zunächst eine *verallgemeinerte Quaternionen-Algebra*,¹⁸⁾ indem er $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K von Charakteristik $\neq 2$ ersetzte und i und j durch zwei beliebige über K quadratische, aber voneinander unabhängige Elemente α und β , wobei also $\alpha^2 = a$ und $\beta^2 = b$ in K liegen, nicht aber α und β selbst. Der von $1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ erzeugte Vektorraum wird durch die Multiplikationsregeln $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = b$, $\alpha\beta = -\beta\alpha$ und daher $(\alpha\beta)^2 = -ab$ zu einer (assoziativen) Algebra $\mathcal{A}$ (mit Einselement) von der Dimension 4 über dem Körper K , $\mathcal{A} = \{\mathbf{q} = x + y\alpha + z\beta + t\alpha\beta; x, y, z, t \in K\}$, die wir mit $\mathcal{A} = K[a, b]$ bezeichnen wollen. Ist $\mathbf{q}' = x - y\alpha - z\beta - t\alpha\beta$ die Konjugierte von $\mathbf{q}$, dann stellt die Norm von $\mathbf{q}$, $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}'\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{q}' = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$, eine quadratische Form über K dar. In der Algebra $\mathcal{A}$ ist der quadratische Körper $L = K(\sqrt{a}) = K(\alpha)$ enthalten.

3. Eine entscheidend neue Wendung kommt nun dadurch zustande, dass Dickson für die Erzeugung von $\mathcal{A} = K[a, b]$ über $L = K(\sqrt{a})$ mittels $\beta = \sqrt{b}$ die Galois-Gruppe G

15) vgl. [Hu-1896], § 9.

16) s. [Di-1923], Chapter X und [Di-1927], Kapitel X. Von den späteren Arbeiten seien insbesondere die beiden Arbeiten zu den halbeinfachen Algebren von Speiser [Sp-1927] und [Sp-1935], die beiden Arbeiten von Artin [Ar-1927b] und [Ar-1927c] sowie die Arbeiten von Heinrich Brandt erwähnt; ferner die Arbeit von Hasse über p -adische Schiefkörper [Hs-1931].

17) s. [Di-1906]; ferner [Di-1914a], insbesondere art. 1 und [Di-1923], § 47.

18) s. [Di-1923], § 47 und [Di-1914a], art. 9, S. 38.

von L/K heranzieht. Diese ist zyklisch von der Ordnung 2 und wird erzeugt durch den Automorphismus σ , bestimmt durch $\sigma(\alpha) = -\alpha$, und allgemein $\sigma(x + y\alpha) = x - y\alpha$ für $x + y\alpha \in L$; $x, y \in K$. Solcherart wird die Multiplikation in $\mathcal{A}$ bestimmt durch die Rechenregeln

$$(1) \alpha^2 = a \in K, \quad (2) \beta^2 = b \in K, \quad (3) \beta\alpha = -\alpha\beta = \sigma(\alpha)\beta.$$

Das bedeutet, dass die Aktion von σ in L bestimmt wird durch Konjugation mit β : $\sigma(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$. Dadurch wird die Arithmetik von L mit der multiplikativen Struktur von $\mathcal{A}$ in Verbindung gebracht.

Dickson stellte sich auch die wichtige Frage, wann die von ihm konstruierte Algebra $\mathcal{A} = K[a, b] = L(\beta)$ ein Schiefkörper ist. Dazu muss jedes von Null verschiedene Element $\mathbf{q} = r + s\beta \in \mathcal{A}$ mit $r, s \in L$ ein Inverses besitzen. Mit Hilfe dieser Bedingung erhält Dickson den folgenden wichtigen

Satz 2 Die Algebra der verallgemeinerten Quaternionen $\mathcal{A} = K[a, b]$ ist ein Schiefkörper, wenn b nicht die Norm eines Elementes von $K(\sqrt{a})$ über K ist.

Die multiplikative Struktur von $\mathcal{A} = K[a, b]$ hängt also von der Gruppe der Normen von $K(\sqrt{a})/K$ ab. Weil aber die Theorie der Normengruppe eines Körpers durch die Klassenkörpertheorie bestimmt wird, ist auch die Struktur der Algebra $\mathcal{A} = K[a, b]$ durch die Klassenkörpertheorie bestimmt. Das war später der wichtige Ansatzpunkt von Hasse, der zu seinem allgemeinen Normenrestsymbol und weiter zur kohomologischen Formulierung der Klassenkörpertheorie geführt hat.

4. Dickson bemerkte 1906, dass sich diese Konstruktion auf beliebige endliche zyklische algebraische Erweiterungen L/K verallgemeinern lässt. Genauer ausgeführt hat er dies aber erst 1914, 1923 und 1927.

Satz 3 Es sei K ein beliebiger Körper und $L = K(\alpha)$ eine über K endliche zyklische Erweiterung vom Grade n , deren Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L/K)$ von σ erzeugt sei. Weiter sei β ein von α unabhängiges Element derart, dass $\beta^n = b \in K$ ist, aber $\beta^r \notin K$ für $1 \leq r < n$.

- (1) Dann wird der von β über L erzeugte n -dimensionale Vektorraum $\mathcal{A} = L(\beta) = K(\alpha, \beta)$ eine assoziative Algebra mit Einselement von der Dimension n über L und von der Dimension n^2 über K mit einer K -Basis $\{\alpha^\nu \beta^\mu; \nu, \mu = 0, 1, \dots, n-1\}$, wenn für die Multiplikation gilt: $\beta\alpha = \sigma(\alpha)\beta$, wenn also die Aktion von σ in L gegeben ist durch Konjugation mit β : $\sigma(\alpha) = \beta\alpha\beta^{-1}$.
- (2) $\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ ist ein Schiefkörper über K , wenn b^r für $1 \leq r < n$ nicht die Norm eines Elementes t aus $L = K(\alpha)$ ist.

Ferner gilt:

- (3) b ist die Norm eines Elementes t aus $L = K(\alpha)$ genau dann, wenn die Algebra $\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ isomorph einer vollen Matrizenalgebra $\mathcal{M}(n, K)$ von $n \times n$ -Matrizen über dem Grundkörper K ist.

Teil (1) wurde von Dickson 1914 bewiesen, ebenso Teil (2) im Falle von $n = 2$ und $n = 3$. Für beliebiges n erbrachte Wedderburn den Beweis von Teil (2) noch im gleichen Jahre. Hasse konnte 1931 zeigen, dass die Bedingung in (2), nämlich dass b^r für $1 \leq r < n$ nicht die Norm eines Elementes aus $K(\alpha)$ sei, nicht nur hinreichend ist für einen Schiefkörper, sondern auch notwendig.

5. Damit war erstmals die Existenz von Schiefkörpern nachgewiesen, die keine Körper und keine Quaternionen oder verallgemeinerte Quaternionen sind, und deren Dimension n^2 über dem Grundkörper K grösser als 4 ist.

Als Beispiel für $n = 3$ konstruierte Dickson folgende Algebra. Der Grundkörper K sei der rationale Zahlkörper $\mathbb{Q}$, also $K = \mathbb{Q}$. Als zyklischer Körper L vom Grade 3 über $\mathbb{Q}$ sei der maximale reelle Unterkörper des Kreiskörpers der 7-ten Einheitswurzeln $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, genommen, der von $\zeta + \zeta^{-1}$ erzeugt wird. Also $L = K(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha = \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$. Die Zahl α ist Wurzel der (irreduziblen) zyklischen Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$. Ist nun β ein von α linear unabhängiges Element, für welches $\beta^3 = b$ eine gerade ganze Zahl ist, die nicht durch 8 teilbar ist, dann ist $\mathcal{A} = L(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ ein Schiefkörper von der Dimension 9 über $\mathbb{Q}$.

2.3 Arithmetische Theorie der halbeinfachen Algebren. 1. Durch seine Arbeiten zur Gruppentheorie und zur algebraischen Zahlentheorie, insbesondere im Zusammenhang mit seiner Arbeit „Allgemeine Zahlentheorie“, ist *Andreas Speiser* auf das Buch „Algebras and Their Arithmetics“ von Dickson schon bald nach dessen Erscheinen im Jahre 1923 aufmerksam geworden, in welchem erstmals die Theorie von Wedderburn und die Arithmetik der assoziativen Algebren zusammen mit den von Dickson konstruierten zyklischen Algebren lehrbuchmässig dargestellt waren. Im deutschen Sprachraum sind diese amerikanischen Arbeiten vorerst wenig beachtet worden.¹⁹⁾ Deshalb hatte Speiser Dickson vorgeschlagen, das Buch ins Deutsche übersetzen zu lassen. Daraufhin sandte Dickson ein völlig neues, stark überarbeitetes und erweitertes Manuskript, das dann im wesentlichen von dem jungen Studenten *Johann Jakob Burckhardt* ins Deutsche übertragen wurde.

2. Die Übersetzung erschien 1927 bei Orell Füssli in Zürich unter dem Titel „Algebren und ihre Zahlentheorie“. Dickson hat dafür im Jahre 1928 den Cole Prize der American Mathematical Society erhalten. Sie hat auf Emil Artin und Helmut Hasse, und auch auf Emmy Noether, einen grossen Einfluss ausgeübt. Diese hofften, damit die Klassenkörpertheorie auf nicht-abelsche Zahlkörpererweiterungen verallgemeinern zu können. Artin hatte 1927 sein allgemeines Reziprozitätsgesetz in abelschen Zahlkörpern bewiesen und dadurch die Klassenkörpertheorie, die im wesentlichen eine Theorie der abelschen Zahlkörper ist, zu einem gewissen Abschluss gebracht.²⁰⁾ Hasse war 1927 mit dem zweiten Teil seines Berichtes der Klassenkörpertheorie beschäftigt. Er hatte sich gleich nach Erscheinen der deutschen Auflage des Dicksonschen Buches eine eigene Ausarbeitung davon erstellt. Ihn interessierte insbesondere die Beziehung zur Theorie der Normen, zu der er durch seine Theorie der quadratischen Formen geführt worden war. Von dort gelangte er zu den Reziprozitätsgesetzen und zur Klassenkörpertheorie, die auch als eine Theorie der Körpernormen in abelschen Zahlkörpern aufgefasst werden kann.²¹⁾

19) Allerdings hat Emmy Noether schon 1924 in Göttingen eine Vorlesung über hyperkomplexe Zahlen gegeben, in der sie die englische Erstausgabe des Buches von Dickson erwähnt.

20) s. [Ar-1927d] und [Fr-2003].

21) s. [Fr-2001].

3. Bedeutende, durch das Dicksonsche Buch angeregte und in Deutschland zwischen 1927 und 1930 erzielte Fortschritte finden sich nun in einer englisch geschriebenen Arbeit von Hasse, die am 29. Mai 1931 bei den Transactions der AMS eingereicht wurde.²²⁾

Nach Wedderburn ist das Zentrum Z eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$ über einem Körper K ein endlicher Erweiterungskörper über K . Ist $\mathcal{A}$ eine volle Matrixalgebra über $\mathcal{S}$, so ist Z auch das Zentrum von $\mathcal{A}$. Ist $Z = K$, so heisst $\mathcal{S}$ nach einem Vorschlag von van der Waerden *zentral* über K ,²³⁾ bei Wedderburn *normal* über K . Ebenso heisst dann $\mathcal{A}$ zentral über K . Allgemein heisst eine einfache Algebra $\mathcal{A}$ über dem Körper K zentral, wenn K das Zentrum von $\mathcal{A}$ ist.

Die von Dickson über einem algebraischen Zahlkörper K und einer endlichen zyklischen Erweiterung L/K , $L = K(\alpha)$, vom Grade n mit erzeugendem Automorphismus σ konstruierte Algebra $\mathcal{A}$, die wir mit $\mathcal{A} = K(\alpha, \beta)$ bezeichnet hatten, wo $\beta^n = b \neq 0$ in K ist und $\beta\alpha = \sigma(\alpha)\beta$, nennt Hasse eine *zyklische Algebra* vom Grade n über K und schreibt dafür $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma) = (b, L, \sigma)$. Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis von L/K , dann ist $\{\beta^\nu \alpha_\mu; \nu = 0, 1, \dots, n-1, \mu = 1, 2, \dots, n\}$ eine Basis von $\mathcal{A}$ über K . Hierzu beweist Hasse den

Satz 4 (1) Jede zyklische Algebra $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ über einem algebraischen Zahlkörper K ist eine zentrale einfache Algebra über K .

(2) $L = K(\alpha)$ ist der grösste in $\mathcal{A}$ enthaltene Körper.

Umgekehrt hatte Dickson für $n = 2$ gezeigt, dass jeder zentrale Schiefkörper über einem algebraischen Zahlkörper K zyklisch, d.h. eine zyklische Algebra über K ist. Für $n = 3$ wurde das 1921 von Wedderburn bewiesen, und für $n = 4$ von Albert mit Hilfe von Hasses p -adischer Theorie der isotropen quadratischen Formen.²⁴⁾ Ob dies auch bei beliebigem n für einen algebraischen Zahlkörper gelte, war eines der grossen offenen Probleme, das schliesslich 1932 von Hasse, Brauer und E. Noether gelöst wurde, nachdem es Hasse gelungen war, den analogen Satz für p -adische zentrale Schiefkörper über einem p -adischen Zahlkörper herzuleiten.

4. Die Theorie der zyklischen Algebren $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ hat Emmy Noether dadurch erweitert, dass sie anstelle einer zyklischen Erweiterung L/K eine beliebige galoissche Erweiterung L/K betrachtet und die zyklische Galois-Gruppe $G = \langle \sigma \rangle$ durch die entsprechende (beliebige) Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L/K)$ ersetzt und die multiplikative Gruppe $L^\times$ von L mit G kreuzt. Über diese von E. Noether so genannten *verschränkten Produkte* hat sie erstmals 1929–30 in Vorlesungen in Göttingen vorgetragen. Veröffentlicht wurden diese verschränkten Produkte aber zuerst von Hasse in seinem Artikel in den Transactions.

Der Grundkörper K wird dort als vollkommen vorausgesetzt, z. B. endlich oder von Charakteristik 0, und es sei L/K eine galoissche Erweiterung vom Grade n mit Galois-Gruppe G . Dann wird das verschränkte Produkt von $L^\times$ mit G folgendermassen zu einer

22) s. [Hs-1932]. Vgl. auch [Deu-1935].

23) s. [vdW-1959], S. 193.

24) s. [AH-1932], S. 722.

Algebra $\mathcal{A} = L \times G$ über L . Jedem Element σ von G werde ein Basiselement u_σ von $\mathcal{A}$ über L zugeordnet, so dass $\mathcal{A}$ ein Vektorraum der Dimension n über L ist. $\mathcal{A}$ wird nun durch die folgenden Multiplikationsregeln zu einer Algebra:

$$(1) \quad au_\sigma = u_\sigma a^\sigma \text{ für jedes } a \text{ in } L.^{25)}$$

$$(2) \quad u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau} a_{\sigma,\tau} \text{ mit } a_{\sigma,\tau} \neq 0 \text{ in } L.$$

Die Menge (a) der Koeffizienten $a_{\sigma,\tau}$ in L heisst nach Issai Schur ein *Faktorensystem* von $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ist eine Algebra der Dimension n^2 über K mit der Basis $\{u_\sigma \alpha_k\}$, wobei σ die Gruppe G durchläuft, und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis von L/K bildet. Dieses *verschränkte Produkt* bezeichnet Hasse mit $\mathcal{A} = (a, L)$. Gilt in $\mathcal{A}$ das Assoziativgesetz, so folgt für das Faktorensystem die Eigenschaft

$$(3) \quad a_{\sigma,\tau}^\rho = \frac{a_{\tau,\rho} a_{\sigma,\tau\rho}}{a_{\sigma\tau,\rho}}.$$

Umgekehrt führt jedes Faktorensystem $(a) = \{a_{\sigma,\tau} \neq 0\}$ in L , das die Bedingung (3) erfüllt, zusammen mit den Multiplikationsregeln (1) und (2) zu einer assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ der Dimension n^2 über K , die sich als verschränktes Produkt $\mathcal{A} = (a, L)$ darstellen lässt.

Zwei Faktorensysteme (a) und (a') über L führen zur gleichen Algebra $\mathcal{A} = (a, L) = (a', L)$ genau dann, wenn für die beiden Faktorensysteme gilt:

$$(4) \quad a'_{\sigma,\tau} = a_{\sigma,\tau} \frac{c_\sigma c_\tau^\tau}{c_{\sigma\tau}} \text{ für ein } c_\sigma \neq 0 \text{ in } L.$$

Es ist dann $u'_\sigma = u_\sigma c_\sigma$, wenn $\{u'_\sigma\}$ die zu (a') gehörige Basis von $\mathcal{A}$ über L ist. Solche Faktorensysteme heissen nach Hasse *assoziiert*. Hasse schreibt dafür $(a) \sim (a')$. Die Menge der Klassen der assoziierten Faktorensysteme in L mit Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L/K)$ bezeichnen wir mit $H^2(G, L^\times)$ oder $H^2(G, L/K)$. Es handelt sich dabei um eine abelsche Gruppe, die *zweite Kohomologie-Gruppe* von G mit Werten in $L^\times$.

5. Ist $\mathcal{A}$ eine zentrale einfache Algebra über dem Körper K , und ist L eine Körpererweiterung von K , so ist auch die erweiterte Algebra $\mathcal{A} \times L$, die entsteht durch Erweiterung der Skalare (des Koeffizientenbereiches) von K nach L , eine zentrale einfache Algebra über L . Ist dann $\mathcal{A}$ eine volle Matrixalgebra über dem Körper L , so heisst L ein *Zerfällungskörper* von $\mathcal{A}$.²⁶⁾ Ist L ein Zerfällungskörper eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$, so ist L Zerfällungskörper von jeder zentralen einfachen Algebra, die isomorph einer vollen Matrixalgebra über $\mathcal{S}$ ist. A. A. Albert zeigte 1931, dass jeder maximale Unterkörper L eines Schiefkörpers $\mathcal{S}$ über einem Körper K ein Zerfällungskörper von $\mathcal{S}$ ist.^{26a)} So ist der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ Zerfällungskörper der reellen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\mathbb{R})$ über dem Grundkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, nicht aber der Grundkörper $\mathbb{R}$ selbst. Hingegen ist der Grundkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Quaternionen $\mathbb{B} = \mathbb{H}(\mathbb{C})$ schon Zerfällungskörper von $\mathbb{B}$, da $\mathbb{B}$ isomorph einer vollen Matrizenalgebra (der Dimension 4) über $\mathbb{C}$ ist. Weil jeder Schiefkörper $\mathcal{S}$ über einem Körper K einen Zerfällungskörper L enthält, ist die Dimension $[\mathcal{S} : K]$ stets ein Quadrat, was bereits von Wedderburn 1907 bewiesen wurde.

25) Anstelle von $\sigma(a)$ schreiben wir jetzt mit Kronecker a^σ .

26) Dieser Begriff stammt von R. Brauer und E. Noether 1927 (s. [Hs-1932], S. 183).

26a) Das war allerdings R. Brauer schon vorher bekannt.

Für verschränkte Produkte zeigt Hasse nun:

Satz 5 Ist L/K eine endliche Galois-Erweiterung über dem vollkommenen Grundkörper K mit Galois-Gruppe G und $\mathcal{A} = (a, L) = L \rtimes G$ das verschränkte Produkt von $L^\times$ mit G , dann gilt:

- (1) L ist ein maximaler Unterkörper von $\mathcal{A}$.
- (2) $\mathcal{A}$ ist eine zentrale einfache Algebra über K .
- (3) L ist ein Zerfällungskörper von $\mathcal{A}$.

Davon gilt auch eine Art Umkehrung.

Satz 6 Jeder zentrale Schiefkörper $\mathcal{S}$ (und daher jede zentrale einfache Algebra $\mathcal{A}$) über einem vollkommenen Körper K ist zu einem verschränkten Produkt $\mathcal{A} = (a, L) = L \rtimes G$ ähnlich.

Dabei heißen nach Hasse zwei zentrale einfache Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ *ähnlich*, in Zeichen $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$, wenn ihre nach Hauptsatz 1 eindeutig bestimmten Schiefkörper $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ isomorph sind. Die Ähnlichkeitsklassen der zentralen einfachen Algebren über einem Körper K bilden nach Richard Brauer eine abelsche Gruppe $\text{Br}(K)$ bezüglich des Produktes, die sogenannte *Brauer-Gruppe* von K , und diejenigen Klassen, die einen festen galoisschen Zerfällungskörper als maximalen Unterkörper L über K besitzen, formen eine Untergruppe $\text{Br}(L/K)$. Dazu hat Brauer 1929 bewiesen:²⁷⁾

Satz 7 Die Gruppe $\text{Br}(L/K)$ ist isomorph zur Gruppe der Klassen von assoziierten Faktorensystemen $H^2(G, L/K)$ in L mit Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(L/K)$.

Für zyklische verschränkte Produkte beweist Hasse ergänzend und in Verallgemeinerung von Satz 3(3) den

Satz 8 Ist $\mathcal{A} = (b, K(\alpha), \sigma)$ eine zyklische Algebra über dem Zahlkörper K als Grundkörper und (a) das zugehörige Faktorensystem in $L = K(\alpha)$, dann ist die Klasse des Faktorensystems (a) in $H^2(G, L/K)$ genau dann trivial, wenn $\mathcal{A}$ über K zerfällt. Und das ist genau dann der Fall, wenn $b \in K$ die Norm eines Elementes von $K(\alpha)$ ist.

6. Zu einem tieferen Verständnis einer gegebenen Algebra $\mathcal{A}$ über einem Zahlkörper K und zum Beweis des vorhergehenden Satzes gelangte Hasse durch Übergang zu den p -adischen Kompletierungen K_p von K , also durch Übergang zu der p -adischen Erweiterung K_p von K und der dadurch entstehenden lokalen Algebra $\mathcal{A}_p = \mathcal{A} \times K_p$ von $\mathcal{A}$, wo p eine Primstelle in K bedeutet. Insbesondere erhält Hasse auf diese Weise u. a. auch den Beweis für Satz 4. Entscheidend dabei ist die von Hasse gefundene Eigenschaft, dass das von ihm entdeckte *Lokal-Global-Prinzip* für quadratische Formen auch für Algebren gilt, nämlich:

Satz 9 (1) Zwei über einem algebraischen Zahlkörper K (zentrale einfache) zyklische Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ liegen in der gleichen Brauerklasse in $\text{Br}(L/K)$ genau dann, wenn ihre Lokalisierungen $\mathcal{A}_p$ und $\mathcal{A}'_p$ für jede Primstelle p von K in der gleichen (lokalen) Brauerklasse in $\text{Br}(L_p/K_p)$ liegen.

27) s. [Hs-1932], (13.1) und (13.2), S. 194, sowie [Br-1929a] und [Br-1929b].

- (2) Eine über einem algebraischen Zahlkörper K (zentrale einfache) zyklische Algebra $\mathcal{A}$ zerfällt über K genau dann, wenn die zugehörigen lokalen Algebren $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ über $K_{\mathfrak{p}}$ an jeder Primstelle $\mathfrak{p}$ von K zerfallen.

Dieses Lokal-Global-Prinzip wurde von Hasse von den zyklischen Algebren auf beliebige zentrale einfache Algebren erweitert:²⁸⁾

Satz 10 Eine über einem algebraischen Zahlkörper K zentrale einfache Algebra $\mathcal{A}$ zerfällt über K genau dann, wenn alle Lokalisierungen $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ über $K_{\mathfrak{p}}$ für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ in K zerfallen.

Hasse erkannte, dass aus dieser Verallgemeinerung seines Lokal-Global-Prinzips der Hauptsatz für Algebren folgt:²⁹⁾

Hauptsatz 11 Jeder zentrale Schiefkörper $\mathcal{S}$ über einem algebraischen Zahlkörper K ist eine zyklische Algebra $\mathcal{A} = (a, L)$ über K für eine zyklische algebraische Erweiterung L/K und ein Faktorensystem (a) in L .

Zu diesem Hauptsatz, der in einer gemeinsamen grundlegenden Arbeit von Hasse, Brauer und Noether bewiesen wurde, wobei jeder der drei Autoren einen wichtigen Schritt beisteuerte, schreibt Artin in einem Brief an Hasse aus dem Jahre 1931: „Sie können sich gar nicht vorstellen, wie ich mich über den endlich geglückten Beweis für die zyklischen Systeme gefreut habe. Das ist der grösste Fortschritt in der Zahlentheorie der letzten Jahre.“

Literatur

- [AH-1932] Albert, A.A.; Hasse, H.: A Determination of all Normal Division Algebras over an Algebraic Number Field. *Transactions of the AMS* 34 (1932), 722–726.
- [Ar-1927a] Artin, E.: Über einen Satz von Herrn J.H. Maclagan Wedderburn. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 5 (1927), 245–250.
- [Ar-1927b] Artin, E.: Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 5 (1927), 251–260.
- [Ar-1927c] Artin, E.: Zur Arithmetik hyperkomplexer Zahlen. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 5 (1927), 261–289.
- [Ar-1927d] Artin, E.: Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes. *Abh. Math. Sem. Hamburg* 5 (1927), 353–363.
- [De-1885] Dedekind, R.: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 1885, 141–159; *Ges. math. Werke*, Bd. 2, XX, 1–22.
- [Deu-1935] Deuring, M.: *Algebren*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 4, Julius Springer, Berlin 1935.
- [DD-1871] Dirichlet, L.: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Friedrich Vieweg, Braunschweig 1871.
- [Di-1906] Dickson, L.E.: Abstract 16, April 14, 1906, *Bulletin of the AMS* 12 (1905–06), 441–442.
- [Di-1914a] Dickson, L.E.: Linear Associative Algebras and Abelian Equations. *Transactions of the AMS* 15 (1914), 31–46.
- [Di-1914b] Dickson, L.E.: *Linear Algebras*. The University Press, Cambridge, 1914 (Reprint 1930).
- [Di-1923] Dickson, L.E.: *Algebras and Their Arithmetics*. The University of Chicago Science Series, The University of Chicago Press, July 1923.

28) s. [HBN-1932], Satz I, S. 399.

29) s. [HBN-1932], Hauptsatz, S. 399.

- [Di-1927] Dickson, L.E.: *Algebren und ihre Zahlentheorie*. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von Andreas Speiser. Orell Füssli Verlag, Zürich 1927.
- [Eu-1748] Euler, L.: *Introductio in analysin infinitorum*. Opera omnia, series prima, vol. 8, Birkhäuser, 1922.
- [Eu-1983] Euler, L.: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Reprint der deutschen Erstauflage, Berlin 1885. Springer, 1983.
- [Fr-1981] Frei, G.: *Die Briefe von Emil Artin an Helmut Hasse, 1923–1953*. Collection Mathématique, Université Laval, Januar 1981, 166 Seiten.
- [Fr-2001] Frei, G.: *How Hasse was led to the Theory of Quadratic Forms, the Local-Global-Principle, the Theory of the Norm Residue Symbol, the Reciprocity Laws, and to Class Field Theory*. In: *Class Field Theory – Its Centenary and Prospect* (ed. K. Miyake). Advanced Studies in Pure Mathematics 30. Mathematical Society of Japan, Tokyo 2001, 31–62.
- [Fr-2003] Frei, G.: *On the History of the Artin Reciprocity Law in Abelian Extensions of Algebraic Number Fields: How Artin was led to his Reciprocity Law*. Erscheint in: *The Abel Legacy. The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 (ed. A. Laudal). Springer-Verlag, Heidelberg 2003.
- [Fr-1878] Frobenius, F.G.: *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 1, 343–405.
- [Gr-1844] Grassmann, H.G.: *Die lineale Ausdehnungslehre*. Verlag Wigand, Leipzig 1844.
- [Gr-1862] Grassmann, H.G.: *Die Ausdehnungslehre*. Verlag Enslin, Berlin 1862.
- [Ha-1853] Hamilton, W.R.: *Lectures on Quaternions*. June 1853.
- [Hs-1931] Hasse, H.: Über p -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme. *Math. Annalen* 104 (1931), 495–534.
- [Hs-1932] Hasse, H.: Theory of Cyclic Algebras over an Algebraic Number Field. *Transactions of the AMS* 35 (1932), 171–214.
- [HBN-1932] Hasse, H.; Brauer, R.; Noether, E.: Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. *J. reine angew. Math.* 167 (1932), 399–404.
- [Hu-1896] Hurwitz, A.: *Über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, 313–340; *Math. Werke*, Bd. II, LXIV, 303–330.
- [Hu-1919] Hurwitz, A.: *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Springer, Berlin 1919.
- [Mo-1893] Molien, Th.: Über Systeme höherer komplexer Zahlen. *Math. Annalen* 41 (1893), 83–156.
- [Pe-1881] Peirce, B.: Linear Associative Algebras. *American Journal of Math.* 4 (1881), 97–215.
- [Sf-1891] Scheffers, G.: Zurückführung komplexer Zahlensysteme auf typische Formen. *Math. Annalen* 39 (1891), 292–390.
- [Sp-1926] Speiser, A.: *Allgemeine Zahlentheorie*. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft Zürich 71 (1926), 8–48.
- [Sp-1927] Speiser, A.: *Idealtheorie in rationalen Algebren*. Kapitel XIII in: Dickson, L.E.: *Algebren und ihre Zahlentheorie*. Orell Füssli Verlag, Zürich 1927. (s. [Di-1927].)
- [Sp-1935] Speiser, A.: Zahlentheorie in rationalen Algebren. *Comment. Math. Helv.* 8 (1935/36), 391–406.
- [St-1898] Study, E.: *Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen*. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, A4, Leipzig 1898.
- [vdW-1959] van der Waerden, B.L.: *Algebra. Zweiter Teil*. Vierte Auflage. Springer, Berlin, Heidelberg 1959.
- [vdW-1985] van der Waerden, B.L.: *A History of Algebra*. Springer, Berlin, Heidelberg 1985.
- [We-1907] Wedderburn, J.H. Maclagan: *On Hypercomplex Numbers*. Proc. London Math. Soc., ser. 2, vol. 6 (1907), 77–118.
- [We-1914] Wedderburn, J.H. Maclagan: A Type of Primitive Algebra. *Transactions of the AMS* 15 (1914), 162–166.
- [We-1921] Wedderburn, J.H. Maclagan: On Division Algebras. *Transactions of the AMS* 22 (1921), 129–135.

Günther Frei

Lützelstrasse 36

CH-8634 Hombrechtikon, Schweiz

e-mail: g.frei@active.ch