Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **50 (1995)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

El. Math. *50* (1995)

0013-6018/95/040171-06$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1996 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1102: Charakterisierung von orthogonalen Projektoren.

Vorbemerkung: Es bezeichne M eine $m \times n$-Matrix und M^T ihre Transponierte. Die sogenannte *Moore-Penrose-Inverse* M^+ erlaubt auch für nicht-quadratische Matrizen M die Bildung einer verallgemeinerten Inversen und ist zum Beispiel beim Lösen linearer $m \times n$-Gleichungssysteme sehr nützlich. Sie wurde um 1920 von E. H. Moore entdeckt und 1955 von R. Penrose durch die folgenden vier Bedingungen eindeutig festgelegt:

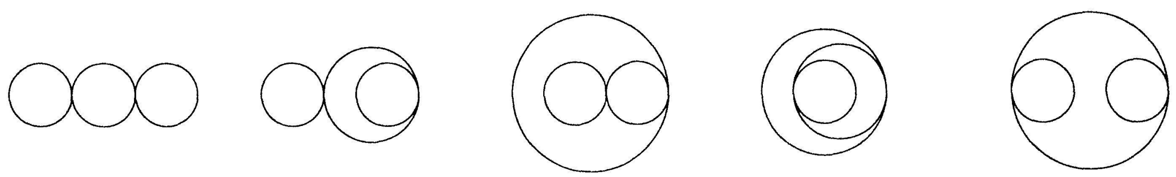
$$MM^+M = M \tag{1}$$
$$M^+MM^+ = M^+ \tag{2}$$
$$(MM^+)^T = MM^+ \tag{3}$$
$$(M^+M)^T = M^+M \tag{4}$$

Es sei nun A eine quadratische Matrix mit reellen Einträgen. Man nennt A einen orthogonalen Projektor, wenn A symmetrisch und idempotent ist, d. h. wenn A die Eigenschaften $A^T = A$ und $A^2 = A$ erfüllt. Man zeige, dass A genau dann ein orthogonaler Projektor ist, wenn $A^+ = A^T A$ gilt.

G. Trenkler und S. O. Troschke, Dortmund, D

Aufgabe 1103: Gefaltete Kreisketten.

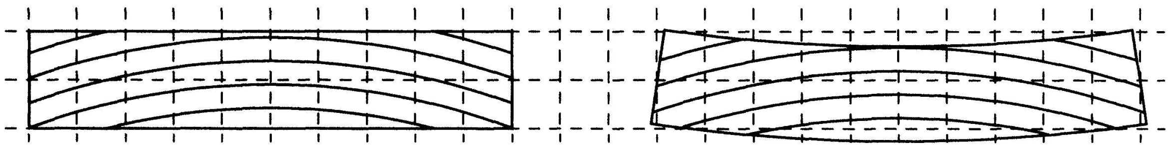
Zwei Kreise können sich aneinander- bzw. ineinanderliegend berühren. Drei Kreise, von denen der erste den zweiten und der zweite den dritten berühren soll, die aber sonst schnittpunktfrei verlaufen, können schon folgende fünf Faltungen in der Ebene bilden:



Man ermittle die Anzahl aller möglichen Faltungen einer n-gliedrigen offenen Kette in der Ebene, wobei die Radien der Ringe passend gewählt seien und die Faltungsergebnisse als gleich gelten sollen, falls sie topologisch äquivalent sind.

Werner Raffke, Vechta, D

Aufgabe 1104 (Die einfache dritte Aufgabe): Wölbung eines getrockneten Brettes.



Die Figur zeigt den Querschnitt eines Brettes, das exzentrisch aus einem Fichtenstamm herausgesägt worden ist. Links ist das Brett in frischem, rechts in getrocknetem Zustand abgebildet. Die Wölbung des getrockneten Brettes ergibt sich aus den unterschiedlichen Schwindungsverlusten beim Trocknen: Für Fichtenholz ist das Schwindmass in der Längsrichtung des Stamms 0.3%. Quer dazu ist das Schwindmass in radialer Richtung 3.6% und in tangentialer Richtung 7.8%. Wie gross ist der Krümmungsradius bei der Längsachse des getrockneten Brettes, ausgedrückt durch den ursprünglichen Abstand dieser Achse von der Stammachse.

Aldo Duelli, Wuppenau, CH

Lösungen zu den Aufgaben aus Heft 4, 1994

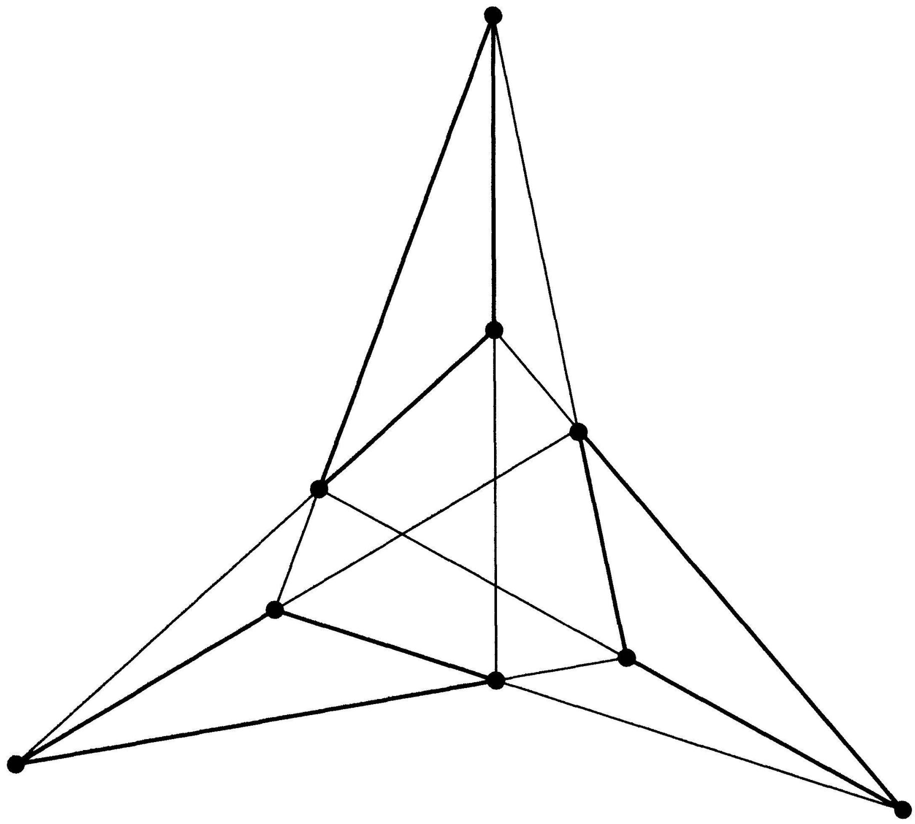
Aufgabe 1090. Es gibt Dreiecke D_1, D_2 und D_3, die einander in zyklischer Folge ein- bzw. umbeschrieben sind, das heisst, dass die Ecken von D_i auf den eventuell verlängerten Seiten von $D_{i-1 (\mathrm{mod}\ 3)}$ liegen. Gibt es Tripel von solchen Dreiecken, die ausserdem kongruent zueinander sind?

Georg Unger, Dornach, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind zwei Lösungen eingetroffen: Christian Blatter (Zürich, CH) und O.P. Lossers (Eindhoven, NL). Beide Lösungen arbeiten in der Ebene der komplexen Zahlen. Im folgenden die Lösung nach *Christian Blatter*: Um die Sache zu vereinfachen, verlangen wir zusätzlich, dass es eine Bewegung T gibt, die die D_i zyklisch permutiert. T ist dann notwendigerweise eine Drehung um 120° und kann in der Form

$$T: \quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \omega z, \qquad \omega := e^{2\pi i/3},$$

angesetzt werden.



Drei verschiedene Punkte $w_i \in \mathbb{C}$ liegen genau dann auf einer Geraden, wenn $(w_2 - w_0)/(w_1 - w_0)$ reell ist oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn

$$Q(w_0, w_1, w_2) := w_0\bar{w}_1 + w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_0$$

reell ist. Abgesehen von den offensichtlichen Symmetrieeigenschaften besitzt Q die zusätzliche Eigenschaft

$$Q(w_0, \omega w_1, \bar{\omega} w_2) = \bar{\omega} Q(w_0, w_1, w_2).$$

Wähle nun $z_0 := a + iy_0$, $z_1 := a + iy_1$, $z_2 := \bar{\omega}(a + iy_2)$ mit

$$3a^2 + y_0y_1 + y_1y_2 + y_2y_0 = 0 \tag{$*$}$$

und setze $D_0 := (z_0, z_1, z_2)$, $D_i := T^i(D_0)$. Dann liegen z_0, z_1 und ωz_2 auf der Geraden $\operatorname{Re} z = a$, insbesondere ist ωz_2 Element der Geraden durch z_0 und z_1. Wegen $(*)$ gilt nun sogar

$$Q(z_0, z_1, \omega z_2) = (a + iy_0)(a - iy_1) + (a + iy_1)(a - iy_2) + (a + iy_2)(a - iy_0) = 0$$

und damit auch

$$Q(z_0, \omega z_1, z_2) = Q(z_0, \omega z_1, \bar{\omega}(\omega z_2)) = \bar{\omega} Q(z_0, z_1, \omega z_2) = 0\,.$$

Damit ist ωz_1 Element der Geraden durch z_0 und z_2. Analog verifiziert man, dass ωz_0 Element der Geraden durch z_1 und z_2 ist. Das Dreieck D_1 steht daher in der verlangten Relation zu D_0, und da T inzidenztreu ist, gilt dasselbe für alle Übergänge von D_i nach D_{i+1}. Weil a, y_0, y_1, y_2 nur der Bedingung $(*)$ unterliegen, haben wir damit eine zweiparametrige Schar von paarweise nichtähnlichen Konfigurationen der verlangten Art produziert.

Aufgabe 1091. Wie viele nicht absteigende Folgen natürlicher Zahlen der Länge $n \cdot p$ $(n, p \in \mathbb{N})$ gibt es, deren Glieder $a_k (k, a_k \in \mathbb{N})$ den Bedingungen

$$a_{pn} = a_{pn-1} = a_{pn-2} = \cdots = a_{pn-p+1} = n$$

und

$$a_{pi+1} \geq a_{pi} \geq a_{pi-1} \geq \cdots \geq a_{pi-p+1} \geq i \qquad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)$$

genügen?

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH; Jany Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 3 Lösungen eingetroffen: Joachim Klose (Bonn, D), Werner Raffke (Vechta, D), Hansruedi Widmer (Rieden, CH). Eine vierte Einsendung war falsch. *Joachim Klose* und *Werner Raffke* geben eine rekursive Lösung. Im folgenden die direkte Lösung nach *Hansruedi Widmer*: Wir codieren die Folgen als $(0, 1)$-Sequenzen, indem wir jeden der $n \cdot p$ Plätze mit einer 0 markieren und eine 1 (oder mehrere) zwischen zwei Nullen schreiben, wenn an der betreffenden Stelle die Folgenglieder um eins (oder mehr) wachsen. Zum Beispiel codieren wir für $n = 5$, $p = 3$ die Folge 1,1,2,2,2,2,4,4,4,4,4,5,5,5,5 als 0010000110000010000. So entstehen $(0, 1)$-Folgen der Länge $n \cdot p + n - 1$, welche genau $n - 1$ Einsen enthalten. Die an die Folge gestellten Bedingungen bedeuten nun, dass die Einsen in dieser Sequenz "nicht zu spät kommen dürfen". Die k-te Eins darf spätestens nach der $k \cdot p$-ten Null auftreten $(1 \leq k \leq n-1)$. Deuten wir nun diese $(0, 1)$-Sequenzen als Minimalwege auf einem Quadratgitter, so ist die Anzahl der Wege gefragt, die den Punkt $(0|0)$ mit $(np|n-1)$ verbinden und welche die durch die Punkte $(p|0)$ und $(2p|1)$ gehende Gerade nicht unterschreiten. Denkt man sich die Wege in der anderen Richtung durchlaufen, so erkennt man das "Kinokassenproblem", dessen Lösung

$$\binom{n(p+1)-1}{n-1} - p \cdot \binom{n(p+1)-1}{n-2} = \frac{1}{np+1} \binom{n(p+1)}{n}$$

durch Rechnen mit formalen Potenzreihen gefunden werden kann (vgl. [1]).

Die Aufgabensteller geben noch den Hinweis, dass $p = 1$ die *CATALAN-Zahlen* (vgl. Aufgabe 1078 aus El. Math. 48 (1993), S. 173) liefert und $p = 2$ die Aufgabe 1027 aus El. Math. 46 (1991), S. 29/30 im wesentlichen löst.

[1] Jeger, Max: *Kombinatorik, Bd. 2.* Stuttgart 1976, S. 75/76.

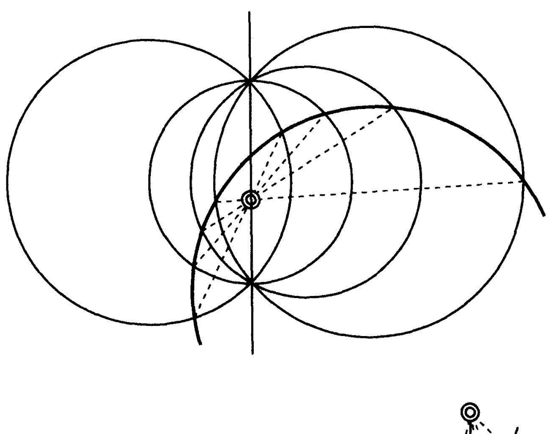
Aufgabe 1092 (Die einfache dritte Aufgabe). Betrachte die Orthogonalkreise zu zwei exzentrischen Kreisen k_1 und k_2. Die Sekanten durch die Schnittpunkte dieser Orthogonalkreise mit k_1 bzw. k_2 (Chordalen) gehen je durch einen festen Punkt P_1 bzw. P_2. (Verallgemeinerung einer Aussage von Marco Vignati in El. Math. 47 (1992), 33–38 bzw. von Georg Unger in El. Math. 48 (1993), 120–122)

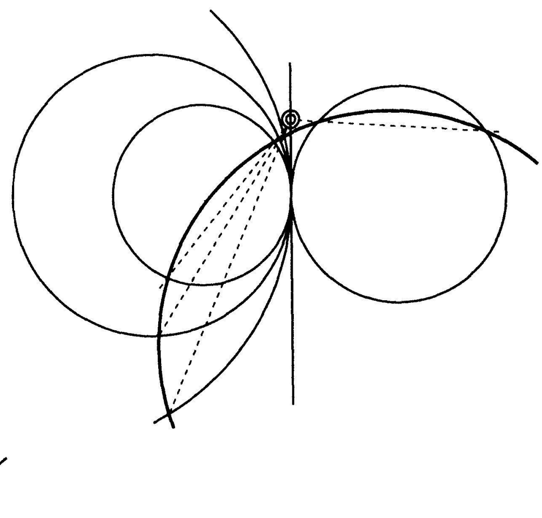
Franz Spirig, Rorschacherberg, CH

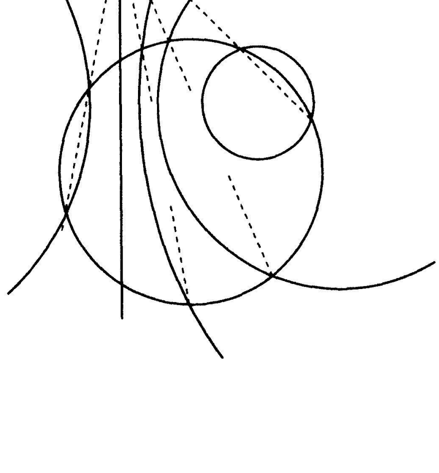
Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Dieter Koller (Zürich, CH), Georg Unger (Dornach, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Alle Einsender gehen im wesentlichen gleich vor. Wir folgen hier dem Wortlaut des Beweises von *Jany C. Binz*:

Die Mittelpunkte M der Orthogonalkreise k liegen auf der Potenzgeraden p der Kreise k_1 und k_2. Diese steht senkrecht auf der Zentralen z der beiden Kreise und ist sowohl Polare von k_1 bezüglich eines Pols P_1 auf z als auch Polare von k_2 bezüglich eines Pols P_2 auf z. Fasst man umgekehrt die Punkte M als Pole auf, die auf der Polaren p von k_1 (resp. k_2) liegen, so sind die Chordalen gerade die Polaren von M, die durch den Pol bezüglich p gehen müssen. Die Chordalen von k_1 (resp. k_2) gehen somit alle durch P_1 (resp. P_2).

Roland Wyss macht darauf aufmerksam, dass die Aufgabenstellung nicht wesentlich mit der Orthogonalität der Kreise k_1 resp. k_2 bezüglich des Kreisbüschels zu tun hat. Die beiden Kreise k_1 und k_2 dienen lediglich dazu, ein elliptisches, parabolisches oder hyperbolisches Kreisbüschel als Orthogonalkreise von k_1 und k_2 zu definieren. Wird dann ein solches Kreisbüschel von einem *beliebigen* Kreis geschnitten, der nicht zum Büschel gehören soll, so treffen sich die erzeugten Chordalen in einem festen Punkt, der auf der Potenzgeraden des Büschels liegt und gemeinsamer Potenzpunkt der betrachteten Kreise ist. Die Kreise k_1 und k_2 sind also nichts anderes als zwei solche beliebige Kreise. Die folgende Abbildung zeigt ein elliptisches, ein parabolisches und ein hyperbolisches Kreisbüschel, die je von einem beliebigen Kreis geschnitten werden.







Roland Wyss fährt fort: Ein hübscher Beweis dieses allgemeinen Satzes ergibt sich, wenn die betrachteten Kreise und Geraden als Bilder einer stereographischen Projektion Γ aufgefasst werden: Auf der Urbildkugel wird das Kreisbüschel durch ein Ebenenbüschel mit der Schnittgeraden s und der Kreis k_1 durch eine einzelne Ebene des Raumes erzeugt. Die Schnittgeraden dieser einzelnen Ebene mit den Ebenen des Büschels sind die Sekanten durch die Kreisschnittpunkte auf der Kugel und bilden ihrerseits ein Geradenbüschel durch einen Punkt P. Dabei ist P der Durchstosspunkt der Geraden s mit der einzelnen Ebene. Das Geradenbüschel bildet zusammen mit dem Kugelnordpol wieder ein Ebenenbüschel, das auf der Kugel Kreise herausschneidet, die durch Γ in Geraden, eben in die Chordalen übergehen, die somit durch den Punkt $P_1 = \Gamma(P)$ verlaufen.