

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **49 (1994)**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1995 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1090: Es gibt Dreiecke D_1 , D_2 und D_3 , die einander in zyklischer Folge ein- bzw. umbeschrieben sind, das heisst, dass die Ecken von D_i auf den eventuell verlängerten Seiten von $D_{i-1 \pmod{3}}$ liegen. Gibt es Tripel von solchen Dreiecken, die ausserdem kongruent zueinander sind?

Georg Unger, Dornach, CH

Aufgabe 1091: Wie viele nicht absteigende Folgen natürlicher Zahlen der Länge $n \cdot p$ ($n, p \in \mathbb{N}$) gibt es, deren Glieder a_k ($k, a_k \in \mathbb{N}$) den Bedingungen

$$a_{pn} = a_{pn-1} = a_{pn-2} = \cdots = a_{pn-p+1} = n$$

und

$$a_{pi+1} \geq a_{pi} \geq a_{pi-1} \geq \cdots \geq a_{pi-p+1} \geq i \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

genügen?

Hansjürg Stocker, Wädenswil, CH; Jany Binz, Bolligen, CH

Aufgabe 1092 (Die einfache dritte Aufgabe): Betrachte die Orthogonalkreise zu zwei exzentrischen Kreisen k_1 und k_2 . Die Sekanten durch die Schnittpunkte dieser Orthogonalkreise mit k_1 bzw. k_2 (Chordalen) gehen je durch einen festen Punkt P_1 bzw. P_2 . (Verallgemeinerung einer Aussage von Marco Vignati in El. Math. 47 (1992) 33–38 bzw. von Georg Unger in El. Math. 48 (1993) 120–122)

Franz Spirig, Rorschacherberg, CH

Lösungen

Aufgabe 1078. Lexikographische Anordnung der Catalan-Wörter. Als Catalan-Wörter vom Index n über dem Alphabet $0, 1$ bezeichnet man $2n$ -stellige Wörter aus je genau n Zeichen 0 und 1 , in denen bei jeder beliebigen Unterteilung im vorderen Abschnitt die Anzahl der Zeichen 1 die Anzahl der Zeichen 0 nicht übertrifft.

Man denke sich die Catalan-Wörter vom Index n lexikographisch geordnet. Wie heisst dann das Nachfolgewort $\bar{f}$ zum Wort $f = f_1 f_2 \dots f_{2n}$?

Max Jeger †, Luzern, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Harald Friepertinger (Graz, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Andreas Müller (Altendorf, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Die Nachfolgekonstruktion ist evident, wenn man die Catalan-Wörter im 2-dimensionalen Gitter als Minimalwege von $(0/0)$ nach (n/n) deutet, welche die Gerade $y = x$ nicht überschreiten. Daraus ergibt sich (nach Jany C. Binz und O.P. Lossers): Es seien $e = 01$, e^k das Wort mit k Blöcken 01 , e^0 das leere Wort und 1^k resp. 0^k die Wörter mit k Zeichen 1 resp. 0 . Dann ist $0^n 1^n$ das erste, e^n das letzte Wort in der lexikographischen Anordnung der Catalan-Wörter vom Index n . Für $n \geq 2$ hat jedes von e^n verschiedene Catalan-Wort die Gestalt

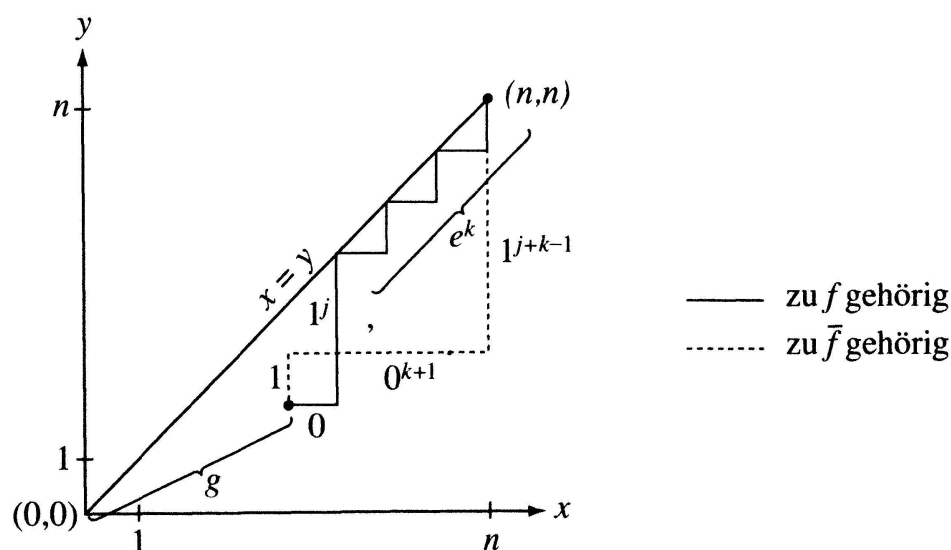
$$f = g 0 1^j e^k \quad (0 \leq k \leq n-2, 2 \leq j \leq n-k),$$

wobei g ein Wort der Länge $2n-1-j-2k$ ist.

Das lexikographische Nachfolgewort von f ist dann

$$\bar{f} = g 1 0^{k+1} 1^{j+k-1},$$

wie man direkt aus der Figur abliest.



Harald Friepertinger gibt eine Lösung für folgende Verallgemeinerung: Ein verallgemeinertes Catalan-Wort ist ein kn -stelliges Wort bestehend aus n Zeichen 0 und $(k-1)n$ Zeichen 1, in welchem bei jeder Unterteilung gilt: Im vorderen Abschnitt ist die Anzahl der Zeichen 1 kleiner oder gleich der $(k-1)$ -fachen Anzahl der Zeichen 0. Die Motivation für diese Verallgemeinerung liegt darin, dass die Anzahl der Catalan-Wörter vom Index n als Anzahl der möglichen Klammerungen bei einer binären Verknüpfung von $n+1$ Elementen interpretiert werden kann. Der Übergang zu einer k -stelligen Verknüpfung führt dann zu den verallgemeinerten Catalan-Wörtern.

Aufgabe 1079. Das exzentrische Windrädchen. Das "Windrädchen" im regelmässigen n -Eck halbiert dessen Fläche. Wie verhält es sich beim exzentrischen Windrädchen, bei dem von einem inneren Punkt Z im regelmässigen n -Eck einerseits die Lote zu den Seiten und andererseits die Verbindungsstrecken zu den Ecken gezogen werden?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), M.S. Klamkin (Alberta, Canada), Joachim Klose (Bonn, D), Jörg Kreienbühl / Teo Megliola (Wetzikon, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Andreas Müller (Altendorf, CH), Stanley Rabinowitz (Westford, USA), Bernhard Ruh (Solothurn, CH), Roland Stärk (Schaffhausen, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH). Die meisten der eingegangenen Lösungen zeigen mit der Tatsache, dass im Komplexen die Summe der n -ten Einheitswurzeln (oder die reelle Summe der entsprechenden trigonometrischen Ausdrücke) verschwindet, die Unabhängigkeit der Windrädchenfläche von der Lage des "Exzentrums" Z .

O.P. Lossers weist nach, dass die Windrädchenfläche eine quadratische Funktion der kartesischen Koordinaten von Z ist, und da das regelmässige n -Eck mehr als zwei verschiedene Symmetrieachsen hat, ist diese Funktion konstant.

Die beiden Gymnasiasten Jörg Kreienbühl und Teo Megliola geben für den Fall des gleichseitigen Dreieckes eine elementare Lösung, welche unter Verwendung orientierter Flächeninhalte auf den allgemeinen Fall übertragbar ist: Die Parallelen durch Z zu den Seiten des regelmässigen n -Eckes $A_1A_2 \dots A_n$ zerlegen dieses in n Parallelogramme $A_iB_iZC_{i-1}$ mit B_i auf A_iA_{i+1} und C_{i-1} auf $A_{i-1}A_i$ sowie n Dreiecke ZB_iC_i . Als Folge der Gleichwinkligkeit des regelmässigen n -Eckes hat das Dreieck ZB_iC_i gleiche Winkel bei B_i und C_i , ist also gleichschenkelig. Die Summe der orientierten Flächeninhalte dieser Parallelogramme und gleichschenkligen Dreiecke ist der Flächeninhalt des regelmässigen n -Eckes. Da nun die Diagonale ZA_i die Parallelogrammfläche $A_iB_iZC_{i-1}$ und das Lot von Z auf A_iA_{i+1} die Dreiecksfläche ZB_iC_i halbiert, ist die Windrädchenfläche die Hälfte der Fläche des regelmässigen n -Eckes. Diese Überlegung verwendet lediglich die Gleichwinkligkeit des regelmässigen n -Eckes; daher gilt, wie Roland Stärk bemerkt, die Windrädcheneigenschaft bereits für ein n -Eck mit gleichen Winkeln.

Aufgabe 1080 (Die einfache dritte Aufgabe). Wendeltreppe im quadratischen Treppenhaus. Nicht selten begegnet man Treppen, deren Stufenkanten sich regelmässig längs einer Schraubenfläche hochwinden. Befindet sich eine solche Wendeltreppe in einem Treppenhaus mit quadratischem Grundriss und sind die Stufen bis an die Mauer des Treppenhauses hinaus verlängert, so erhält die äussere Treppenwange und der zu ihr parallele Handlauf eine elegant geschwungene Form. Von welcher Gestalt ist sie?

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Andreas Müller (Altendorf, CH) ist der einzige Einsender einer Lösung. Wir drucken sie hier vollständig ab:

Lösung. Wir stellen uns auf der Mauer die (vertikale) Mittellinie als z -Achse vor und messen das Azimut α der Treppenstufen als Abweichung vom Lot von der Achse des Treppenhauses auf die Seitenmauer. In Einheiten der halben Seitenlänge des Treppenhausgrundrisses ist die Entfernung y des Schnittpunktes der Treppenstufe zum Azimut α mit der Mauer von unserer z -Achse gerade $\tan \alpha$. Auf einer Schraubenfläche hängt das Azimut linear von der Höhe ab, zum Beispiel $\alpha = mz$, also ist $y = \tan(mz)$.

Anmerkung. Es handelt sich bei dieser Aufgabe um eine räumliche Interpretation der in allen Lehrbüchern der Trigonometrie vorgeführten Konstruktion der Tangenskurve. Der Einheitskreis wird dabei als Grundriss der Wendeltreppe aufgefasst, die Tangenskurve als Seitenriss.

