

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1993)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1993 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1072: Die unendliche reelle Zahlenfolge $\{a_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist folgendermassen definiert:

$$a_1 \neq 0 \quad \text{und} \quad a_{k+1} = a_k + \frac{a_k}{(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k})(k+1)}.$$

Man bestimme ihren Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

László Zsilinszky, Nitra, Slowakei

Aufgabe 1073: Unter einem perfekten Quader versteht man einen Quader mit ganzzahligen Seiten, ganzzahligen Flächendiagonalen und ganzzahliger Raumdiagonale. Man zeige: Es existiert kein perfekter Quader mit einer Kante $k = 30$.

Horst Bergmann, Hamburg, D

Aufgabe 1074 (Die einfache dritte Aufgabe): Aus den zwei ersten Potenzgesetzen leitet man in der Schule zwei entsprechende Logarithmengesetze her. Muss das dritte Potenzgesetz ohne Partner sein?

$$\begin{array}{ll} a^n \cdot a^m = a^{m+n} & \log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \\ (a^n)^m = a^{n \cdot m} & \log_a(u^m) = m \cdot \log_a(u) \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & ??? \end{array}$$

Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen

Aufgabe 1062. (Kurzfassung) Ein rotationssymmetrischer, zylinderförmiger Salami, dessen Achse parallel zur z -Achse eines kartesischen xyz -Koordinatensystems liegt, wird schief abgeschnitten: Die drittprojizierende Schnittebene bilde mit der Zylinderachse

einen Winkel von 45° . Die Normalprojektion der Schnittkurve auf die xz -Koordinatenebene ist also eine gerade Strecke. Schneidet man nun die Haut des Salamis auf und wickelt sie ab, so wird aus der Schnittkurve eine reine Sinuskurve. Zeichnet man andererseits auf einem Zylinder eine Schraubenlinie mit der Steigung 45° auf, so präsentiert sich deren Projektion auf die xz -Koordinatenebene als reine Sinuskurve, während ihre Abwicklung zu einer geraden Strecke wird. Ist diese Art von Dualität auf das Zusammenspiel von Zylinder, Sinuskurve und gerader Strecke beschränkt, also ein reiner Zufall, oder tritt das Phänomen auch bei einer anderen Konfiguration mit einem Körper und zwei Kurven auf?

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es ist nur eine einzige Lösung eingereicht worden und zwar von Walter Senn (Bern, CH). Hier seine Originalversion:

Das Phänomen lässt sich etwas allgemeiner und in einer anderen Reihenfolge auch so beschreiben:

Eine ebene Kurve wird auf eine Zylinderfläche aufgewickelt, normalprojiziert und an einer bestimmten Geraden (mit Steigung 1) gespiegelt. (Das Spiegeln darf nicht unterschlagen werden!) Die so entstehende Kurve wird auf dieselbe Weise nochmals aufgewickelt, projiziert und gespiegelt. Es sind ebene Kurven anzugeben, die durch dieses zweimalige Verfahren in sich selbst abgebildet werden.

Für eine vorgegebene Zylinderfläche gibt es unendlich viele solche Kurven. Die Spiegelgerade ist dadurch ausgezeichnet, dass sie bezüglich jeder Zylinderfläche in sich übergeführt wird.

Eine Zylinderfläche $\text{im}(\alpha) \times \mathbb{R}$ ist durch ihre Leitkurve $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestimmt, $\text{im}(\alpha)$ das Bild von α . Es sei $L > 0$ so, dass sich das Stück $\text{im}(\alpha|_{[0,L]}) \times \mathbb{R}$ der Zylinderfläche injektiv auf $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ projiziert, $\text{im}(\alpha|_{[0,L]}) \times \mathbb{R}$ also vollständig auf der "Vorderseite" der Zylinderfläche liegt. Die Leitkurve $\alpha|_{[0,L]}(s) = (u(s), v(s))$ sei C^1 , nach Bogenlänge parametrisiert und $u : [0, L] \rightarrow [0, L]$.

Bei den aufzuwickelnden Kurven beschränken wir uns auf Kurvenstücke, die als Graph $\text{graph}(f)$ einer stetigen Funktion $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ darstellbar sind. Der Streifen $[0, L] \times \mathbb{R} \supset \text{graph}(f)$ wird zusammen mit $\text{graph}(f)$ isometrisch auf die Zylinderfläche $\text{im}(\alpha|_{[0,L]}) \times \mathbb{R}$ aufgewickelt und normal auf die (x, z) -Ebene $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ projiziert. $\text{graph}(f) = \{(s, f(s)) : 0 \leq s \leq L\}$ wird dabei auf die Menge $\{(u(s), f(s)) : 0 \leq s \leq L\} = \text{graph}(f \circ u^{-1})$ in der (x, z) -Ebene abgebildet. Hier benützt man, dass die Leitkurve $\alpha|_{[0,L]}$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist! Spiegelung an der Hauptdiagonalen $x = z$ der (x, z) -Ebene liefert das Kurvenstück $\{(f(s), u(s)) : 0 \leq s \leq L\}$. Für $f(s) = \sin s$ und den Kreiszyylinder $\alpha(s) = (\sin s, \cos s)$ mit $L = \pi$ ergibt sich die Strecke $\{(\sin s, \sin s) : 0 \leq s \leq \pi\}$.

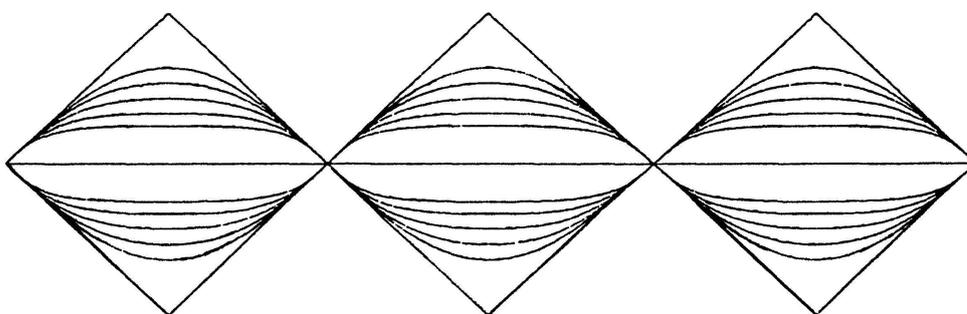
Wird nun die (x, z) -Ebene mit dem so entstandenen Kurvenstück nochmals auf die Zylinderfläche aufgewickelt, normalprojiziert und gespiegelt, erhält man die Menge $\{(u(s), u \circ f(s)) : 0 \leq f(s) \leq L\} = \text{graph}(u \circ f \circ u^{-1}|_D)$, D eine geeignete Teilmenge von $[0, L]$. Für obiges Beispiel liefert dieses zweimalige Verfahren die Menge $\{(t, \sin t) : 0 \leq t (= \sin s) \leq 1\}$, also ein Stück der ursprünglichen Kurve.

Insgesamt führt das Verfahren $\text{graph}(f)$ in $\text{graph}(u \circ f \circ u^{-1}|_D)$ über. Da $\text{graph}(u \circ f \circ u^{-1}|_D) \subseteq \text{graph}(f)$ gefordert ist, sind Funktionen f gesucht mit $u \circ f \circ u^{-1}|_D = f|_D$. Etwas allgemeiner formuliert:

Auf der Menge H aller stetigen Funktionen von \mathbb{R} in sich wird durch die Operatoren $f \circ g := f|_{\text{im}(g)} \circ g$ ($f, g \in H$) eine Halbgruppen-Struktur definiert. Für ein gegebenes $u \in H$ ist der Zentralisator $C_u := \{f \in H : u \circ f = f \circ u\}$ von u zu bestimmen.

C_u enthält sicher die von u erzeugte Unter-Halbgruppe, also das neutrale Element $\text{id}|_{\mathbb{R}}$ und die Iterierten $u^n := u \circ \dots \circ u$ von u , $n \in \mathbb{N}$. Es können aber auch Iterationswurzeln $u^{\frac{1}{n}}$ mit $(u^{\frac{1}{n}})^n = u$ in C_u liegen.

Für das Beispiel des Kreiszyinders mit $u(s) = \sin s$ enthält C_u die Iterierten \sin^n , Iterationswurzeln $\sin^{\frac{1}{n}}$ sowie deren Grenzfunktionen für $n \rightarrow \infty$ (siehe Figur). Man



beachte, dass für festes n überabzählbar viele n -te Iterationswurzeln von \sin existieren! Aufgrund der Antisymmetrie von \sin liegt zudem mit f auch $-f$ in C_u .

Aufgabe 1063. Zur Wahrscheinlichkeit lösbarer quadratischer Gleichungen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine quadratische Gleichung (in der Form $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$) zwei verschiedene reelle Lösungen?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Die Frage lässt mehrere Antworten zu, könnte also unter die Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezählt werden. Die Antwort hängt ab von der Parametrisierung und von der Wahl eines Wahrscheinlichkeitsmasses. Es sind insgesamt 10 Lösungsvorschläge mit unterschiedlichen Voraussetzungen über die Parametrisierung eingegangen: Hans Berchtold/Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodorsdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), P. Nüesch (Lausanne, CH), Werner Raffke (Vechta, D), Hans Rudolf Schneebeli (Wettingen, CH), Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Vorgabe $a \neq 0$ legt die Parametrisierung $a = 1, b, c$ nahe. Diese Variante hat den Nachteil, dass (b, c) über \mathbb{R}^2 variiert. Es tritt ein Gebiet auf, das nur dann ein endliches Gesamtmass besitzt, wenn eine nicht-konstante Wahrscheinlichkeitsdichte eingeführt wird. Solche Dichten gibt es aber viele. Jede Wahl kann eine andere Antwort erzeugen. Eine Alternative besteht darin, von einer konstanten Dichte auszugehen, die in einem kompakten Teilbereich der Ebene zu betrachten ist, und anschliessend einen

Grenzübergang vorzunehmen. Diese Lösung wurde von W. Raffke, Hj. Stocker und M. Vowe vorgeschlagen. Dabei gibt es Varianten, nach welchen die Wahrscheinlichkeit für unlösbare Gleichungen gleich Null wird, eine Antwort, welche unserer (endlichen) Erfahrung nicht zu entsprechen scheint.

H.R. Schneebeli geht von einer Parametrisierung mit kompaktem Parameterbereich und konstanter Wahrscheinlichkeitsdichte aus. Der Fall $a = 0$ wird nicht ausgeschlossen, da er ohnehin nur eine Menge vom Mass 0 betrifft. Ein Tripel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ wird als ein Punkt der projektiven Ebene in homogenen Koordinaten aufgefasst. Für die nachfolgende Berechnung werden als Repräsentanten die Punkte auf der Einheitskugel mit $a \geq 0$ und auf ihr die eindeutig definierte konstante Wahrscheinlichkeitsdichte gewählt. Die Gleichung $b^2 = 4ac$ legt einen Kegelschnitt in der projektiven Ebene fest. Dieser Kegelschnitt ist Leitkurve einer Fläche 2. Ordnung, welche die Kugel in zwei disjunkte Gebiete zerlegt. Für $b^2 \geq 4ac$ erhält man das "günstige" Gebiet, dessen Flächeninhalt berechnet wird. Für die eigentliche Rechnung werden Kugelkoordinaten verwendet. Die Hauptarbeit ist die Berechnung von

$$F = \int_0^\pi \left(1 - \cos \left(\arctan \left(4 \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \right) \right) \right) d\phi = \pi - \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \frac{\sin^2 \phi}{\cos^4 \phi}}} d\phi$$

Numerische Integration und Normieren mit dem Inhalt der Halbkugel ergibt die Antwort: Mit Wahrscheinlichkeit 0.648511... ist die quadratische Gleichung lösbar.

H. Berchtold, H. Egli, W. Janous, J. Klose, Hj. Stocker und R. Wyss betrachten im Würfel $|a| \leq t, |b| \leq t, |c| \leq t, (t > 0)$ je eine uniforme Verteilung der unabhängigen Variablen a, b, c . Dann lässt sich dort geometrisch die Wahrscheinlichkeit

$$P\{b^2 - 4ac \geq 0\} = \frac{1}{(2t)^3} \iiint_{b^2 - 4ac \geq 0} da db dc = \frac{41 + 3 \log 4}{72} \approx 0.6272\dots$$

unabhängig von t berechnen. Ein Resultat, das auch die Computer-Simulation bestätigt.

P. Nüesch weist darauf hin, dass sich die Aufgabe in mehreren Textbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet, z.B. in S. Ross "A first course in probability", MacMillan 3rd edition, p. 230, pr. 17b).

Aufgabe 1064. Eine einfache Frage zum Schwerpunkt eines Dreiecks. Es ist bekannt, wo der Schwerpunkt von drei Massenpunkten und wo der Schwerpunkt eines Dreiecks aus Blech liegt. Aber wo liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks, dessen Seiten aus Draht gefertigt sind?

Peter Gallin, Bauma, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind neun Lösungen eingetroffen: G. Bercea (München, D), Andreas Müller (Leimen, D), Georg Schierscher (Schaan, FL) und Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH) begründen ihre Antwort mit physikalischen und elementargeometrischen Überlegungen, die rasch auf das Ergebnis führen und unten abgedruckt sind. Ivan Paasche (Stockdorf/Obbay, D) gibt neben der Lösung noch eine erwähnenswerte Zusammenstellung von interessanten Punkten im Dreieck. Walther Janous (Innsbruck, A) benützt die Integralrechnung und Roland Wyss (Flumenthal, CH)

ein physikalisches Argument, um den Ortsvektor des fraglichen Schwerpunktes zu berechnen. O.P. Lossers (Eindhoven, NL) liefert eine n -dimensionale Verallgemeinerung, die unten in einer freien Übersetzung aus dem Englischen wiedergegeben wird. Michael Vowe (Therwil, CH) gibt – wie viele andere auch – Literaturangaben zum Thema.

Physikalische und elementargeometrische Argumente. Wenn die Seiten a, b und c des Dreiecks ABC mit einer konstanten Massendichte belegt sind, kann man sich die Masse jeder Seite in deren Mittelpunkt konzentriert vorstellen. Der gesuchte Schwerpunkt K ist also der Schwerpunkt der drei Seitenmitten M_a, M_b und M_c , je gewichtet mit den Seitenlängen a, b und c . Da die Winkelhalbierenden im Dreieck $M_a M_b M_c$ die Gegenseiten im Verhältnis der anliegenden Seiten teilen, sind sie gerade die Schwerlinien der drei mit a, b und c gewichteten Massenpunkte M_a, M_b und M_c . Somit ist der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $M_a M_b M_c$ der gesuchte Umfangschwerpunkt K des Dreiecks ABC .

Verallgemeinerung von O.P. Lossers. Es sei R ein Simplex in \mathbb{R}^n . Seine Seitenschwerpunkte, in denen man sich die Massen der Hyperseiten von R konzentriert denkt, bilden die Ecken eines anderen Simplex T , das zu R ähnlich ist. Es sei K der Inkugelmittelpunkt von T . Wenn wir zeigen können, dass der Ortsvektor von K die Summe der Ortsvektoren der Ecken von T gewichtet mit dem $(n-1)$ -Volumen der je gegenüberliegenden Hyperseiten von T ist, dann haben wir bewiesen, dass K der Schwerpunkt der $(n-1)$ -dimensionalen Hyperoberfläche von R ist.

Es sei $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n+1}\}$ eine Menge von Einheitsvektoren in \mathbb{R}^n , derart dass jedes n -Tupel von ihnen den ganzen Raum aufspannt. Es bezeichne $(\underline{x}, \underline{y})$ das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n . Damit lassen sich die $n+1$ Hyperebenen $(\underline{a}_k, \underline{x}) = 1, k = 1, 2, \dots, n+1$, beschreiben, die je senkrecht zu \underline{a}_k stehen und die Hyperseiten des Simplex T festlegen. Die Einheitskugel mit Zentrum $\underline{0}$ ist eine der Berührungskugeln von T . Die Ecken \underline{b}_i von T sind durch die Gleichungen

$$(\underline{a}_k, \underline{b}_i) = 1, \quad k \neq i$$

gegeben und der Wert von $(\underline{a}_i - \underline{b}_i, \underline{a}_i) = h_i$ ist die Höhe von T bezüglich der Hyperseite $(\underline{a}_i, \underline{x}) = 1, i = 1, 2, \dots, n+1$. Wegen $(\underline{a}_i, \underline{a}_i) = 1$ gilt somit

$$(\underline{b}_i, \underline{a}_i) = 1 - h_i .$$

Das “ $(n-1)$ -Volumen” der Hyperseite $(\underline{a}_i, \underline{x}) = 1$ bezeichnen wir mit F_i und es sei $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F$ das gesamte “Oberflächenvolumen” von T .

Wenn die Einheitskugel dem Simplex T *einbeschrieben* ist, dann ist das n -Volumen V von T gleich der Summe der $n+1$ n -Volumina der konvexen Hülle von $\{\underline{0}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{n+1}\} \setminus \{\underline{b}_k\}, k = 1, 2, \dots, n+1$. Daher gilt mit einer dimensionsabhängigen Konstanten c für alle i

$$c \cdot V = F_i \cdot h_i = \sum_{k=1}^{n+1} F_k \cdot 1 = F .$$

- a) Bildet man das Dreieck ABC , den Umkreis und das Umkreiszentrum U mit der Streckung Γ ab, so erhält man das Mitteldreieck, dessen Umkreis der Feuerbachkreis mit Zentrum F ist. (Der Feuerbachkreis berührt alle Ankreise und den Inkreis.) Wendet man dagegen Γ^{-1} auf U an, so erhält man den Höhenschnittpunkt H . Die vier harmonischen Punkte U, S, F, H liegen auf der **Eulerstrecke**.
- b) Bildet man das Dreieck ABC , den Inkreis und das Inkreiszentrum I mit der Streckung Γ ab, so erhält man das Mitteldreieck, dessen Inkreis der Spiekerkreis mit Zentrum K ist. (Der Spiekerpunkt K ist der Umfangschwerpunkt des Dreiecks ABC .) Wendet man dagegen Γ^{-1} auf I an, so erhält man den Nagelpunkt N . Die vier harmonischen Punkte I, S, K, N liegen auf der **Nagel-Longhurst-Strecke**.

Versteht man unter einem "Halbwegmarkenzeiger" die Verbindungsstrecke einer Dreiecksecke mit dem Berührungspunkt des gegenüberliegenden Ankreises, so lässt sich zeigen, dass der Nagelpunkt N der Schnittpunkt der drei Halbwegmarkenzeiger des Dreiecks ABC ist. Das bedeutet, dass N Cevapunkt (Schwerpunkt) zu den Gewichten $s - a, s - b$ resp. $s - c$ in den Massenpunkten A, B resp. C ist. Dabei ist s der halbe Umfang des Dreiecks ABC .

Zusammenstellung der Literaturangaben in den eingesandten Lösungen

- [1] Th. Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Potsdam 1894 (p. 180–181)
- [2] Naas/Schmid, Mathematisches Wörterbuch, Band II, Berlin/Stuttgart 1965 (p. 775)
- [3] G. Paskalev/J. Tschobanov, Merkwürdige Punkte des Dreiecks (bulg.), Sofia 1985 (p. 95f)
- [4] R.A. Johnson, Modern Geometry, Houghton-Mifflin Co., 1929 (Theorem 412)
- [5] American Mathematical Monthly, Vol. 97 (Nov. 1990) p. 849–850, problem E 3283
- [6] Archimedes **15** (1963), p. 22 Aufgabe 768 (Hofmann/Paasche)
- [7] Archimedes **23** (1971), p. 46–47, (Rolf Rose)
- [8] Praxis der Mathematik **4** (1962), p. 135, Problem P 108