

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **48 (1993)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1993 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

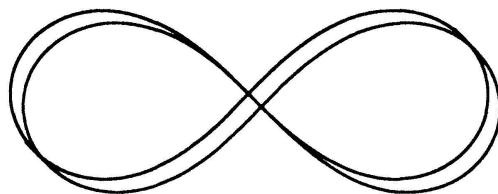
Aufgabe 1069: Es seien A_1, A_2, \dots, A_n die Ecken eines regulären n -Ecks mit Umkreisradius 1, und P sei ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis. Man beweise die Ungleichung

$$3 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) - 1 \leq \frac{1}{8} \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{2n} \right) \cdot \sum_{j=1}^n |PA_j|^3 \leq 2 \cdot \cos^3 \left(\frac{\pi}{2n} \right),$$

wobei links (bzw. rechts) Gleichheit genau dann eintritt, wenn P den Bogen zwischen A_j und A_{j+1} halbiert (bzw. gleich einem der A_j ist), und $j = 1, 2, \dots, n$ mit der Zusatzkonvention $A_{n+1} := A_1$.

Peter Bundschuh, Köln, D

Aufgabe 1070: Ein Freund bringt mir einen achterförmigen Papierstreifen, gefertigt aus einem um 360° verdrehten geschlossenen Band mit Einschnitten an gegenüberliegenden Stellen, so dass die Ränder zwei in parallelen Ebenen liegende Kurven sind.



Die Randkurven sehen der Bernoullischen Lemniskate sehr ähnlich. Man bestimme den Unterschied zwischen Lemniskate und der elastischen Achterschleife praktisch und prinzipiell.

Georg Unger, Dornach, CH

Aufgabe 1071 (Die einfache dritte Aufgabe): Durch einen gegebenen Punkt P im Innern eines Winkels mit dem Scheitel S lege man eine den Schenkel a in A und den Schenkel b in B schneidende Gerade so, dass das Dreieck SAB minimalen Umfang erhält.

Hans Egli, Zürich, CH

Lösungen

Aufgabe 1060. (Kurzfassung) Eine vierflügelige Drehtüre mit Radius 1 und mit je einer Viertelkreisöffnung als Ein- resp. Ausgang drehe sich an der Peripherie mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 . Wie gross muss der Faktor $k < 1$ mindestens sein, damit man mit der konstanten Gehgeschwindigkeit $k \cdot v_0$ die sich unaufhaltsam drehende Türe auf einem optimalen Weg gefahrlos passieren kann.

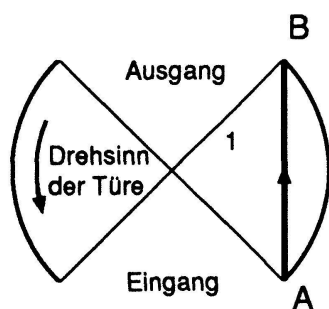
Ernst Specker (Zürich, CH)

Auswertung der eingesandten Lösungen

Es sind insgesamt fünf Lösungsvorschläge eingetroffen: François Sigrist (Neuchâtel, CH), Werner Raffke (Vechta, D), R. Müller und H.-J. Seiffert (Berlin, D), Georg Unger (Dornach, CH), Hans Egli (Zürich, CH). Alle Vorschläge bewegen sich im Umfeld der Lösung von François Sigrist. Deshalb soll diese hier zusammen mit redaktionellen Erläuterungen abgedruckt werden.

Lösung. François Sigrist diskutiert drei Lösungsideen:

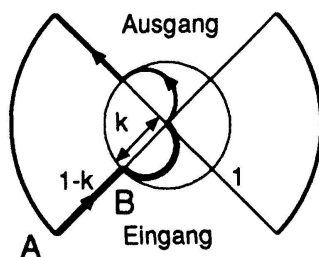
1. Idee



“La solution naïve”

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.45$$

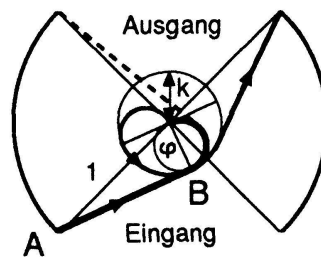
2. Idee



“La solution amusante”

$$k = \frac{2}{\pi + 2} \approx 0.38898$$

3. Idee



“La solution sophistiquée”

$$k \approx 0.3365$$

Der für die zweite und dritte Idee entscheidende Gedanke besteht darin, dass ein Wanderer auf dem zur Drehtüre konzentrischen Kreis mit Radius k beliebig lange mit der Geschwindigkeit $k \cdot v_0$ marschieren kann. Innerhalb des Kreises kann er sogar eine grössere Winkelgeschwindigkeit als die Drehtüre erreichen. Der Faktor k berechnet sich nun aus der Annahme, dass der Start des Wanderers im Punkt A stets dann erfolgt, wenn ein Türflügel soeben A passiert hat. Im Punkt B trifft dann der nächste Türflügel von hinten auf den Wanderer. Im einzelnen bedeutet dies

- bei der ersten Idee: Der Wanderer muss eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ marschieren, während die Peripherie der Drehtüre π zurücklegt. Daraus ergibt sich $k = \sqrt{2}/\pi$.
- bei der zweiten Idee: Das Wegverhältnis $(1 - k) : \pi/2$ muss gleich dem Geschwindigkeitsverhältnis $k : 1$ zwischen Wanderer und Türperipherie sein. Daraus ergibt sich der angegebene Wert von $k \approx 0.38898$.
- bei der dritten Idee: Die analoge Verhältnisgleichung lautet hier $\sin(\varphi) : (\pi/2 + \varphi) = k : 1$, wobei φ der Winkel zwischen den Drehtürradien durch A und B ist, welcher mit

k in der Beziehung $k = \cos(\varphi)$ steht. Daraus ergibt sich die transzendente Gleichung $\tan(\varphi) = \pi/2 + \varphi$, deren einzige sinnvolle Lösung auf $k \approx 0.3365$ führt. Das ist auch der minimale Wert, der vom Aufgabensteller angegeben wird.

Wenn der Wanderer ab Punkt B (bei der zweiten und dritten Idee) mit der Geschwindigkeit $k \cdot v_0$ auf einem zur Drehtüre konzentrischen Kreisbogen mit Radius k marschiert, wird er laufend von dem von hinten drängenden Türflügel berührt. Er muss deshalb dafür sorgen, im Inneren des Kreises mit Radius k so lange mit der Geschwindigkeit $k \cdot v_0$ zu marschieren, bis er den vorderen Türflügel eingeholt hat. Dann kann er sich wieder ins Äussere des Kreises mit Radius k wagen und die Drehtüre so verlassen, wie er sie betreten hat. Das ist bei der zweiten Idee durch die beiden eingezeichneten Halbkreisbogen mit Radius $k/2$ realisierbar. Es ist erstaunlich, dass der Wanderer während des ganzen Marsches auf dem ersten kleinen Kreisbogen genauso in Tuchfühlung mit dem von hinten drängenden Türflügel bleibt, wie wenn er auf einem zur Drehtüre konzentrischen Kreis mit Radius k marschieren würde. Beim zweiten kleinen Kreisbogen berührt er stets den vorderen Türflügel, bis er schliesslich radial den Ausgang betreten und im letzten Moment den Türbereich verlassen kann. Bei der dritten Idee wäre es verlockend, auf dem gestrichelt eingezeichneten Weg einen Fluchtversuch zu unternehmen. Das ist aber wegen der Länge des Weges nicht möglich. Somit muss der Wanderer auf irgend eine Weise eine Ehrenrunde in der Drehtüre absolvieren, bis er den vorderen Flügel berührt und sich zugleich auf dem Kreis mit Radius k befindet. Erst dann kann er tangential zu diesem Kreis der Drehtüre entkommen. Eine mögliche Variante ist eingezeichnet: Nach einem ersten kleinen Halbkreis hat er im Zentrum der Drehtüre den vorderen Flügel erreicht; ein zweiter kleiner Halbkreis bringt ihn unter ständiger Berührung mit dem vorderen Türflügel auf die Peripherie des Kreises mit Radius k , auf dem er nun so lange weitergeht, bis der Zeitpunkt zum tangentialen Verlassen des Türbereichs gekommen ist. Durch eine bessere Wahl des Startpunkts A könnte der Wanderer nun seinen Weg noch stark verkürzen, ohne dass sich am Faktor k etwas ändert: Dreht man die Punkte A und B um das Zentrum der Türe mit einem Winkel $+\pi/2$ verkürzt sich der Weg auf dem Kreis mit Radius k von $k \cdot (3\pi/2 - 2\varphi)$ auf $k \cdot (\pi - 2\varphi)$.

Aufgabe 1061. (Kurzfassung) Bei einem geplatzten Plastiksiegel einer Mineralwasserflasche sind drei 120° -Bogen mit ihren Enden regelmässig an einem Kreis befestigt. Wie weit kann man sie simultan gegen innen eindrehen, bis sie sich gegenseitig den Weg versperren?

Peter Gallin (Bauma, CH)

Auswertung der eingesandten Lösungen

Die Aufgabe hat ein lebhaftes Echo ausgelöst und zu sehr verschiedenartigen Lösungsideen angeregt. Sie lassen sich grob in drei Kategorien gliedern:

- Planimetrische Vorbereitung gefolgt von Trigonometrie: Hans Egli (Zürich, CH), Oliver Knill (ETH Zürich, CH), Hansjürg Stocker (Wädenswil, CH), Georg Unger (Dornach, CH)
- Komplexe Zahlen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Paul Streckeisen (Zürich, CH)

- Planimetrie, Trigonometrie und analytische Geometrie: G. Bercea (München, D), Werner Raffke (Vechta, D), François Sigrist (Neuchâtel, CH), D. Koller (Zürich, CH)

Die elegante Lösung. Mit wenig konstruktivem Aufwand (Figur 1) schafft Werner Raffke eine sehr übersichtliche Ausgangslage, die eine analytische Behandlung nahelegt: Man betrachte den Punkt R , in welchem sich zwei eingedrehte Plastikbogen berühren. Durch Zurückdrehen des Bogens AR in seine Ausgangslage ergibt sich das Urbild S auf dem Kreis k des Siegels. Nun sind die Dreiecke ARC und SRA ähnlich und gleichschenkelig. Damit liegt RS parallel zu CA und die Mittelsenkrechte von RS verläuft durch A . Sie wird als y -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit CA als x -Achse gewählt. Um die Koordinaten des unbekannten Punktes R zu bestimmen, muss man nur noch zwei bekannte Kreise miteinander schneiden: den Kreis h mit Zentrum C und Radius CA und den Kreis k' , der symmetrisch zu k bezüglich der y -Achse liegt. Mit $|CA| = 1$ erhält man so:

$$R \left(-\frac{1}{14} \mid \frac{3\sqrt{3}}{14} \right).$$

Daraus folgt

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}}{14} \right) = 2 \cdot \arctan \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \approx 21.79^\circ.$$

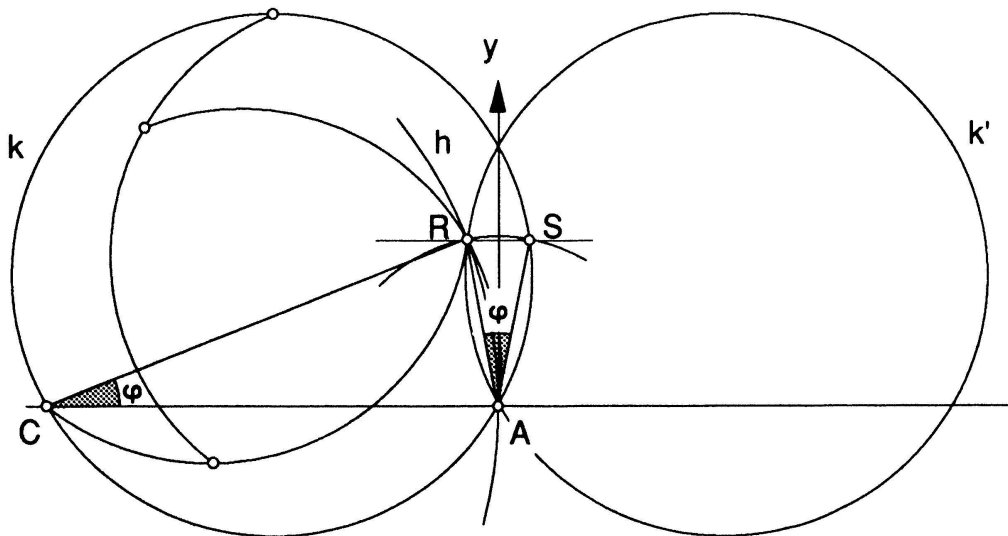


Fig. 1

Die rein planimetrische Lösung. Auf Anregung von Georg Unger, der die überraschenden Zusammenhänge der Titelfigur dieses Heftes experimentell gefunden und rechnerisch bestätigt hat, soll hier ein rein planimetrischer Beweis dieser Tatsachen gegeben werden.

Bezeichnungen (Figur 2): A, B, C sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Umkreis den gegebenen Plastikring mit Radius 1 und Zentrum M darstellen soll. Die

Bogenstücke von A bis B , B bis C resp. C bis A heissen a, b resp. c und werden in die Positionen a', b' resp. c' um A, B resp. C mit dem Winkel φ eingedreht. Dabei werden die freien Enden B, C resp. A der Bögen in die Punkte P, Q resp. R überführt. Die bezüglich M symmetrischen Punkte von A, B resp. C bezeichnen wir mit A', B' resp. C' . Die Zentren der Bögen a', b' resp. c' heissen X, Y resp. Z .

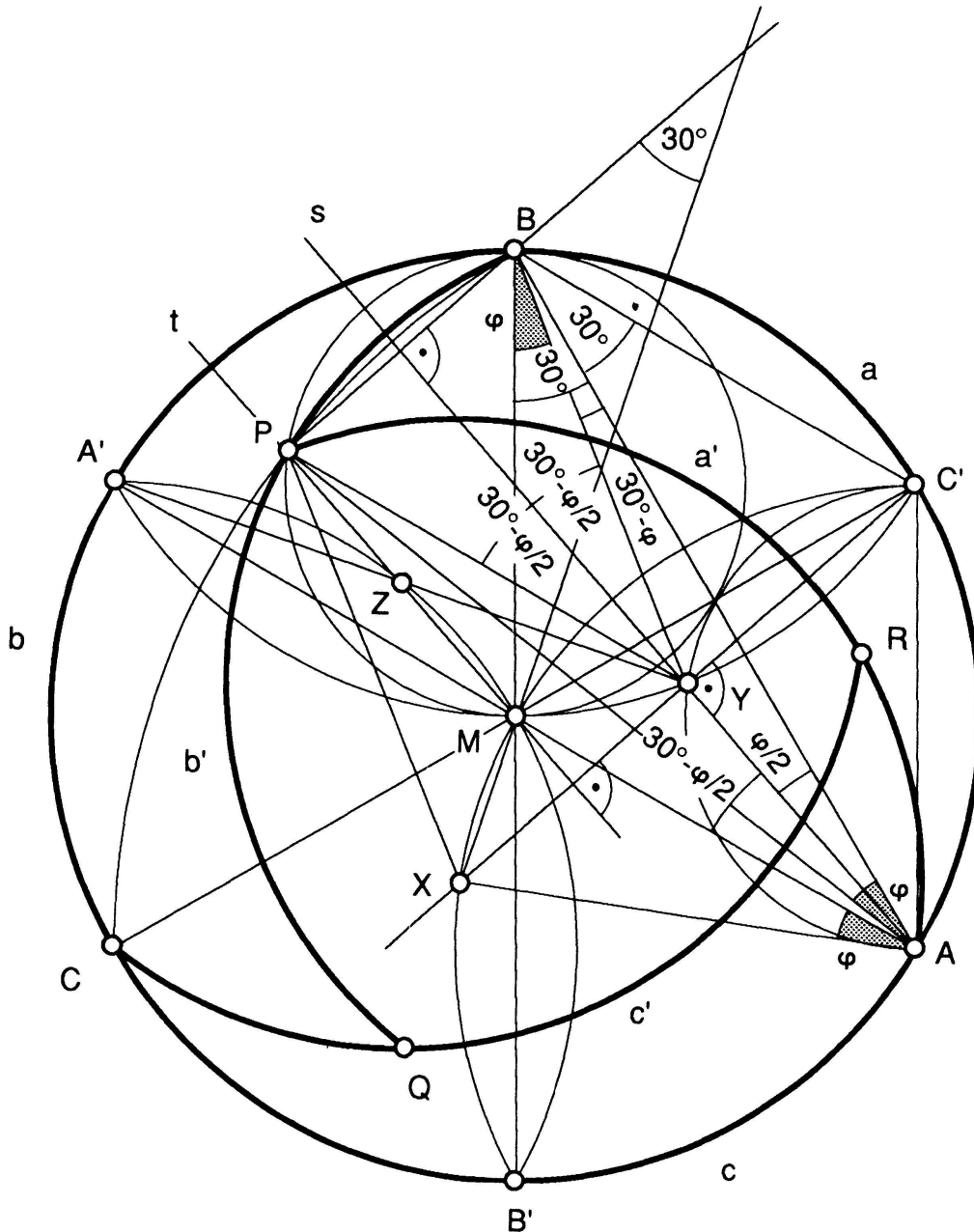


Fig. 2

Ausgangslage:

- (1) Aus Symmetriegründen ist $\triangle XYZ$ gleichseitig mit Zentrum M .
- (2) $\angle(YBM) = \angle(XAM) = \angle(PAB) = \varphi$.
- (3) Eine Drehstreckung mit Zentrum A und Drehwinkel 30° führt $\triangle ABP$ in $\triangle AMX$ über.
- (4) Da X resp. Y Zentren der Bögen a' resp. b' sind, gilt $1 = \overline{XP} = \overline{XA} = \overline{YP} = \overline{YB} = \overline{AC'} = \overline{C'B} = \overline{A'M}$.

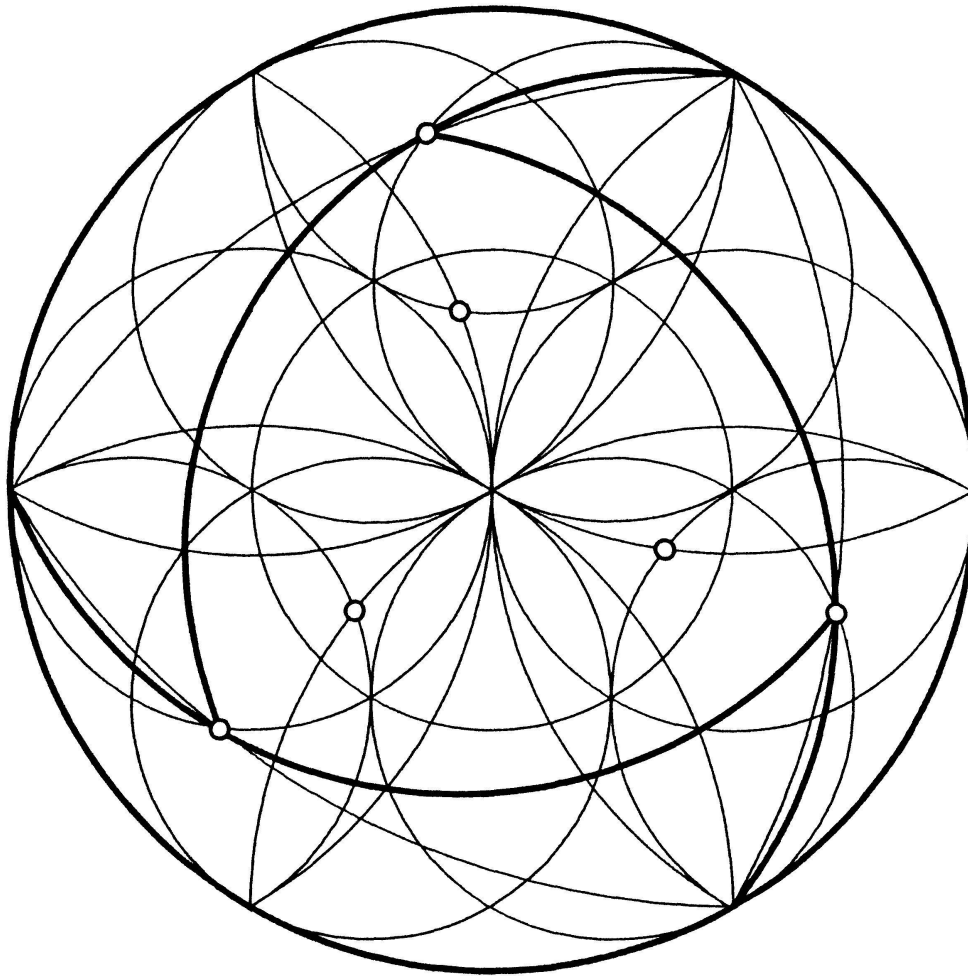


Fig. 3

(5) Die Sehnen der kongruenten Bögen a und a' sind gleich lang: $\overline{AB} = \overline{AP} = \sqrt{3}$.

Folgerungen:

Aus (4): P liegt auf der Symmetrieachse t von X und Y .

Aus (1) : M und Z liegen auf der Symmetrieachse t von X und Y .

(6) Also sind M, Z und P kollinear.

Aus (4): Y liegt auf der Symmetrieachse s von B und P .

Aus (5): A liegt auf der Symmetrieachse s von B und P .

Aus (3): Die Geraden XM und PB scheiden sich unter 30° . Also schneiden sich XM und das Lot s zu PB unter 60° , was auch für den Schnittwinkel von XM mit t gilt. Also sind t und s parallel und BP steht senkrecht zu t . Durch zyklische Vertauschung folgt der

Satz I: P, Q resp. R liegen auf den Thaleskreisen über $\overline{MB}, \overline{MC}$ resp. \overline{MA} .

Da die Dreiecke APX und ABC' wegen (4) und (5) kongruent sind, liegen auch die Punkte C' und X symmetrisch bezüglich s . Da ausserdem XY senkrecht zu s steht, sind XYC' kollinear, woraus durch zyklische Vertauschung folgt:

(7) Y, Z und A' sind kollinear.

Halten wir also fest:

Satz II: Y, Z resp. X liegen auf den Thaleskreisen über $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$ resp. $\overline{CB'}$, und XYC' , YZA' und ZXB' sind kollinear.

Aus (2) und den in Figur 2 eingetragenen Winkelmassen folgt, dass AA' und YP parallel sind. Wegen (4) sind YA' und MP Diagonalen des Parallelogramms $A'MYP$ und es gilt wegen (6) und (7) der

Satz III: Z, X resp. Y halbieren die Strecken MP, MQ resp. MR . Das heisst: "Die Zentren der eingedrehten Kreisbögen halbieren die Radien der Sperrpunkte" (Georg Unger).

Aus den Sätzen I und II folgt unmittelbar die Konstruktion von Georg Unger (Figur 3), die mit dem Zirkel allein aufgebaut wird: Zuerst zeichnet man mit sieben Kreisen vom Radius $1/2$ das kanonische 6-Eck-Muster. Drei Thaleskreise aus Satz II mit Radius $1/2$ werden eingetragen. Nun folgen sieben Kreise mit dem Radius 1, die ihrerseits das kanonische 6-Eck-Muster in doppelter Grösse bilden. Drei Kreise mit Radius $\sqrt{3}$ vervollständigen den Raster, in welchem die Zentren und Sperrpunkte eingetragen werden können. Zum Schluss zeichnet man die eingedrehten Bögen mit Radius 1.

Die allgemeinen Berechnungen. Nach einer Idee von Jany C. Binz wird die Sehne der Bögen nicht auf $\sqrt{3}$ festgesetzt, sondern offen gelassen. Daher bezeichnen wir den Winkel ABM mit α . Dann ist die Länge der Sehne eines Bogens $\overline{AB} = 2 \cdot \cos \alpha$. Auch in diesem verallgemeinerten Fall kann nun die Berechnung nach der Idee von Hans Egli durchgeführt werden: $\overline{YB} = \overline{YP} = 1$ und $\overline{AB} = \overline{AP} = 2 \cdot \cos \alpha$ sowie (2) führen auf $\angle(BAY) = \varphi/2$ und $\angle(ABY) = \alpha - \varphi$. Daraus ergibt sich $\angle(BYs) = \alpha - \varphi/2$. Der Sinussatz im $\triangle AYB$ liefert:

$$2 \cdot \cos \alpha : 1 = \sin(\alpha - \varphi/2) : \sin(\varphi/2) = \sin \alpha \cdot \cot(\varphi/2) - \cos \alpha.$$

Daraus ergibt sich

$$\tan(\varphi/2) = \frac{\tan \alpha}{3}.$$

Für $\alpha = 30^\circ$ (Originalaufgabe): $\varphi = \arccos(13/14) = 21.786789\dots^\circ$

Für $\alpha = 45^\circ$ (4 gleiche Bogenstücke): $\varphi = \arccos(4/5) = 36.869898\dots^\circ$

Für $\alpha = 54^\circ$ (5 gleiche Bogenstücke): $\varphi = \arccos((101 - 9\sqrt{5})/124) = 49.290744\dots^\circ$

Für $\alpha = 60^\circ$ (6 gleiche Bogenstücke): $\varphi = \arccos(1/2) = 60^\circ$

(Exakte Terme nach Hansjürg Stocker)

Bei mehr als sechs Bogenstücken verstellen sich zwei Nachbarn den Weg nicht mehr, und die verallgemeinerte Aufgabe verliert ihren Sinn.