

# Dreiecks-Proportionalschnittkreise, ihre Mittenhyperbel und ein Pendant zum Satz von Morley

Autor(en): **Stammler, Ludwig**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **47 (1992)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43921>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---



---

## Dreiecks-Proportionalschnittkreise, ihre Mittenhyperbel und ein Pendant zum Satz von Morley

---



---

Ludwig Stammer, Universität Halle

Ludwig Stammer wurde 1933 geboren. Nach seinem Mathematikstudium und nach einigen Jahren Lehrtätigkeit promovierte er 1965 bei O.-H. Keller an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. An dieser Universität ist er seit 1970 als Dozent tätig. Zur Förderung begabter Schüler übernimmt er regelmässig Arbeiten im Zusammenhang mit der Mathematik-Olympiade. Stammer ist Verfasser von mehreren Arbeiten zur algebraischen und vor allem zur konstruktiven Geometrie.

### 1 Definitionen und Ergebnisse

I. Als *Proportionalschnittkreis* eines Dreiecks  $ABC$  der euklidischen Ebene (mit nicht-kollinearen  $A, B, C$ ) sei jeder Kreis bezeichnet, der von den Trägergeraden  $g_{BC}, g_{CA}, g_{AB}$  der Dreiecksseiten  $BC, CA, AB$  Sehnen  $B'C', C'A', A'B'$  abschneidet, für deren Längen

$$|B'C'| : |C'A'| : |A'B'| = |BC| : |CA| : |AB|$$

gilt. Ist dabei der Proportionalitätsfaktor  $|B'C'| : |BC| = |C'A'| : |CA| = |A'B'| : |AB| = \mu$ , so werde der Kreis auch  $\mu$ -*Schnittkreis* genannt. (In dieser Fassung der Definition sei als Grenzfall auch  $\mu = 0$  zugelassen.) In den folgenden Abschnitten 2, 3 wird bewiesen:

Die In-, An- und Umkreise eines Dreiecks bilden ein reizvolles Kapitel der ebenen Geometrie, das auf recht elementarer Stufe zugänglich ist. Diese einfachen Konzepte etwas verallgemeinernd betrachtet Ludwig Stammer in seinem Beitrag sogenannte  $\mu$ -Kreise. Ein  $\mu$ -Kreis eines Dreiecks ist dadurch definiert, dass er aus den Trägergeraden der Dreiecksseiten Strecken herauschneidet, deren Längen das  $\mu$ -fache der Längen der entsprechenden Dreiecksseiten betragen. Für  $\mu = 0$  ergeben sich so der Inkreis und die Ankreise des Dreiecks. Für  $\mu = 1$  erhält man offenbar den Umkreis des Dreiecks, daneben aber noch drei weitere Kreise, die natürlich besonderes Interesse verdienen. Stammer beweist das überraschende Resultat, dass die Mittelpunkte dieser drei Kreise immer ein gleichschenkliges Dreieck bilden und — ebenso überraschend — dass dieses Dreieck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. *ust*

**Satz 1:** Für jedes Dreieck  $ABC$  und jedes reelle  $\mu \geq 0$  existieren  $\mu$ -Schnittkreise. Ihre Anzahl ist (mit einer von  $ABC$  abhängigen reellen Zahl  $m > 1$ ) in den Fällen  $\mu < m$ ,  $\mu = m$ ,  $\mu > m$  gleich 4 bzw. 3 bzw. 2.

Eine Motivation, solche Kreise zu betrachten, ergab sich z.B. in [3]–[6] aus der *Extremalaufgabe*, die Flächendifferenz zwischen Dreieck und Kreis (selbst oder im Mittel) zu minimieren. Ferner kann überhaupt zu einer ersten Einordnung des Sachverhalts bemerkt werden:

Seit geschichtlich langer Zeit bekannt sind die vier 0-Schnittkreise (der Inkreis und die Ankreise) sowie ein 1-Schnittkreis (der Umkreis). Außer diesem gibt es nach Satz 1 also — analog wie es außer dem Inkreis die drei Ankreise gibt — *drei weitere Kreise, die von den Trägergeraden der Dreiecksseiten zu diesen Seiten jeweils gleichlange Sehnen abschneiden* (Fig. 1). Allerdings gilt, wie in 5 gezeigt wird:

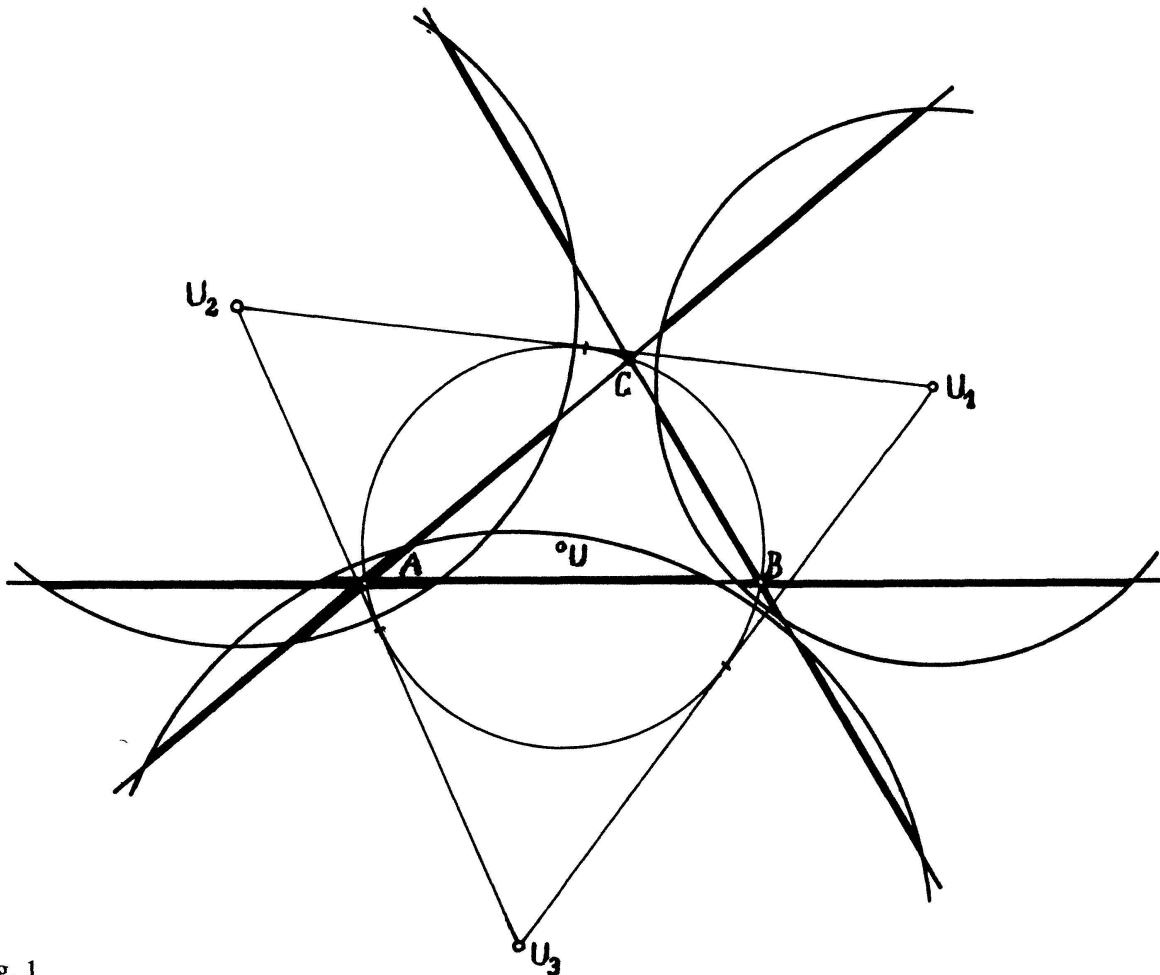


Fig. 1

**Korollar 1:** Die  $\mu$ -Schnittkreise sind (aus gegebenem Dreieck  $ABC$  und gegebenem Längenverhältnis  $\mu$ ) im allgemeinen nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar. Das gilt auch, wenn  $\mu$  mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist; insbesondere gilt für  $\mu = 1$ : Die drei vom Umkreis verschiedenen 1-Schnittkreise sind im allgemeinen nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar.

Daran mag es liegen, ähnlich wie seinerzeit bei dem bekannten merkwürdigen Satz von Morley (s. etwa die Darstellung in [2] und dort genannte Literatur), daß diese drei Kreise bisher kaum oder noch gar nicht — dies dürfte schwer mit Sicherheit nachweisbar sein — beachtet wurden. Dabei weist ihre Konfiguration die folgende Eigenschaft auf (Beweis in 6), die schon deshalb als recht bemerkenswert bezeichnet werden darf, weil sie ebenso wie der Satz von Morley (oder auch wie der “Satz von Napoleon” — dort allerdings mit Zirkel und Lineal konstruierbar —) zu jedem Dreieck ein gleichseitiges Dreieck aufdeckt:

**Satz 2:** Für jedes Dreieck  $ABC$  bilden stets die Mittelpunkte  $U_1, U_2, U_3$  der drei vom Umkreis verschiedenen 1-Schnittkreise ein gleichseitiges Dreieck, dessen Inkreis identisch ist mit dem Umkreis von  $ABC$ .

II. Über die Mittelpunkte der  $\mu$ -Schnittkreise beim Durchlaufen aller  $\mu \geq 0$  gilt der in Abschnitt 4 bewiesene

**Satz 3:** Für jedes nicht gleichschenklige Dreieck  $ABC$  ist die Menge  $\mathfrak{M}$  aller Mittelpunkte von Proportionalschnittkreisen enthalten in derjenigen Hyperbel  $\mathfrak{S}$ , die durch den Inkreismittelpunkt  $W$ , die Ankreismittelpunkte  $W_a, W_b, W_c$  und den Umkreismittelpunkt  $U$  geht.

Diese “Mittenshyperbel”  $\mathfrak{S}$  hat folglich ein (aus gegebenem Dreieck  $ABC$ ) mit Lineal und Zirkel konstruierbares Asymptotenpaar. Weitere Aussagen über  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{S}$  sind:

**Korollar 2:** Die Hyperbel  $\mathfrak{S}$  ist gleichseitig. Gilt für die Seitenlängen  $a = |BC|$ ,  $b = |CA|$ ,  $c = |AB|$  etwa  $a < b < c$ , so geht ein Ast von  $\mathfrak{S}$  durch  $W_a, W, U, W_c$ , der andere durch  $W_b$ . Die Menge  $\mathfrak{M}$  besteht aus genau den folgenden Teilbögen von  $\mathfrak{S}$ :

- (I) Der Bogen von  $W_c$  (über  $U$ ) bis  $W$ .
- (II) Der von  $W_a$  ins Unendliche reichende,  $W$  nicht enthaltende Bogen.
- (III) Der von  $W_b$  ins Unendliche reichende Bogen, der sich derselben Geraden asymptotisch annähert wie der in (II) genannte Bogen.

**Korollar 3:** Ist  $ABC$  gleichschenklige, etwa mit  $a = b$ , aber nicht gleichseitig, so entartet  $\mathfrak{S}$  zum Paar der Winkelhalbierenden durch  $C$ ; für  $a < c$  bzw.  $a > c$  besteht  $\mathfrak{M}$  bzw. der Abschluß von  $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{M}$  aus der Strecke  $W_c W$  und den Strahlen  $W_a C^-$ ,  $W_b C^-$ .

Ist  $ABC$  gleichseitig, so wird  $\mathfrak{S}$  mehrdeutig;  $\mathfrak{M}$  reduziert sich auf die vier Punkte  $W = U$ ,  $W_a, W_b, W_c$ .

## 2 Ein Hyperbel-Schnittsatz zur Proportionalschnittkreis-Ermittlung

Zum Nachweis von Satz 1 kann man zunächst die (schon in [6] aufgetretene) folgende Feststellung leicht nachrechnen:

**Hilfssatz 1:** Gegeben seien zwei nicht zueinander parallele Geraden  $g_1, g_2$  und zwei voneinander verschiedene Längen  $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$ . Die Menge der Mittelpunkte aller derjenigen Kreise, die von  $g_1$  eine Sehne der Länge  $k_1$  und von  $g_2$  eine Sehne der Länge  $k_2$  abschneiden, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die beiden winkelhalbierenden Geraden  $e_1, e_2$  von  $g_1, g_2$  sind.  $\square$

Um diesen Hilfssatz auf die Seitenpaare eines Dreiecks anzuwenden, seien noch folgende Bezeichnungen eingeführt: Ist  $\mu > 0$  und  $ABC$  ein nicht gleichschenkliges Dreieck, so bezeichne  $U(\mu)_A$  denjenigen Punkt, für den  $\overrightarrow{AU(\mu)_A} = \mu \cdot \overrightarrow{AU}$  gilt, und  $\mathfrak{h}(\mu)_A$  bezeichne die durch  $U(\mu)_A$  gehende Hyperbel mit der Innen- und Außenwinkelhalbierenden des Winkels bei  $A$  als Asymptoten. Ebenso mit zyklischer Vertauschung von  $A, B, C$  seien  $U(\mu)_B, \mathfrak{h}(\mu)_B$  und  $U(\mu)_C, \mathfrak{h}(\mu)_C$  definiert.

Man kann nun die Mengen- ("geometrische Orts"-) Charakterisierung aus Hilfssatz 1 zu derselben Schlußweise heranziehen, wie sie seit alters für die Herleitung des Schnittverhaltens der Winkelhalbierenden bzw. Mittelsenkrechten bekannt ist: Da der Kreis um  $U(\mu)_A$  durch  $A$  die Eigenschaft hat, von den Geraden  $g_{AC}, g_{AB}$  Sehnen der Längen  $\mu \cdot b, \mu \cdot c$  abzuschneiden, ist  $\mathfrak{h}(\mu)_A$  die Menge der Mittelpunkte aller Kreise mit dieser Eigenschaft. Aus dieser Aussage und den beiden durch zyklische Vertauschung von  $A, B, C$  entstehenden Aussagen folgt dann der doppelte Sachverhalt:

**Satz 4:** (I) Jeder gemeinsame Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von zwei der Hyperbeln  $\mathfrak{h}(\mu)_A, \mathfrak{h}(\mu)_B, \mathfrak{h}(\mu)_C$  liegt auch auf der dritten.

(II) Alle so vorhandenen gemeinsamen Punkte der drei Hyperbeln sind genau alle (zu gegebenem  $ABC$  mit  $a < b < c$  und gegebenem  $\mu > 0$  vorhandenen) Mittelpunkte von  $\mu$ -Schnittkreisen.  $\square$

Auf die bisher ausgeschlossenen Fälle, daß  $\mu = 0$  gilt oder  $ABC$  gleichschenkelig ist, läßt sich Satz 4 übertragen, indem man sinngemäß alle oder einige der Hyperbeln durch Geradenpaare ersetzt, bestehend aus jeweils zusammengehörenden Innen- und Außenwinkelhalbierenden.

### 3 Anzahl- und Lagediskussion

Nach Satz 4 gilt für die Anzahl  $z(\mu)$  der  $\mu$ -Schnittkreise eines Dreiecks mit  $a < b < c$  jedenfalls  $z(\mu) \leq 4$ . Zum Nachweis der weiteren Aussagen in Satz 1 betrachten wir zunächst die speziellen Hyperbeln  $\mathfrak{h}_A := \mathfrak{h}(1)_A, \mathfrak{h}_B := \mathfrak{h}(1)_B, \mathfrak{h}_C := \mathfrak{h}(1)_C$  (Fig. 2).

**Hilfssatz 2:** Die Mittelsenkrechte von  $BC$  ist die in  $U$  an  $\mathfrak{h}_A$  gelegte Tangente.

*Beweis:* Im Dreieck  $W_a W_b W_c$  sind bekanntlich  $W, A, B, C$  der Höhenschnittpunkt bzw. die Höhenfußpunkte; der Umkreis von  $ABC$  ist der Feuerbachkreis von  $W_a W_b W_c$ . Mit dessen bekannten Eigenschaften hat man weiter: Die Verbindungsstrecke  $QT$  des Mittelpunktes  $Q$  von  $W_b W_c$  und des Mittelpunktes  $T$  von  $W W_a$  ist ein Durchmesser des Umkreises von  $ABC$ , und sie ist in der Mittelsenkrechten von  $BC$  enthalten. Aus dieser wird folglich von den Asymptoten der Hyperbel  $\mathfrak{h}_A$  die durch  $U$  halbierte Strecke  $QT$  ausgeschnitten; damit ist sie als die genannte Tangente charakterisiert.  $\square$

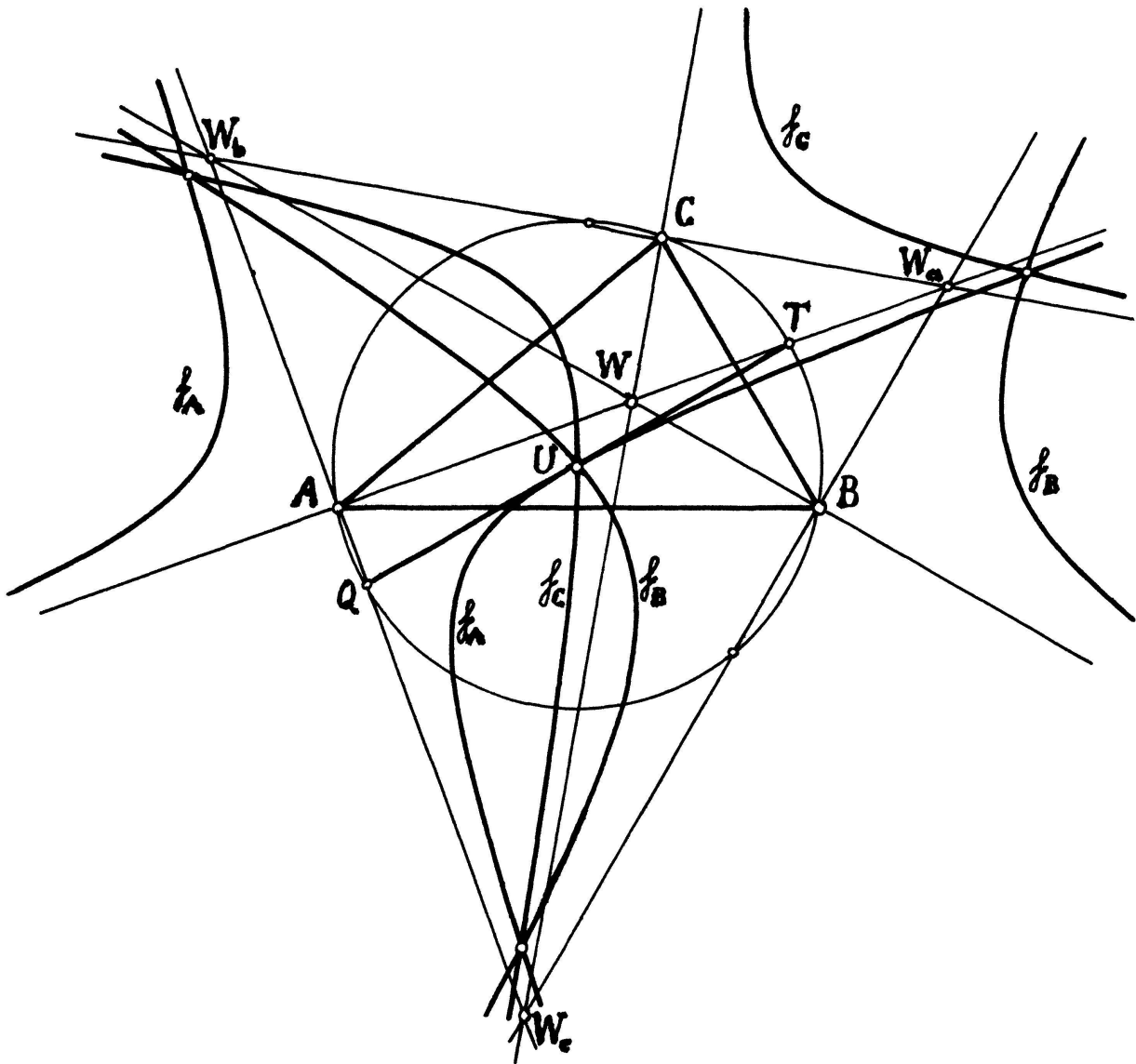


Fig. 2

Berücksichtigt man weiter für je eine Innenwinkelhalbierende, daß sie die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt und daß sie sich — wie eben bereits verwendet — mit der Mittelsenkrechten der Gegenseite auf dem Umkreis schneidet, so folgt aus  $a < b < c$ : Der Umkreismittelpunkt  $U$  liegt im Innern des Dreiecks  $AWW_c$ . Unter Nutzung von Hilfssatz 2, auch mit zyklischer Vertauschung von  $A, B, C$ , sowie von Stetigkeits-, Monotonie- und Asymptoteneigenschaften der Hyperbeln ergibt sich

**Hilfssatz 3:** (I) Die Hyperbeln  $h_A, h_B, h_C$  haben je einen Ast in den konvexen Winkel­flächen  $\sphericalangle W_aAW_c, \sphericalangle W_bBW_c$  bzw.  $\sphericalangle W_bCW_c$ . Dabei gehen  $h_A, h_B$  mit voneinander verschiedenen Tangentialrichtungen durch  $U$  und haben folglich im Dreieck  $AWW_c$  ( $= \sphericalangle W_aAW_c \cap \sphericalangle W_bBW_c \cap \sphericalangle W_bCW_c$ ) außer  $U$  noch genau einen zweiten Schnittpunkt.

(II) Ferner haben  $h_A, h_B, h_C$  je einen Ast in den konvexen Winkel­flächen  $\sphericalangle (AW_a^-, AW_b^+), \sphericalangle W_bBW_c$  bzw.  $\sphericalangle W_bCW_c$ . In deren Durchschnitt (begrenzt von der Strecke  $AW_b$  und den Strahlen  $AW_a^-, W_bC^-$ ) liegt genau ein weiterer Schnittpunkt der drei Hyperbeln.

(III) Sie haben je einen Ast in  $\sphericalangle W_a A W_c$ ,  $\sphericalangle (B W_b^-, B W_a^+)$  bzw.  $\sphericalangle (C W_a^+, C W_c^-)$  und damit im Durchschnitt  $\sphericalangle (W_a A^-, W_a C^-)$  dieser drei Winkel­flächen ebenfalls genau einen weiteren Schnittpunkt.  $\square$

Überführt man nun  $h_A$  bzw.  $h_B$  durch Streckungen mit den Zentren  $A$  bzw.  $B$  und einheitlichem Streckfaktor  $\mu > 0$  in  $h(\mu)_A$  bzw.  $h(\mu)_B$ , so zeigt sich, nochmals wegen der Stetigkeits-, Monotonie- und Asymptoteneigenschaften:

**Hilfssatz 4:** *Es gibt eine Zahl  $m > 1$ , für die beim Übergang zu  $h(m)_A$ ,  $h(m)_B$  die in Hilfssatz 3 (I) genannten zwei Schnittpunkte zu einem Berührungspunkt zusammenfallen. Mit dieser Zahl  $m$  gilt ferner: Für jedes positive  $\mu < m$  haben die in  $\sphericalangle W_a A W_c$ ,  $\sphericalangle W_b B W_c$  liegenden Äste von  $h(\mu)_A$ ,  $h(\mu)_B$  genau zwei Schnittpunkte, für jedes  $\mu > m$  meiden sie sich.*

*Die in Hilfssatz 3 (II), (III) genannten Schnittpunkte gehen für jedes positive  $\mu$  in je genau einen Schnittpunkt von  $h(\mu)_A$ ,  $h(\mu)_B$ ,  $h(\mu)_C$  über.  $\square$*

Damit ist Satz 1 bewiesen.

#### 4 Die Mittenhyp­erbel; ein zweiter Hyperbel-Schnittsatz

**I.** Eine notwendige Bedingung für die Mittelpunkte aller  $\mu$ -Schnittkreise ist durch Elimination von  $\mu$  zu erhalten. Satz 4 ermöglicht diese Elimination durch Anwendung der folgenden — auch für sich als Satz über Scharen von Mittelpunktskegelschnitten bemerkenswerten — Aussage:

**Hilfssatz 5:** *Es seien  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  zwei voneinander verschiedene, nicht entartete Kegelschnitte mit Mittelpunkten  $M_1$  bzw.  $M_2$ . Für jedes  $\mu \geq 0$  gehe  $\mathcal{C}_j$  bei der Streckung mit dem Zentrum  $M_j$  und dem Streckfaktor  $\mu$  über in  $\mathcal{C}(\mu)_j$  ( $j = 1, 2$ ). (Für eine Ellipse bzw. Hyperbel  $\mathcal{C}_j$  sei im Grenzfall  $\mu = 0$  der zum Mittelpunkt bzw. Asymptotenpaar von  $\mathcal{C}_j$  entartete Kegelschnitt als  $\mathcal{C}(0)_j$  verstanden.) Dann existiert ein Kegelschnitt  $\mathfrak{S}$ , der alle Durchschnitte  $\mathcal{C}(\mu)_1 \cap \mathcal{C}(\mu)_2$  ( $\mu \geq 0$ ) enthält.*

*Beweis:* In einem  $x, y$ -Koordinatensystem hat  $\mathcal{C}_j$  eine Gleichung  $f_j(x, y) = 1$ , wo zur Abkürzung

$$f_j(x, y) = a_j \cdot (x - x_j)^2 + b_j \cdot (x - x_j) \cdot (y - y_j) + c_j \cdot (y - y_j)^2$$

gesetzt wurde ( $(x_j; y_j) = M_j$ ;  $a_j, b_j, c_j$  konstant;  $j = 1, 2$ ). Für jedes  $\mu > 0$  hat folglich  $\mathcal{C}(\mu)_j$  die Gleichung

$$\frac{1}{\mu^2} \cdot f_j(x, y) = 1. \tag{1}$$

Jeder Punkt  $(x; y)$ , zu dem ein  $\mu > 0$  so existiert, daß  $(x; y)$  dem Durchschnitt  $\mathcal{C}(\mu)_1 \cap \mathcal{C}(\mu)_2$  angehört, erfüllt daher beide (mit diesem  $\mu$ ) für  $j = 1, 2$  gebildeten Gleichungen (1) und somit auch die Gleichung

$$f_1(x, y) = f_2(x, y);$$

dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes  $\mathfrak{S}$ . Aus Stetigkeitsgründen enthält  $\mathfrak{S}$  auch  $\mathcal{C}(0)_1 \cap \mathcal{C}(0)_2$ .  $\square$

Wendet man Hilfssatz 5 etwa mit  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{h}_A$ ,  $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{h}_B$  an, so erhält man, wie in Satz 3 behauptet, die Existenz eines Kegelschnittes  $\mathfrak{S}$ , der alle Mittelpunkte von Proportional-schnittkreisen enthält, insbesondere durch  $U$ ,  $W$ ,  $W_a$ ,  $W_b$ ,  $W_c$  geht. Die Betrachtungen zu Hilfssatz (3 und) 4 über Existenz und Lage von Schnittpunkten der  $\mathfrak{h}(\mu)_A$ ,  $\mathfrak{h}(\mu)_B$ ,  $\mathfrak{h}(\mu)_C$  lassen den Kegelschnitt  $\mathfrak{S}$  auch sogleich als — möglicherweise zum Geradenpaar entartete — Hyperbel mit Teilbögen  $\mathfrak{M}$  erkennen, wie in Korollar 2 und 3 behauptet.

**II.** Insbesondere kann man eine Asymptotenrichtung von  $\mathfrak{S}$  (und damit wegen der sogleich in **III.** zu zeigenden Gleichseitigkeit von  $\mathfrak{S}$  auch beide) erhalten, ähnlich wie in **3** zusammen mit einem Hyperbel-Schnittsatz. Verbindet man nämlich irgend einen konstanten Punkt  $X$  mit den zwei in Hilfssatz 4 (II), (III) betrachteten Schnittpunkten der  $\mathfrak{h}(\mu)_A$ ,  $\mathfrak{h}(\mu)_B$ ,  $\mathfrak{h}(\mu)_C$  und läßt  $\mu$  gegen  $\infty$  gehen, so gehen die Richtungen der Verbindungsstrecken in eine Asymptotenrichtung von  $\mathfrak{S}$  über. Stattdessen kann man für  $X = A$  auch  $\mathfrak{h}_A$  fest lassen,  $ABC$  durch Stauchungen mit  $\lambda = \frac{1}{\mu} \rightarrow 0$  in  $A$  überführen sowie entsprechend auch für  $X = B$  und für  $X = C$  vorgehen. Damit erhält man wieder als doppelten Sachverhalt:

**Satz 5:** Es seien  $\nu_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) drei Verschiebungen, die  $ABC$  so in  $A_j B_j C_j$  abbilden, daß  $A_1 = B_2 = C_3$  gilt; bei  $\nu_j$  sei jeweils  $\mathfrak{h}_j$  das Bild von  $\mathfrak{h}_A$  bzw.  $\mathfrak{h}_B$  bzw.  $\mathfrak{h}_C$  (Fig. 3). Dann gilt:

- (I) Die beiden Schnittpunkte  $Y, Y'$  von zwei der Hyperbeln  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$  liegen auch auf der dritten.
- (II) Die Richtung der (von  $X = A_1 = B_2 = C_3$  halbierten) Strecke  $Y Y'$  ist eine Asymptotenrichtung von  $\mathfrak{S}$ .  $\square$

**III.** Zur weiteren Betrachtung sei dasjenige rechtwinklige  $x, y$ -Koordinatensystem eingeführt, in dem

$$W_b = (p; 0), \quad A = (0; 0), \quad W_c = (q; 0), \quad W = (0; s), \quad W_a = (0; t) \quad (2)$$

mit reellen Zahlen

$$p < 0 < q, \quad 0 < s < t \quad (3)$$

gelten, wobei (aus (2) schon  $AW_a \perp W_b W_c$  folgt und) die noch fehlenden Bedingungen  $BW_b \perp W_c W_a$ ,  $CW_c \perp W_a W_b$  äquivalent zu

$$pq + st = 0 \quad (4)$$

sind. Darin ist mit den Abkürzungen  $P := \frac{1}{4}(p + q)$ ,  $S := \frac{1}{4}(s + t)$

$$U = (P; S), \quad (5)$$

wie z.B. aus der bereits im Beweis zu Hilfssatz 2 verwendeten Kennzeichnung von  $U$  als Mittelpunkt der Strecke  $QT$  folgt. Außer  $S > 0$  gilt  $P \neq 0$ , wenn  $ABC$  (nicht gleichschenkelig ist oder wenigstens)  $b \neq c$  erfüllt.



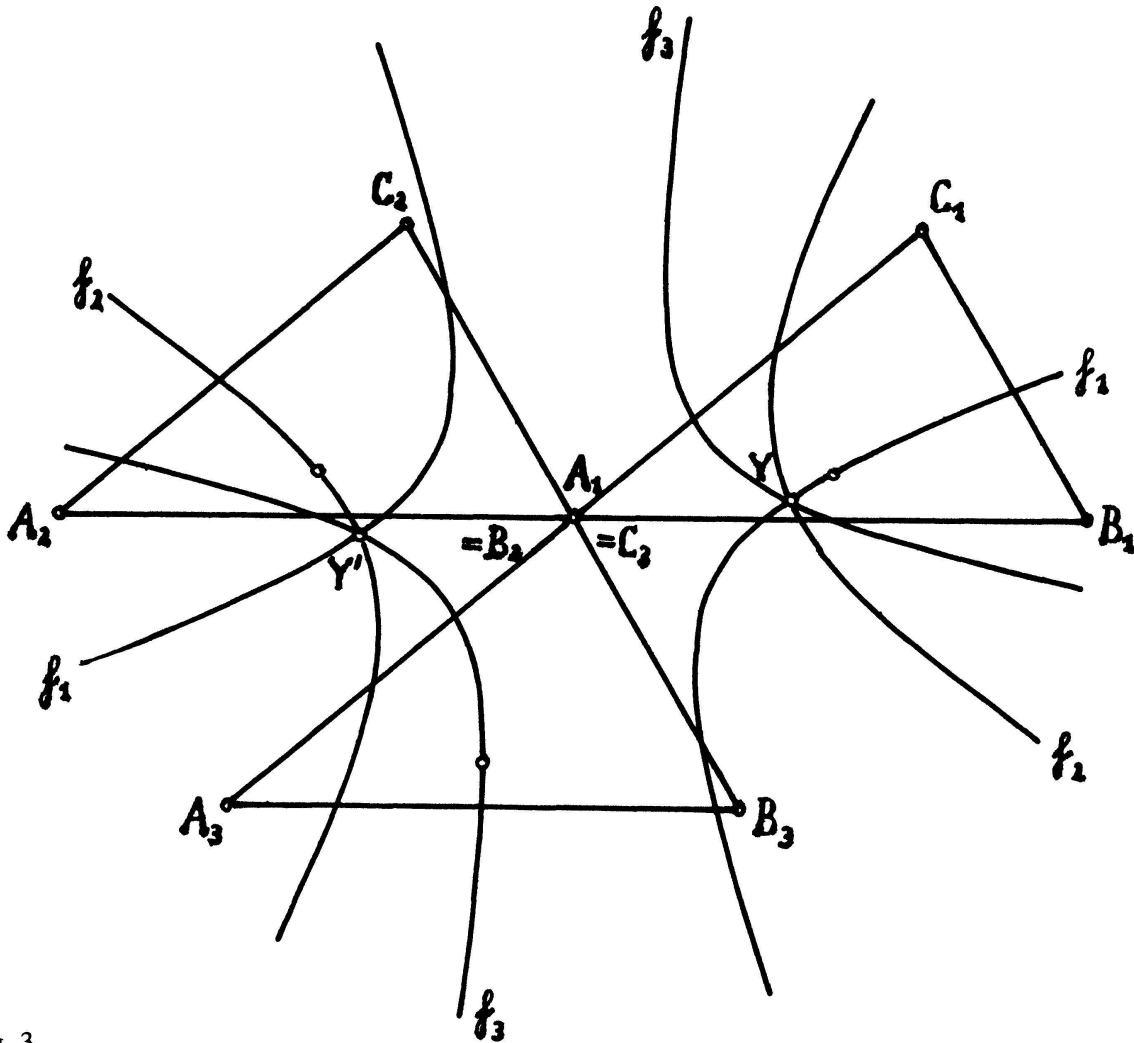


Fig. 3

Unter Beachtung von (4) bestätigt man: Die Punkte  $W, W_a, W_b, W_c, U$  liegen auf dem — damit als  $\mathfrak{H}$  erkannten — Kegelschnitt

$$x^2 + \frac{3 \cdot (P^2 - S^2) - 16pq}{P \cdot S} \cdot xy - y^2 - Px + Sy + pq = 0. \tag{6}$$

Ist  $ABC$  nicht gleichschenkelig ( $a < b < c$ ), so gilt  $U \in AWW_c$  (Beweis zu Hilfssatz 3), und keine drei der fünf Punkte  $W, W_a, W_b, W_c, U$  sind kollinear. Damit und wegen der Koeffizienten 1, -1 bei  $x^2, y^2$  in (6) ist  $\mathfrak{H}$  als gleichseitige Hyperbel erkannt, und die Aussagen von Satz 3 mit Korollar 2 und 3 sind bewiesen.

### 5 Diskussion zur Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel

Zum Nachweis von Korollar 1 in gleichem elementarem Vorgehen wie etwa in [1] (s. dort 4.3.3. und 4.4.) genügen Irreduzibilitätsaussagen in Beispielen folgender Art:

**Hilfssatz 6:** (I) Für das in (2), (3), (4) beschriebene Dreieck  $ABC$  mit

$$p = -1, q = 2, s = 1, t = 2 \tag{7}$$

führt die Ermittlung der drei vom Umkreis verschiedenen 1-Schnittkreise auf eine über dem Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen irreduzible Gleichung 3. Grades.

(II) Für dasselbe Dreieck führt die Ermittlung der vier  $1/2$ -Schnittkreise auf eine über  $\mathbb{Q}$  irreduzible Gleichung 4. Grades.

*Beweis:* Die Winkelhalbierenden durch  $A$  bzw. durch  $B$  sind das Geradenpaar  $x = 0$ ,  $y = 0$  bzw. das Geradenpaar  $x/p + y/s = 1$ ,  $x/q + y/t = 1$ , speziell für (7) also  $-x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ . Der Schnittpunkt dieses Geradenpaares ist  $B = (1/2; 3/2)$ ; nach (5), (7) ist  $U = (1/4; 3/4)$ ; damit erhält man  $U(1/2)_A = (1/8; 3/8)$  und  $U(1/2)_B = (3/8; 9/8)$ .

Hiernach sind die Mittelpunkte der 1-Schnittkreise die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$x \cdot y = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}, \quad (x + y - 1) \cdot (x + y - 2) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2\right), \quad (8)$$

und die Mittelpunkte der  $1/2$ -Schnittkreise sind die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$x \cdot y = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8}, \quad (-x + y - 1) \cdot (x + y - 2) = \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{8} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{8} - 2\right). \quad (9)$$

Nach Elimination von  $y$  und Substitution von  $z = 4x$  bzw. von  $z = 8x$  erhält man aus (8) bzw. (9)

$$z^4 - 4z^3 - 24z^2 + 36z - 9 = 0 \quad (10)$$

bzw.

$$z^4 - 8z^3 - 120z^2 + 72z - 9 = 0. \quad (11)$$

Aus (10) kann man noch den (zur Lösung  $U$  führenden) Linearfaktor  $z - 1$  abspalten; danach verbleibt

$$z^3 - 3z^2 - 27z + 9 = 0. \quad (12)$$

Da sowohl (11) als (12) keinen der Teiler  $\pm 1$ ,  $\pm 3$ ,  $\pm 9$  von 9 (zu (12) im Ring  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen, zu (11) im Ring  $\mathbb{Z}[i]$  verstanden) als Lösung haben, sind sie als irreduzibel erkannt; Hilfssatz 6 und folglich Korollar 1 sind damit bewiesen.  $\square$

Das Dreieck  $ABC$  mit (7) ist übrigens rechtwinklig, da  $U$  auf  $AB$  liegt. Die Aussagen über Nichtkonstruierbarkeit gelten also sogar auch dann, wenn  $ABC$  als rechtwinklig vorausgesetzt wird.

Natürlich gibt es auch Fälle konstruierbarer Proportionalschnittkreise, auch mit anderen Werten als  $\mu = 0$  oder  $\mu = 1$ . Ist  $\mu$  (aus der Zahl 1) konstruierbar, so trifft dies z.B. für alle gleichschenkligen Dreiecke zu — man vergleiche die analoge Feststellung in [3]. Wie dort ergeben sich insbesondere für gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke  $ABC$  besonders sinnfällige Ergebnisse, z.B. wird die Anzahl  $z(m) = 3$  (siehe Satz 1 und Hilfssatz 4) mit  $m = \sqrt{2}$  durch drei *zueinander kongruente* Kreise erreicht, deren Mittelpunkte dasjenige Dreieck bilden, das die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  als Seitenmitten hat.

## 6 Das gleichseitige Dreieck der Mittelpunkte von 1-Schnittkreisen

Ein Beweis von Satz 2 kann folgendermaßen rechnerisch geführt werden: Wie in (8) sind allgemein bei den Vorgaben (2) mit (3), (4), (5) die Mittelpunkte der 1-Schnittkreise die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$xy = \frac{1}{16}(p+q)(s+t),$$

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{s} - 1\right) \cdot \left(\frac{x}{q} + \frac{y}{t} - 1\right) = \left(\frac{p+q}{4p} + \frac{s+t}{4s} - 1\right) \cdot \left(\frac{p+q}{4q} + \frac{s+t}{4t} - 1\right).$$

Nach Elimination von  $y$  und Abspalten des (zur Lösung  $U = (P; S) = (\frac{p+q}{4}; \frac{s+t}{4})$  führenden) Faktors  $x - P$  sowie unter Berücksichtigung von (4), nämlich nach Division durch  $pq (= -st)$ , folgt: Die Mittelpunkte  $U_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) der vom Umkreis verschiedenen 1-Schnittkreise sind die Punkte

$$U_j = \left(x_j; \frac{PS}{x_j}\right), \quad (13)$$

worin  $x_1, x_2, x_3$  die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 3Px^2 - 3S^2x + PS^2 = 0 \quad (14)$$

sind. Aus (14) folgt durch Multiplikation mit  $(x + P) : x^2$

$$(x - P)^2 + \left(\frac{PS}{x} - S\right)^2 = 4(P^2 + S^2),$$

also liegen alle drei Punkte  $U_j$  auf demjenigen Kreis um  $U$ , dessen Radius  $2 \cdot \sqrt{P^2 + S^2}$  nach (2), (5) gleich dem zweifachen Umkreisradius von  $ABC$  ist. — Zu zeigen ist noch

$$|U_1U_2| = |U_1U_3|, \quad |U_2U_3| = |U_2U_1|, \quad |U_3U_1| = |U_3U_2|. \quad (15)$$

Wegen (13) ist (15) äquivalent damit, daß das Tripel  $(x_1; x_2; x_3)$  die Bedingung erfüllt, sowohl Nullstelle des Polynoms

$$T_1 = X_1X_2^2X_3^2(X_2 + X_3 - 2X_1) - P^2S^2(X_1X_2 + X_1X_3 - 2X_2X_3)$$

als auch Nullstelle der durch zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 definierten  $T_2, T_3$  zu sein. Um dies zu beweisen, kann man die Polynome  $\Theta_1 = T_1 + T_2 + T_3$ ,  $\Theta_2 = T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3$ ,  $\Theta_3 = T_1T_2T_3$  bilden. Sie sind symmetrisch in  $X_1, X_2, X_3$ , lassen sich also als Polynome der elementarsymmetrischen Terme  $\xi_1 = X_1 + X_2 + X_3$ ,  $\xi_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3$ ,  $\xi_3 = X_1X_2X_3$  darstellen. Führt man diese (etwas umfangreiche) Rechnung aus und nimmt dann gemäß (14) die Substitution  $\xi_1 = 3P$ ,  $\xi_2 = -3S^2$ ,  $\xi_3 = -PS^2$  vor, so gehen in der Tat  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  identisch in 0 über; also verschwinden  $T_1, T_2, T_3$  für das Tripel der Lösungen  $x_j$  von (14).

Damit ist Satz 2 bewiesen. Abschließend sei nicht versäumt, die Frage aufzuwerfen, ob sich auch ein mehr (synthetisch-) geometrischer Beweis finden läßt. Jedenfalls ist es möglich, aus bekannten trigonometrischen Lösungsformeln der kubischen Gleichung (14) auch Konstruktionsmöglichkeiten für die Punkte  $U_j$  herzuleiten (wobei eine Winkeldreiteilung heranzuziehen ist und übrigens ähnlich einfach wie oben  $|UU_j| = 2 \cdot \sqrt{P^2 + S^2}$  erhalten werden kann). Doch sei auf genauere Ausführungen hierzu nicht mehr eingegangen.

**Literatur**

- [1] Böhm, J. et al.: Geometrie II (Studienbücherei Mathematik für Lehrer, Bd. 7). Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1975.
- [2] Coxeter, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1963.
- [3] Stammler, L.: Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck. Elemente der Mathematik 33 (1978), Nr. 6, 143–152.
- [4] Stammler, L. und B. Weissbach: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beiträge zur Algebra und Geometrie 8 (1979), 55–65.
- [5] Stammler, L. und U. Matte: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval. Beiträge zur Algebra und Geometrie 9 (1980), 149–159.
- [6] Stammler, L.: Optimierung konstant belegter Ovale und ein Hyperbel-Schnittsatz. Beiträge zur Algebra und Geometrie 29 (1989), 21–34.

Ludwig Stammler

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

Fachbereich Mathematik und Informatik

Postfach

D O-4010 Halle (Saale)