

# Georges de Rham 1903-1990

Autor(en): **Eckmann, Beno**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **47 (1992)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43918>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

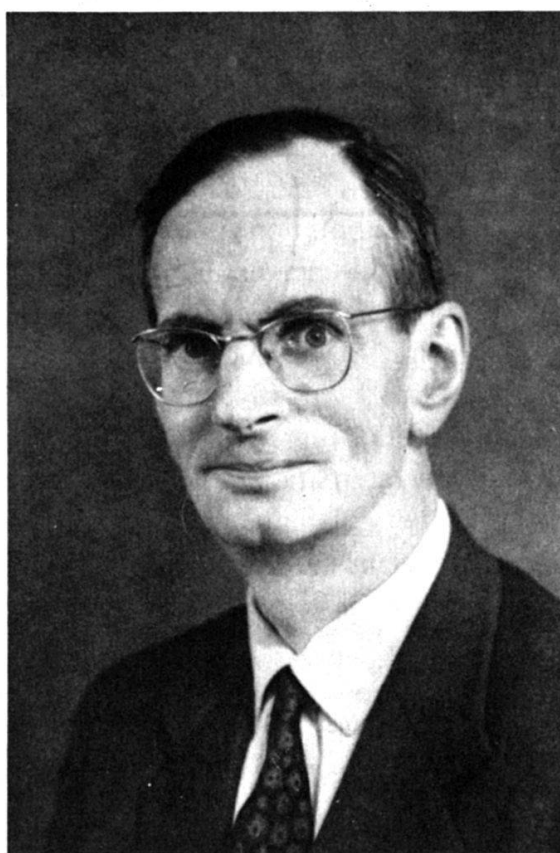
---

---

## Georges de Rham 1903–1990

---

---



Die Nachricht vom Hinschied von Georges de Rham am 8. Oktober 1990 hat sicher alle erreicht und berührt, die mit der Mathematik verbunden sind. Mit diesen Zeilen möchte unsere Zeitschrift von ihm Abschied nehmen. Er war einer der Grossen der Mathematik unseres Jahrhunderts; sein Name und sein Werk gehören zu ihrem festen Bestand, und der Einfluss seiner Gedanken auf ihre Entwicklung ist noch durchaus nicht erschöpft.

Den "Elementen der Mathematik", die sich ja weitgehend an Lehrer und Studenten richten, stand er nahe, gehörte er doch während vieler Jahre zu ihrem Patronat. Alles, was mit Unterricht zusammenhängt, lag ihm ebenso am Herzen wie die Forschung. Er pflegte zu sagen: "Unterrichten, Wesentliches vermitteln, Schönes verständlich und sichtbar machen, das bereitet mir Freude; und zum Lehren gehört immer das Interpretieren."

Vielleicht konnte der Studierende, dem er in bescheidener aber eindrücklicher Weise Mathematik jeder Stufe beizubringen verstand, unbewusst ahnen, welche grosse mathematische Potenz hier am Werke war. Je näher man ihm kam, sei es als Anfänger oder als Kollege, desto mehr war man beeindruckt von seiner Persönlichkeit: von seiner — man kann es nicht anders sagen — vornehmen und doch nicht distanzierenden Art; von seinem von Herzen kommenden Charme; von seiner unbeugsamen Geradheit und Strenge; von seiner warmherzigen Freundschaft, Treue und Hilfsbereitschaft.

### **Biographisches**

Georges de Rham entstammte einer bekannten Waadtländer Familie. Er wuchs in Lausanne auf und studierte dort an der Universität bis zur Licence. In Paris, wo er mehrere Jahre verbrachte, kam er mit dem Gedankengut von Henri Poincaré und Elie Cartan in Berührung und erhielt die Anregung zu der Forschungsrichtung, welcher seine Doktorarbeit (1931) gewidmet ist und die seinen Namen sofort weltberühmt machte. 1932 habilitierte er sich in Lausanne, und seit 1936 bis zu seiner Emeritierung war er Professor an den Universitäten Lausanne und Genf; den Kontakt zu Paris hielt er immer aufrecht. Obwohl viele mathematische Zentren in aller Welt sich um seine Mitarbeit bemühten, blieb er der Romandie treu; es gelang ihm, dort eine mathematische Schule von Weltruf zu schaffen. Er förderte junge Talente in uneigennütziger, freundschaftlicher und väterlicher Weise. In vielen Ämtern setzte er sich mit ganzer Kraft für das ein, was ihm aus der Sicht der Wissenschaft am Herzen lag: So besonders in der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft, deren Präsident er 1944–1945 in schwieriger Zeit war; als Redaktor der *Commentarii Mathematici Helvetici*; im Forschungsrat des Schweizerischen Nationalfonds. So vertraute ihm auch die Internationale Mathematische Union 1963–1966 ihr höchstes Amt, das Präsidium, an; hier gelang es ihm dank seiner integren und von allen anerkannten Haltung, weltweite wissenschaftliche und menschliche Zusammenarbeit zu fördern.

Seine Freunde wussten, dass er nicht nur als Mathematiker berühmt war, sondern auch als Alpinist. Auch auf diesem Gebiet fühlte er sich durch schwierige Aufgaben angezogen. Dank Erstbesteigungen, einem vorzüglich geschriebenen Buch und Vorträgen war sein Name in Bergsteigerkreisen ein Begriff. Mit Stolz erzählte er nach dem Krieg, als die Grenzen wieder offen waren, dass seine erste Vortragseinladung ins Ausland nicht von Mathematikern ausging, sondern vom englischen "Rucksack-Club".

Dass de Rham zahlreiche Ehrungen zuteil wurden, im kleinen, im schweizerischen und im internationalen Kreise, ist nicht zu verwundern. Es ist hier nicht der Ort, sie alle aufzuzählen. Nur drei seien erwähnt: die Ehrenmitgliedschaft der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft 1960, das Ehrendoktorat der ETH Zürich 1961, und der von der Eidgenossenschaft verliehene "Marcel Benoist-Preis" 1966.

### **Die Sätze von de Rham**

Das mathematische Werk von de Rham liegt in den Gebieten Globale Analysis, Differentialgeometrie und Topologie. Es zeugt von einer für die damalige Zeit erstaunlichen Synthese verschiedenster Methoden: analytischer, geometrischer, kombinatorisch-topologischer und algebraischer. Es ist bezeichnend, dass er nur wenige explizite Problemkreise bearbeitet hat, diesen aber den Stempel seiner Durchdringungskraft aufprägte.

Es sind dies: Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten; kombinatorische Invarianten von Zellenkomplexen; endgültige Fassung der Hodge-Theorie harmonischer Differentialformen; Zerlegung Riemannscher Mannigfaltigkeiten in Produkte von unzerlegbaren; "courants", Synthese von Differentialformen und algebraisch-topologischen Ketten mit Hilfe von Schwartzschen Distributionen.

Wir beschränken uns hier auf eine summarische Darstellung des ersten Gegenstandes — es ist der bekannteste und am meisten angewendete.

Der berühmte *Satz von de Rham*, 1928 angekündigt und in der Thèse (Paris 1931) dargelegt, wird heute gewöhnlich in der Terminologie der Cohomologie als Isomorphie

$$R^p(M) \cong H^p(M) \quad (1)$$

formuliert. Es sei kurz an die Bedeutung dieser Symbole erinnert.

Man betrachtet auf einer geschlossenen differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $n$  Differentialformen vom Grade  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ ; sie bilden einen reellen Vektorraum  $\Omega^p$ . Das äussere Differential  $d\alpha^p$  von  $\alpha^p \in \Omega^p$  liefert eine lineare Abbildung  $d: \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ , und es gilt  $dd = 0$ ; man setzt  $\Omega^{-1} = \Omega^{n+1} = 0$ . Somit liegt das Bild  $d\Omega^{p-1}$  im Kern  $\mathring{\Omega}^p$  von  $d$ , und die "Cohomologiegruppen"  $\mathring{\Omega}^p / d\Omega^{p-1} = R^p(M)$  sind die de Rham-Gruppen (reelle Vektorräume) von  $M$ . Eine Form  $\alpha^p \in \mathring{\Omega}^p$ , also mit Differential  $d\alpha^p = 0$ , heisst geschlossen.

Ferner sei  $M$  in Zellen eingeteilt, und es sei  $C_p$  der Vektorraum der  $p$ -Ketten, d.h. der reellen Linearkombinationen der  $p$ -dimensionalen Zellen. Der Rand  $\partial\sigma_p$  einer  $p$ -Zelle  $\sigma_p$  ist eine  $(p-1)$ -Kette (mit Koeffizienten  $\pm 1$ ), und durch Linearität erhält man eine Abbildung  $\partial: C_p \rightarrow C_{p-1}$ , mit  $\partial\partial = 0$ ; man setzt  $C_{-1} = C_{n+1} = 0$ . Die zu den  $C_p$  dualen Vektorräume, d.h. die Räume der reellen Linearformen auf den  $p$ -Ketten, werden mit  $C^p$  bezeichnet. Für sie hat man die zu  $\partial$  duale "Corand"-Bildung  $\delta: C^p \rightarrow C^{p+1}$ , die für  $f^p \in C^p$  durch  $\delta f^p(c_{p+1}) = f^p(\partial c_{p+1})$ ,  $c_{p+1} \in C_{p+1}$  definiert ist; es gilt  $\delta\delta = 0$ . Somit liegt  $\delta C^{p-1}$  im Kern  $\mathring{C}^p$  von  $\delta$ , und man erhält die Cohomologiegruppen (reelle Vektorräume)

$$H^p(M) = \mathring{C}^p / \delta C^{p-1} .$$

Sie sind topologische Invarianten von  $M$ , sogar Homotopie-Invarianten, während die linke Seite der Isomorphie (1) natürlich vermöge der differenzierbaren Struktur von  $M$  definiert ist.

Zur Aussage des Satzes von de Rham gehört aber noch mehr, nämlich dass der Isomorphismus  $R^p(M) \rightarrow H^p(M)$  durch *Integration* der Differentialformen hergestellt wird. Man nimmt die Zellen  $\sigma_p$  differenzierbar an und verwendet sie als Integrationsbereiche; so ist etwa  $\int_{\sigma_1} \alpha^1$ ,  $\alpha^1 \in \Omega^1$ , ein gewöhnliches Linienintegral. Für  $\alpha^p \in \Omega^p$  wird  $\int_{\sigma_p} \alpha^p$  durch Linearität auf alle Ketten  $c_p \in C_p$  ausgedehnt;  $f^p(c_p) = \int_{c_p} \alpha^p$  definiert eine Linearform  $f^p \in C^p$  und man erhält lineare Abbildungen

$$\Phi: \Omega^p \rightarrow C^p, \quad p = 0, 1, \dots, n .$$

Für diese gilt

$$\Phi(d\alpha^p) = \delta\Phi(\alpha^p); \tag{2}$$

dies ist nichts anderes als der Satz von Stokes:

$$\int_{c_{p+1}} d\alpha^p = \int_{\partial c_{p+1}} \alpha^p = f^p(\partial c_{p+1}) = \delta f^p(c_{p+1})$$

für alle  $c_{p+1} \in C_{p+1}$ .

Aus (2) ersieht man, dass  $\Phi$  die Gruppen  $\mathring{\Omega}^p$  in  $\mathring{C}^p$  und  $d\Omega^{p-1}$  in  $\delta C^{p-1}$  abbildet und somit eine lineare Abbildung der Faktorgruppen  $R^p(M)$  in  $H^p(M)$  bewirkt — und der Satz von de Rham besagt, dass dies der Isomorphismus (1) ist.

Das ist nicht genau die ursprüngliche Fassung in der Thèse. Um zu ihr zu gelangen, muss man die Homologiegruppen  $H_p(M)$  betrachten; d.h. die Faktorgruppen  $\mathring{C}_p / \partial C_{p+1}$ , wobei  $\mathring{C}_p$  der Kern von  $\partial : C_p \rightarrow C_{p-1}$  ist. Ketten  $c_p$  mit  $\partial c_p = 0$  heissen “Zyklen”, mit  $c_p = \partial c_{p+1}$  “Ränder”; sie haben eine anschauliche geometrische Bedeutung. Zyklen sind geschlossene Integrationsbereiche, und ein Element von  $H_p(M)$  ist eine Klasse von  $p$ -Zyklen, die sich “nur” um Ränder unterscheiden.

Ist nun  $f^p \in \mathring{C}^p$ ,  $\delta f^p = 0$ , so gilt  $f^p(\partial c_{p+1}) = \delta f^p(c_{p+1}) = 0$ , d.h.  $f^p$  ist auf  $\partial C_{p+1}$  gleich 0. Betrachtet man  $f^p$  nur auf den Zyklen  $\mathring{C}_p$ , so erhält man also eine Linearform auf  $H_p(M) = \mathring{C}_p / \partial C_{p+1}$ ; diese ist identisch 0, wenn  $f^p = \delta g^{p-1}$  ist. Umgekehrt erhält man so alle reellen Linearformen  $H_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  (denn eine Linearform auf  $\mathring{C}_p$  kann man in beliebiger Weise auf den ganzen Vektorraum  $C_p$  erweitern). So gilt also

$$H^p(M) = \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{R}),$$

wobei  $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$  den Vektorraum aller reellen Linearformen auf  $V$ , also den dualen Vektorraum bezeichnet. Die Abbildung  $\Phi$  kann nun als  $R^p(M) \rightarrow \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{R})$  interpretiert werden. Sie ordnet einer geschlossenen Differentialform  $\alpha^p \in \mathring{\Omega}^p$  eine Linearform auf den Zyklen zu, die auf den Rändern gleich 0 ist; ihre Werte nennt man die *Perioden* von  $\alpha^p$ . Dass  $\Phi$  ein Isomorphismus ist, besagt zweierlei:

- I. Sind alle Perioden der geschlossenen Differentialform  $\alpha^p$  gleich 0, so ist  $\alpha^p$  ein Differential  $d\beta^{p-1}$ . Mit andern Worten:  $\Phi$  ist injektiv.
- II. Zu gegebenen Perioden  $\varphi \in \text{Hom}(H_p(M), \mathbb{R})$  existiert eine geschlossene Differentialform  $\alpha^p$ , die genau diese Perioden  $\varphi$  hat. Mit andern Worten:  $\Phi$  ist surjektiv.

In dieser Form erbrachte de Rham den Beweis, damals eine monumentale Leistung. Bei näherer Analyse erweist er sich als sehr ähnlich den späteren Beweisen, die dank den Hilfsmitteln der Garbentheorie (Formalisierung des Übergangs vom Lokalen zum Globalen) sehr einfach und durchsichtig geworden sind.

Ausser den Sätzen I und II enthält die Thèse noch einen dritten Satz. Er bezieht sich auf das (äussere) Produkt  $\alpha^p \wedge \beta^q$  von Differentialformen, für welches

$$d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q$$

gilt; es macht die direkte Summe  $R^*(M) = \bigoplus R^p(M)$  zu einem graduierten Ring. Ebenso ist  $H^*(M) = \bigoplus H^p(M)$  vermöge der *Alexanderschen* Multiplikation ein graduiertes Ring. Es gilt nun, dass  $\Phi$  produkt-treu ist, also ein Ring-Isomorphismus  $R^*(M) \cong H^*(M)$ . Allerdings stand für die Rham das Alexander-Produkt noch nicht zur Verfügung; aber gemäss der Poincaré-Dualität ist  $H^p(M) \cong H_{n-p}(M)$ , und so gehört zu jeder geschlossenen Form  $\alpha^p$  ein Zyklus und damit eine Homologieklass  $\Psi(\alpha^p) \in H_{n-p}(M)$ . De Rham beweist

$$\text{III.} \quad \Psi(\alpha^p \wedge \beta^q) = S(\Psi(\alpha^p), \Psi(\beta^q))$$

wobei  $S$  den "Durchschnitt" der Zyklen  $c_{n-p} = \Psi(\alpha^p)$  und  $d_{n-q} = \Psi(\beta^q)$  bezeichnet.  $S(c_{n-p}, d_{n-q})$  liegt in der Dimension  $n - (p + q)$  und ist Poincaré-dual zum Alexander-Produkt von  $f^p = \Phi(\alpha^p)$  und  $g^q = \Phi(\beta^q)$ . Dieser Satz drückt eine noch engere Beziehung zwischen der Algebra der Differentialformen und der Topologie der Mannigfaltigkeit aus.

### Ausblick

Die Sätze von de Rham, die hier skizziert wurden, bedeuteten gleichzeitig den Abschluss einer Entwicklung und einen Neubeginn. Der Abschluss: Die aus der Analysis und Differentialgeometrie hervorgegangene Theorie der Differentialformen einerseits, und die Entstehung des Homologiebegriffs der kombinatorischen Topologie (Poincaré) andererseits hatten Elie Cartan, und vielleicht schon Poincaré, zur Vermutung geführt, dass diese Sätze gelten müssen. Aber erst de Rham gelang es, den für den Beweis erforderlichen Übergang vom Lokalen zum Globalen zu überwinden. Nicht nur das Ergebnis, sondern auch die Methode wurde bald zu einer Quelle neuer Ideen, die später in den Arbeiten von Weil, Henri Cartan, Serre, Grothendieck, Sullivan und andern ihre Fortführung fanden; diese bezieht sich nicht nur auf Mannigfaltigkeiten (reelle, offene, komplexe, algebraische), sondern auch auf viel allgemeinere Zellen-Komplexe.

Georges de Rhams Darstellungsweise, in Wort und Schrift, war kristallklar, im Formalen auf das Notwendigste beschränkt, und im besten Sinne des Wortes "konkret". Jeder "abstract generalized nonsense", wenn er nicht gewissermassen zwangsläufig im konkreten Problem wurzelte, war seinem Denken fremd. Es sei mir aber aus persönlichem Erinnern die Feststellung gestattet, dass er den Wert und die Aussagekraft von Verallgemeinerungen, insbesondere der aus mathematischer Substanz abstrahierten Strukturbegriffe, anerkannte. Den Bestrebungen der jungen Bourbaki-Gruppe, mit der ihn ja auch echte Freundschaften verbanden, stand er durchaus positiv gegenüber. Und ohne Zweifel hätte er an der heutigen Mathematik, mit ihren vielen überraschenden Zusammenhängen zwischen verschiedenen Gebieten und mit ihrer Verbindung von konkreten Problemen und abstrakten allgemeinen Methoden, grosse Freude.

Professor Beno Eckmann,  
Forschungsinstitut für Mathematik  
ETH-Zentrum,  
CH-8092 Zürich