

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **47 (1992)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

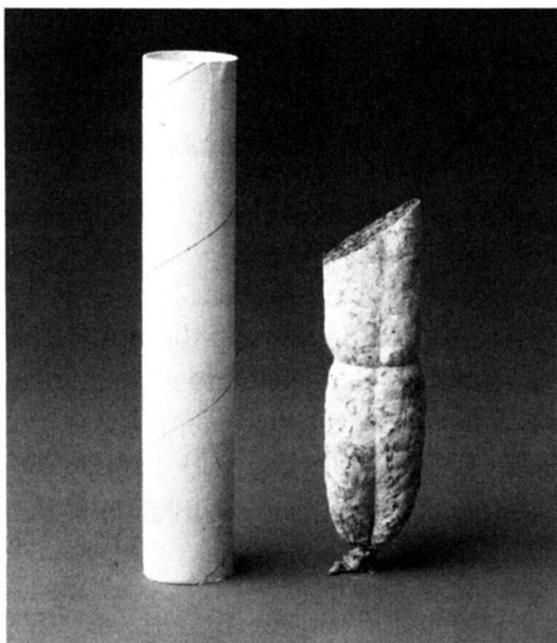
Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November an:

- Dr. P. Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma oder
- Dr. H. Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1062. Eine Dualität zwischen Normalprojektion und Abwicklung



Bei einem ersten flüchtigen Blick auf die nebenstehende Fotografie täuschen der schiefe Schnitt des Salamis und die ansteigende Rille auf der Kartonrolle eine gewisse Verwandtschaft vor. Betrachtet man allerdings den Salamischnitt genau von der Seite und stellt sich ausserdem vor, die Kartonrolle sei durchsichtig, so ist der Unterschied der beiden Raumkurven nicht mehr zu übersehen: In der Normalprojektion auf eine geeignete Ebene wird der Schnitt zu einer *Strecke* und die Rille zu einer *Sinuskurve*. Durch Abwickeln der beiden Zylindermäntel, auf denen die Raumkurven liegen, kann man auf eine zweite Art erreichen, dass ebene Kurven entstehen, und zwar wiederum eine Sinuskurve und eine Strecke. Als ich im Gespräch mit

einem Germanisten dieses mathematische Phänomen diskutierte, zog ich einer beweisenden Rechnung die Probe aufs Exempel vor: Ich legte die aus Schichten zusammengeklebte Rolle ins Wasser und zog die zuvor eingeritzte Haut des schief abgeschnittenen Salamis sorgfältig ab. Nachdem Karton und Haut flach auf dem Tisch ausgebreitet waren, bemerkte mein Kollege zu Recht, dass diejenige Linie, die in der Normalprojektion als Strecke erscheint, in der Abwicklung zu einer Sinuskurve wird und umgekehrt. Ist diese Art von Dualität zwischen Normalprojektion und Abwicklung auf das Zusammenspiel von Zylinder, Sinuskurve und Strecke beschränkt, also ein reiner Zufall, oder tritt als Phänomen auch bei einer anderen Konfiguration mit einem Körper und zwei Kurven auf?

Peter Gallin, Bauma, CH

Aufgabe 1063. Zur Wahrscheinlichkeit lösbarer quadratischer Gleichungen

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine quadratische Gleichung (in der Form $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) zwei verschiedene reelle Lösungen?

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Aufgabe 1064. Eine einfache Frage zum Schwerpunkt eines Dreiecks

Es ist bekannt, wo der Schwerpunkt von drei Massenpunkten und wo der Schwerpunkt eines Dreiecks aus Blech liegt. Aber wo liegt der Schwerpunkt eines Dreiecks, dessen Seiten aus Draht gefertigt sind?

Peter Gallin, Bauma, CH

Lösungen

Aufgabe 1049. Unter allen einem gegebenen Parallelogramm einbeschriebenen Ellipsen bestimme man diejenige mit maximalem Flächeninhalt.

L. Kuipers, Sierre

Lösung: Durch affine Transformation (genauer Stauchungen in eine Richtung und Scheerungen) kann das Parallelogramm in ein Quadrat verwandelt werden, ohne dass sich der Flächenanteil der einbeschriebenen Ellipsen ändert. Es genügt also, die Situation eines Quadrates zu diskutieren, wir nehmen das Quadrat $|x| + |y| = 1$. Eine einbeschriebene Ellipse sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sie berühre die Seite $x + y = 1$ im Punkte (x_0, y_0) . Die Ellipsentangente in diesem Punkt ist

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

und sollte mit $x + y = 1$ identisch sein, also $x_0 = a^2$ und $y_0 = b^2$. Für die Fläche F der Ellipse gilt

$$F^2 = \pi^2 a^2 b^2 = \pi^2 x_0 y_0 = \pi^2 x_0 (1 - x_0).$$

Dies ist eine quadratische Funktion in x_0 , welche in ihrem Scheitel $x_0 = \frac{1}{2}$ maximal wird. Die Ellipse maximalen Flächeninhalts berührt das Parallelogramm in den Seitenmittelpunkten, sie ist das affine Bild des Inkreises eines Quadrates. \square

A. Müller, Zürich

Bemerkung der Redaktion: H. Guggenheimer (Basel) weist darauf hin, dass sich Aufgabe 1049 nebst Lösung in J. Steiner, Gesammelte Werke, Bd. II, p. 413 (Abhandlung Nr. 29) finden.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Guggenheimer (Basel), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), J. Schaer (Calgary, CD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 1050. Man ermittle

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2) + x \cdot \arctan x}{x \cdot (4+x^2)} dx.$$

A.A. Jagers, Enschede, NL

Lösung: Bezeichnet man den Integranden mit $f(x)$ und verwendet

$$\arctan x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix},$$

so erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln(1+ix)}{x(2+ix)} + \frac{\ln(1-ix)}{2-ix} \right\}$$

Mit Hilfe der Substitutionen

$$x = i \left(1 - \frac{1}{z} \right) \quad \text{bzw.} \quad x = -i \left(1 - \frac{1}{z} \right)$$

lässt sich das vorgelegte Integral I nunmehr in der Form

$$I = \frac{1}{2} \int_{C_1} \frac{\ln z}{z^2-1} dz + \frac{1}{2} \int_{C_2} \frac{\ln z}{z^2-1} dz$$

schreiben, wobei die Integrationswege C_1 bzw. C_2 auf dem unteren bzw. dem oberen Halbkreisbogen um $z = 1/2$ mit dem Radius $1/2$ liegen. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz (der Integrand hat im fraglichen Gebiet nur bei $z = 1$ eine — behebbar — Singularität) haben beide Integrale denselben Wert, nämlich

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u^2-1} du = \pi^2/8.$$

(s. z.B. I.S. Gradshteyn/I.M. Ryzhik: Table of Integrals, Series, and Products p. 533).
Der Wert des gegebenen Integrals beträgt also

$$I = \pi^2/8.$$

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), R. Golombek (Marburg, BRD), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 1051. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und konkav. Für $n \geq 2$ gelte ferner $0 < a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i + x_{n+i-1}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i + x_{i+1}} \quad (x_{n+1} := x_1). \quad (1)$$

Falls f abnehmend ist, so gilt (1) mit \leq statt \geq . Dies ist zu zeigen.

W. Janous, Innsbruck, A

Lösung: Für $n = 2$ gilt Gleichheit. Sei jetzt $n = 3$. Wegen der Konkavität von f auf $[a, b]$ gilt

$$(x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \leq (x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \quad (2)$$

und hier ist wegen des monotonen Wachstums von f die linke (und damit auch die rechte) Seite nichtnegativ. Dividiert man noch die linke Seite durch $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$ und die rechte Seite durch die nicht größere positive Zahl $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x_1 + x_3} - \frac{1}{x_1 + x_2} \right) f(x_1) + \left(\frac{1}{x_2 + x_1} - \frac{1}{x_2 + x_3} \right) f(x_2) \\ & + \left(\frac{1}{x_3 + x_2} - \frac{1}{x_3 + x_1} \right) f(x_3) \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

was mit (1) für $n = 3$ äquivalent ist.

Vorausgesetzt jetzt, (1) sei für ein $n \geq 3$ in Ordnung. Addiert man dann dazu die Ungleichung, die aus (3) entsteht, indem man darin die Indizes 2 bzw. 3 durch n bzw. $n + 1$ ersetzt, so erhält man (1) für $n + 1$ statt n .

Ist schließlich f abnehmend und konvex, so ist $g := -f$ zunehmend und konkav, so daß man (1) für g statt f erhält. Multiplikation der so erhaltenen Ungleichung für die g -Werte mit -1 liefert dann auch noch die letzte Behauptung der Aufgabenstellung.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte J. Waldmann (Jena, BRD).

Aufgabe 1052. An die Seiten eines Dreiecks ABC werden gleichschenklige ähnliche Dreiecke BA_1C , CB_1A , AC_1B mit den Spitzen A_1 , B_1 , C_1 angesetzt, alle nach aussen oder alle nach innen. Es seien $a_1 = B_1C_1$, $b_1 = C_1A_1$, $c_1 = A_1B_1$ die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$. Um A , B , C werden die Kreise mit den Radien a_1 , b_1 , c_1 gezeichnet. Man zeige, dass das Potenzzentrum dieser drei Kreise auf der Eulergeraden des Dreiecks ABC liegt.

R. Stärk, Schaffhausen

Lösung: Es seien \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} die Ortsvektoren zu den Ecken A , B und C in einem Koordinatensystem mit dem Umkreismittelpunkt U als Ursprung. Bekanntlich ist der Vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ein Richtungsvektor der Eulergeraden des Dreiecks ABC .

Bezeichnet man den Umkreisradius mit R und die drei Innenwinkel des Dreiecks mit α , β und γ , so ist

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 = R^2, \quad \mathbf{ab} = R^2 \cos(2\gamma), \quad \mathbf{ac} = R^2 \cos(2\beta), \quad \mathbf{bc} = R^2 \cos(2\alpha).$$

Weiterhin seien \mathbf{u} , \mathbf{v} und \mathbf{w} die Ortsvektoren zu den Spitzen A_1 , B_1 und C_1 . Da die drei angesetzten Dreiecke gleichschenkelig und ähnlich sind, gibt es drei Parameter r , s und t so, dass

$$\mathbf{u} = r(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{v} = s(\mathbf{c} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{w} = t(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

ist. Bezeichnet man schliesslich den Basiswinkel der drei angesetzten Dreiecke mit φ , so erhält man nach einfachen trigonometrischen Rechnungen

$$2r = 1 + \tan \alpha \tan \varphi, \quad 2s = 1 + \tan \beta \tan \varphi, \quad 2t = 1 + \tan \gamma \tan \varphi.$$

Nach etwas mühsamer Rechnung erhält man daraus

$$\begin{aligned} a_1^2 - b_1^2 &= |\mathbf{w} - \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{w}|^2 = R^2 / 2(\cos(2\alpha) - \cos(2\beta))(3 \tan^2 \varphi - 1) \\ &= \frac{\mathbf{c}}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})(3 \tan^2 \varphi - 1) = 2k(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung die Konstante $(3 \tan^2 \varphi - 1)/4$ mit k bezeichnet wurde.

Die zyklische Vertauschung liefert

$$b_1^2 - c_1^2 = 2k(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \quad \text{und} \quad c_1^2 - a_1^2 = 2k(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{c}).$$

Der Ortsvektor $\mathbf{p} = k(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ hat seine Spitze P auf der Eulergeraden. Für den Punkt P gilt

$$AP^2 - BP^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{b})^2 = 2\mathbf{p}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = a_1^2 - b_1^2.$$

Damit erweist sich der auf der Eulergeraden liegende Punkt P wegen

$$AP^2 - a_1^2 = BP^2 - b_1^2 = CP^2 - c_1^2$$

als Potenzzentrum der drei Kreise um A , B und C mit den Radien a_1 , b_1 und c_1 .

M. Vowe, Therwil

Weitere Lösungen sandten F. Bellot und María Ascensión López Chamorro (Valladolid, Spanien), O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Aufgabe 1053. Auf einer Geraden G wähle man zwei Punkte P_1 und P_2 im Abstand $2d$. Zwei Kreisbogen B_1 und B_2 mit Zentren P_1 , P_2 und gleichem Radius $r > d$ bestimmen zusammen mit G ein Spitzbogendreieck D . In D werde eine Kreisfolge (K_n) wie folgt beschrieben:

K_1 berührt G , B_1 und B_2 ; K_n berührt K_{n-1} , B_1 und B_2 ($n \geq 2$). Man berechne den Radius r_n von K_n als Funktion von d , r und n .

J. Binz, Bolligen

Lösung: Legen wir das Spitzbogendreieck D symmetrisch zur y -Achse in die untere Halbebene, so dass sich die Kreisbogen in $S(0 | -\sqrt{r^2 - d^2})$ schneiden und die Gerade G mit der x -Achse zusammenfällt und unterwerfen wir D und die Kreisfolge (K_n) der

Inversion am Kreis mit Zentrum S , der die Gerade G berührt, so erhalten wir eine Folge (K'_n) von in der oberen Halbebene liegenden Kreisen mit folgenden Eigenschaften:

K'_1 berührt die x -Achse und die Geraden $B'_{1,2}$; K'_n berührt K'_{n-1} und $B'_{1,2}$. Die Bildgeraden $B'_{1,2}$ von $B_{1,2}$ sind dabei durch die Gleichungen $\pm 2dx + 2\sqrt{r^2 - d^2}y + r^2 - d^2 = 0$ gegeben. Für die Ordinaten v_n der Berührungspunkte der Kreise K'_n und K'_{n+1} findet man eine Rekursionsformel, indem man berücksichtigt, dass der Radius von K_n einerseits als Abstand des Punktes $(0 | \frac{v_n + v_{n-1}}{2})$ zur Geraden B'_1 erscheint, andererseits $\frac{v_n - v_{n-1}}{2}$ beträgt:

$$\frac{(v_n + v_{n-1})\sqrt{r^2 - d^2} + r^2 - d^2}{2r} = \frac{v_n - v_{n-1}}{2}$$

oder nach v_n aufgelöst

$$v_0 = 0, v_n = \frac{r^2 - d^2 + (r + \sqrt{r^2 - d^2})v_{n-1}}{r - \sqrt{r^2 - d^2}}.$$

Lösen der linearen Rekursion führt auf

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - d^2} \left(\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - d^2}}{r - \sqrt{r^2 - d^2}} \right)^n - 1 \right).$$

Rückgängigmachen der Inversion führt zu den Ordinaten y_n der Berührungspunkte der Kreise K_n und K_{n+1} :

$$y_n = \sqrt{r^2 - d^2} \cdot \frac{(r - \sqrt{r^2 - d^2})^n - (r + \sqrt{r^2 - d^2})^n}{(r - \sqrt{r^2 - d^2})^n + (r + \sqrt{r^2 - d^2})^n},$$

und der gesuchte Radius r_n ergibt sich als

$$\frac{y_{n-1} - y_n}{2} = \frac{2(r^2 - d^2)d^{2n-2}}{(r - \sqrt{r^2 - d^2})^{2n-1} + 2rd^{2n-2} + (r + \sqrt{r^2 - d^2})^{2n-1}}.$$

H. Widmer, Rieden

Weitere Lösungen sandten F. Bellot Rosado und María Ascensión López Chamorro (Valadolid, Spanien), W. Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Raffke (Vechta, BRD), M. Vowe (Therwil), K. Warneke (Vechta, BRD), B. Wollenmann (Rüti), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 1054. Gegeben sei eine Ellipse und zwei einbeschriebene konvexe Vierecke, deren Diagonalen durch einen Punkt verlaufen und sich gegenseitig trennen. Man beweise, dass die Seiten der beiden Vierecke eine und dieselbe Ellipse berühren.

G. Unger, Dornach

Lösung: Durch eine projektive Abbildung können wir stets und gleichzeitig erreichen, dass die gegebene Ellipse auf einen Kreis abgebildet wird und der gemeinsame Diagonalschnittpunkt in dessen Mittelpunkt übergeht, die beiden einbeschriebenen konvexen

Vierecke also zu Rechtecken werden. Weil sich die Diagonalen gegenseitig trennen, ist durch die vier Seiten des einen Rechtecks und eine einzelne Seite des anderen eine dem ersten Rechteck einbeschriebene Ellipse eindeutig bestimmt (Kegelschnitt aus fünf Tangenten). Aus Symmetriegründen berührt dann auch die der Einzelseite gegenüberliegende (parallele) Rechteckseite die Inellipse. Dass schliesslich auch das noch fehlende Rechteckseitenpaar diese Inellipse berührt, ist eine direkte Folge aus der Tatsache, dass der Umkreis der beiden Rechtecke orthoptischer Kreis der Inellipse ist, also die Menge der Punkte darstellt, von welchen aus die Inellipse unter einem rechten Winkel erscheint. Die Urbildellipse dieser gemeinsamen Inellipse der beiden Rechtecke erfüllt dann die in der Aufgabenstellung verlangte Eigenschaft.

Hj. Stocker (Wädenswil ZH)

Eine weitere Lösung sandte O.P. Lossers (Eindhoven, NL).

Bemerkung zu Aufgabe 1039. O.P. Lossers (Eindhoven, NL) weist auf einen Fehler in der publizierten Lösung hin: Die obere Summationsgrenze der inneren Summe in der 4. Formelzeile v.u. lautet korrekt $\min(k, \lfloor q/p \rfloor)$ anstatt k . Damit ergibt sich sogar $a(k, m, n) = b(k, m) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$; $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O.P. Lossers zeigt, dass allgemein

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \binom{u+vj}{k-1} = 0$$

für beliebige $u, v \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. In der Tat ist $\binom{u+vj}{k-1}$ ein Polynom in j vom Grad $k-1$, und es gilt bekanntlich

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^s = 0 \text{ für } s = 0, \dots, k-1.$$

Berichtigung zu Aufgabe 1058. Die rechte Seite der Ungleichung (1) ist zu ersetzen durch $\sqrt{2nR}$.