

# Sur la nature de la réalité mathématique

Autor(en): **Connes, Alain**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **47 (1992)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43908>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

---

## Sur la nature de la réalité mathématique

---

---

A. Connes,  
Collège de France, Paris

Alain Connes wurde 1947 in Darguignan (Frankreich) geboren. 1973 erhielt er ein Doctorat d'Etat an der Université Paris VI. Nach Tätigkeiten an verschiedenen Universitäten und Forschungsinstituten, darunter am Institute for Advanced Study in Princeton wurde er 1979 Professor am renommierten Institut des Hautes Etudes Scientifiques in Bures-sur-Yvette und etwas später auch am Collège de France. Die mathematischen Interessen von Alain Connes sind weitgespannt; im Laufe seiner Forschungstätigkeit hat er sich mit sehr vielen verschiedenen Gebieten beschäftigt, die sich von der Analysis über die mathematische Physik und die Geometrie bis hin zur Algebra erstrecken. Für sein wissenschaftliches Werk hat er eine grosse Anzahl von Auszeichnungen erhalten. Die darunter bedeutendsten sind wohl die Fields-Medaille, die Connes am Internationalen Mathematiker Kongress in Warschau (1982/83) erhalten hat, und seine Ernennung zum Mitglied der Académie des Sciences in Paris.

Les mathématiques posent, dès que l'on essaye d'en parler, un problème spécifique qui a trait à la nature de la réalité mathématique. Il est simple pour un physicien des particules, un chimiste, un géologue ou un astronome de poser au départ quel est l'objet de son travail, il s'agit à diverses échelles d'étudier la structure et l'organisation de la matière. L'existence d'un monde matériel extérieur est un a priori simple dont la

Beim hier abgedruckten Beitrag handelt es sich um das im wesentlichen unveränderte Manuskript eines Vortrages, den Alain Connes am 11. Februar 1991 im Rahmen der "Wolfgang Pauli-Vorlesungen" an der ETH Zürich für ein allgemeines Publikum gehalten hat. Diese Gedenkvorlesungen werden alljährlich zu Ehren des mathematischen Physikers und Nobelpreisträgers Wolfgang Pauli durchgeführt, der von 1928 bis zu seinem Tod im Jahre 1958 an der ETH Zürich wirkte. Im jährlichen Turnus werden sie von einem Physiker, Chemiker, Biologen oder Mathematiker von Weltrang gehalten. Sie bestehen üblicherweise aus drei Vorträgen, wobei sich jeweils der erste an eine allgemeine Zuhörerschaft wendet. Alain Connes wählte dafür ein Thema, das in der Vergangenheit Philosophen, Naturwissenschaftler und Mathematiker intensiv beschäftigt hat; man denke nur an die entsprechenden Schriften von Leibniz, Helmholtz, Riemann, Russell, Planck, Einstein, Brouwer, Weyl u.a. In neuester Zeit allerdings scheint der Gegenstand nicht mehr so häufig abgehandelt zu werden wie früher. Um so mehr dürfte die Meinung von Alain Connes, einem Träger der Fields-Medaille, interessieren.

remise en cause n'intervient qu'avec le problème de la mesure en mécanique quantique. La distinction entre invention et découverte est également claire, on invente des outils nouveaux d'exploration tel que le microscope à effet tunnel, on découvre des structures telle que celle en double hélice de l'ADN. Il ne viendrait à personne, l'idée que Watson et Crick ont inventé cette structure et que celle-ci a commencé son existence comme un état physique des neurones de leur cerveau.

Il en va autrement pour les mathématiques et l'évidence des considérations que je viens de faire cède la place à une interrogation philosophique légitime devant la difficulté qu'il y a, pour un mathématicien, à spécifier devant un matérialiste pur et dur la nature de la réalité mathématique et du travail de mathématicien. J'en ai fait l'expérience dans un long dialogue avec J.P. Changeux.

On classe intuitivement les mathématiciens interrogés sur la nature de leur sujet en deux groupes:

- A) Les "Platoniciens" qui se considèrent comme les explorateurs d'un "monde mathématique" dont l'existence ne fait pour eux aucun doute et dont ils découvrent la structure.
- B) Les "Formalistes" qui se retranchent derrière une attitude sceptique, les mathématiques n'étant pour eux qu'une suite de déductions logiques dans un système formel, et en quelque sorte un langage purifié.

Pour une large part de la communauté scientifique dont vous faites sans doute partie, les mathématiques sont avant tout rencontrées et utilisées comme un langage. Le chimiste ou le biologiste par exemple, sont amenés dans certains cas à utiliser le langage mathématique pour mieux spécifier et exprimer leur pensée. Dans des problèmes de modélisation les mathématiques, en permettant de comprimer l'information, ne jouent guère que le rôle d'un langage. Une formule mathématique réduit simplement la complexité d'une information. Pour prendre un exemple, si l'on devait transmettre à une autre planète les temps des levers et de couchers du soleil à Zurich depuis 10 ans, une simple formule mathématique y suffirait, alors que l'information contenue dans les résultats du tirage du loto depuis dix ans est strictement incompressible. Cette utilisation du langage mathématique, et même du côté génératif et déductif d'un langage, donne au scientifique non mathématicien l'impression de comprendre le sens des mathématiques et de pouvoir ainsi les réduire à un langage. Ce point de vue est cohérent avec celui des formalistes qui a donc à priori la sympathie du scientifique non mathématicien.

En fait comme nous le verrons plus tard dans cet exposé les travaux de K. Gödel en 1930 ont montré que le formalisme au sens strict conduit à une impasse. Mon but aujourd'hui est avant tout de prendre modestement ce problème philosophique pour prétexte pour une visite guidée, au delà du réel tangible, à travers "l'univers mathématique", puis de discuter les implications des résultats de Gödel sur le débat entre platoniciens et formalistes.

## Réalité mathématique brute

Il y a pour le mathématicien deux sources vigoureuses d'expérimentation et d'information directes, qui sont d'une part, l'espace physique, source de la géométrie, d'autre part les entiers naturels, source de la théorie des nombres. Un nombre entier est premier, tel 2213, s'il n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même. Une expérimentation simple avec les nombres, disons de un à cent ou de un à mille, montre que la liste des nombres premiers semble continuer indéfiniment. Une exploration plus poussée à l'aide d'un ordinateur n'infirme pas cette impression mais ne peut en rien la prouver. Le travail du mathématicien consiste à remplacer cette constatation expérimentale par une preuve. Pour les nombres premiers, cela remonte à Euclide. Que dit le résultat? Qu'à toute personne qui prétendra avoir trouvé le plus grand de tous les nombres premiers, disons  $p = 2^{132049} - 1$ , il sera facile de rétorquer "vous vous trompez" et d'expliquer une méthode par laquelle on trouvera un nombre premier plus grand. On se heurte donc bien ainsi à une réalité, tout aussi contraignante que notre réalité extérieure familière; dit autrement, peu importe le temps que nous laisserions à quelqu'un pour trouver le plus grand nombre premier, nous savons l'entreprise vouée à l'échec. Ce faisant le mathématicien réussit à dévoiler un aspect, ici l'infinité des nombres premiers, d'une réalité tout aussi mystérieuse et à priori incohérente que la réalité qui nous entoure. S'il veut entrevoir comment cette infinité de nombres premiers est répartie parmi les entiers, l'expérimentation peut être largement aussi déroutante que dans le monde extérieur, par exemple, parmi les cent entiers qui précèdent dix millions, il y a neuf nombres premiers et il n'y en a que deux parmi les cent suivants. Cette réalité cependant a la même "extraordinaire intelligibilité" que la réalité extérieure et, pour ne prendre qu'un exemple, la célèbre conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction  $\zeta$  signifie qu'à l'ordre de  $\sqrt{x} \log x$ , près, on a la formule suivante pour le nombre de nombres premiers plus petit que  $x$ :

$$\pi(x) \sim \int_0^x \frac{du}{\log u} = \text{Li}(x)$$

(formule empiriquement obtenue par Legendre et Gauss). Cette conjecture n'est toujours pas démontrée, mais l'on sait, grâce à Hadamard et de la Vallée Poussin, que l'on a bien équivalence  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ , puis grâce à Landau et Vinogradov que  $\text{Li}(x)$  donne bien un développement asymptotique de  $\pi(x)$ .

Pour vous donner un autre exemple de fait empirique simple que l'on ne sait toujours ni démontrer, ni infirmer, 8 et 9 sont deux puissances et sont des entiers consécutifs, on ne sait pas si ce sont les seuls. Il s'agit là en quelque sorte d'un fait expérimental brut qu'il s'agit d'élucider. J'espère que ces exemples simples font ressentir à ceux entre vous qui ont une certaine familiarité avec les nombres entiers au delà de 10, l'existence d'une réalité mathématique primitive, brute, non structurée à priori, qui a pour sujet l'arithmétique. Que cette réalité ne soit pas localisable dans l'espace temps n'a que peu d'importance, elle n'en est pas moins explorable de plus en plus loin, ne serait ce qu'expérimentalement grâce à l'ordinateur.

Pour ceux d'entre vous qui sont plus sensibles à l'espace qu'aux entiers, voici un autre exemple, qui montre bien comment les mathématiques permettent de lever la barrière qui nous confine au réel tangible. Le sens de la vue, par son élaboration, nous donne

une perception directe, de nature intuitive, des propriétés de l'espace. Cela me permet de vous communiquer directement par les figures suivantes la notion de polyèdre régulier. Ce sont les "cinq solides platoniciens".

Polyèdres réguliers dans l'espace euclidien à trois dimensions					
polyèdre	faces	nombre de sommets	nombre d'arêtes	nombre de faces	nombre de faces autour d'un sommet
tétraèdre	triangle régulière	4	6	4	3
octaèdre	triangle régulière	6	12	8	4
icosaèdre	triangle régulière	12	30	20	5
héxaèdre	carré	8	12	6	3
dodécaèdre	pentagon régulier	20	30	12	3

Fig. 1 Les cinq solides platoniciens

Le mathématicien commence par formuler, en les conceptualisant, ce qui apparaît comme des régularités dans chacun de ces polyèdres. En fait, on sait depuis Platon, caractériser ces polyèdres par 1) leur convexité, 2) l'impossibilité de discerner entre deux sommets et de discerner entre deux faces i.e. la symétrie.

### Conceptualisation et formalisation, voyage au delà du réel tangible

Ainsi, à la connaissance inductive, expérimentale, de chacun de ces polyèdres réguliers, s'oppose un énoncé, de nature projective, qui caractérise les objets obtenus par les propriétés simples de convexité et symétrie. Une fois conceptualisées, les régularités ainsi observées deviennent indépendantes d'un contexte particulier, tel ici la dimension; i.e. le nombre trois, de l'espace dans lequel on travaille. L'on peut donc transposer la même question dans un espace de dimension arbitraire. Dans l'espace géométrique de dimension deux qu'est le plan, le nombre de polygones réguliers n'est pas limité et il suffit de donner le nombre de leurs côtés. Dans l'espace de dimension quatre, il y a six polyèdres réguliers, dont les caractéristiques sont décrites dans le tableau que voici.

Polyèdres réguliers dans l'espace euclidien à quatre dimensions			
polyèdre	polyèdres à trois dimensions		nombre de sommets
	sorte	nombre	
5-èdre régulier	tétraèdre	5	5
8-èdre régulier	cube	8	16
16-èdre régulier	tétraèdre	16	8
24-èdre régulier	octaèdre	24	24
120-èdre régulier	dodécaèdre	120	600
600-èdre régulier	tétraèdre	600	120

Fig. 2 Les six polyèdres réguliers en dimension quatre

Enfin en dimension  $n$  arbitraire plus grande ou égale à cinq, voici le résultat:

Polyèdres réguliers dans l'espace euclidien en $n$ dimensions ( $n \geq 5$ )			
polyèdre	polyèdre à $(n - 1)$ dimensions		nombre de sommets
	sorte	nombre	
$(n + 1)$ -èdre régulier	$n$ -èdre régulier	$n + 1$	$n + 1$
$2n$ -èdre régulier	$(2n - 2)$ -èdre régulier	$2n$	$2^n$
$2^n$ -èdre régulier	$n$ -èdre régulier	$2^n$	$2n$

Fig. 3 Polyèdres réguliers en dimension  $n$ ,  $n \geq 5$

Il est difficile d'avoir par nos sens, une représentation visuelle intuitive d'un polyèdre régulier dans l'espace de dimension quatre, et cela simplement car la vue est limitée à l'espace tridimensionnel. On peut, bien sûr, essayer de donner une image dynamique, i.e. un film, en intersectant par exemple le polyèdre avec une famille d'hyperplans, dépendant du paramètre temps. Mais si l'on réfléchit à ce que cela nous donnerait même pour un cube que l'on coupe par des plans perpendiculaires à la grande diagonale, l'on sent très bien que l'on reste bien loin de l'évidence visuelle et de la série de connexions qui s'y rattachent. Les mathématiques remplacent l'intuition visuelle par une démarche de conceptualisation, qui en dépouillant l'objet étudié de tous les caractères parasites, permet de comprendre, sans les voir, les configurations de dimension supérieure. L'évidence visuelle cède alors la place à un travail beaucoup plus ardu et, par exemple, le comportement en grande dimension donne bien souvent des surprises. Savez – vous, par exemple, que pour  $n$  assez grand un voisinage d'ordre  $\varepsilon$  de l'équateur d'une sphère de dimension  $n$  occupe la majeure partie de la sphère.

### Perception inductive et projective et l'acte créateur de la conceptualisation

Je n'aime pas, par ignorance, les termes philosophiques, et comme la distinction que je veux faire est de cette nature, je me contenterai de donner quelques exemples simples. Si dans une liste d'un millier de noms je cherche à en reconnaître un, par exemple le mien, il y a 2 manières de procéder. L'une consiste à les passer en revue un par un et à examiner en détail si c'est le bon, l'autre consiste à éliminer d'emblée ceux qui n'ont pas la bonne première lettre, puis parmi ceux qui restent à éliminer ceux qui n'ont pas la bonne deuxième lettre et ainsi de suite. Le mathématicien que je suis reconnait là, la distinction entre l'inductif et le projectif et j'emploierai donc ces mots. Dans le langage courant on peut aussi également reconnaître les deux manières de procéder. Le début d'un roman peut être soit de nature inductive "Paris, place du panthéon, 2 Mai 1981, 11 heures du matin" soit de nature projective "Allongé sur son lit, il écoutait la radio". La conceptualisation contenue dans un mot comme le mot chaise recouvre bien entendu un découpage projectif dont aucun exemple spécifique tel "cette chaise" n'épuise le contenu. Le langage courant a ces deux aspects. Il étiquette d'une part de manière inductive par des noms de rue etc. et de manière archaïque anthropocentriste les points de l'espace, et d'autre part, il découpe de manière projective la réalité extérieure, en extrayant des concepts à priori transposables et applicables à d'autres situations.

Je pense que l'acte créateur en mathématiques se situe au niveau du langage et au niveau du découpage projectif et conceptuel de la réalité mathématique. Il faut pour cela faire la distinction entre une réalité mathématique brute étiquetée au départ de manière inductive avec une large part d'arbitraire, telle que les entiers dans le système décimal, et le système formel de nature axiomatique déductive que le cerveau humain met au point pour percevoir et appréhender cette réalité mathématique brute. Un fait empirique de l'arithmétique a bien peu de chance d'être compris s'il ne se formule pas de manière naturelle et esthétique dans le langage du système formel du mathématicien. Même si c'est le cas, et ça l'est pour l'hypothèse de Riemann, le problème peut très bien rester en tant que tel trop difficile, mais le mathématicien possède t'il au moins la possibilité de considérer un problème analogue, (transplanté comme dirait Oka) dans une situation voisine plus simple. La résolution du problème analogue éclaire bien souvent le cas initial.

C'est Galois (et Abel) qui a compris comment formuler de manière conceptuelle le problème bien naturel de résoudre une équation algébrique de degré  $n$  par radicaux, i.e. trouver un analogue de la formule donnant les deux racines d'une équation du deuxième degré. La notion qu'il a dégagée est celle de groupe, ici le groupe d'indiscernabilité des racines d'une équation. Je ne veux pas vous importuner en vous expliquant ce qu'est un groupe, mais simplement vous donner par un dessin l'application du groupe  $S_4$  des permutations de quatre lettres  $A, B, C, D$  sur le groupe  $S_3$  des permutations de trois lettres  $\alpha, \beta, \gamma$ , qui permet de ramener l'équation générale du quatrième degré à des équations de degré inférieur ou égal à trois.

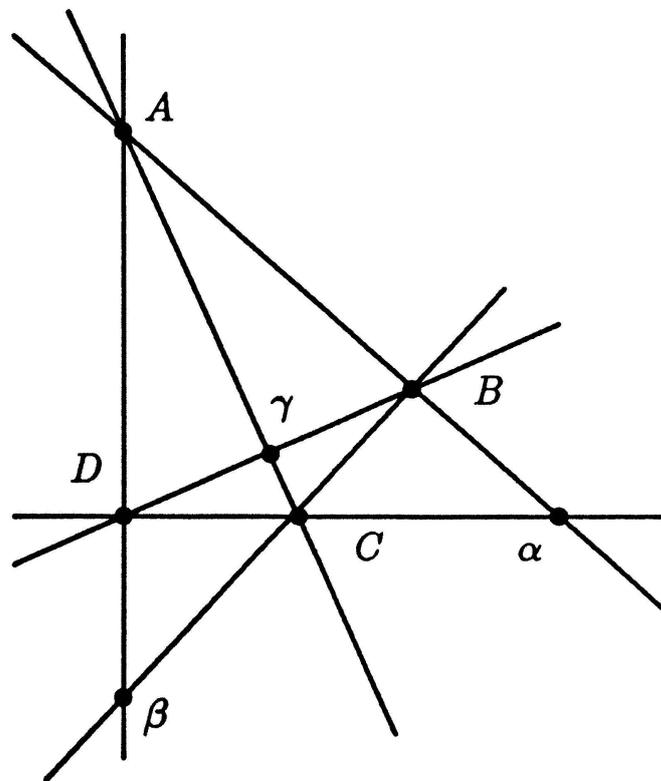


Fig. 4 L'application du groupe  $S_4$  sur le groupe  $S_3$ . Une permutation des quatre points  $A, B, C, D$  induit une permutation des trois points  $\alpha, \beta, \gamma$ , et toute permutation des points  $\alpha, \beta, \gamma$  s'obtient de cette manière.

Après près de deux siècles d'efforts, les mathématiciens ont réussi à classifier, c'est à dire à obtenir la liste exhaustive, tous les groupes finis simples, c'est à dire des groupes finis qui (contrairement au groupes  $S_4$ ) ne peuvent se diviser en groupes plus petits.

Avant que cette classification ne soit possible, un problème plus simple, et à nouveau transplanté du problème ci dessus, avait été résolu, par E. Cartan, S. Lie, à savoir celui de la classification des groupes continus de transformations, ceux de la géométrie. Il faut bien voir que malgré les apparences, ces groupes continus sont plus faciles à traiter que les groupes finis, car on dispose pour eux d'un outil très puissant, le calcul infinitésimal. La liste suivante est la liste exhaustive des groupes finis dits sporadiques, qui échappent à la liste des groupes simples obtenus par transplantation des résultats sur les groupes continus. La liste est close, peu importe l'imagination ou l'esprit inventif, il s'agit bien d'un coin du voile qui est soulevé et nous fait découvrir la réalité mathématique dans toute sa splendeur. Ce qui caractérise cette situation c'est la détermination de manière univoque d'une réalité inductive par une caractérisation projective. Ainsi pour prendre un exemple quelque peu sophistiqué, le monstre est le groupe sporadique dont la cardinalité est la plus grande. Je ne connais pas d'énoncé analogue dans le langage courant, ainsi vivons – nous dans la troisième planète d'un système planétaire autour d'une étoile située sur l'un des bras d'une galaxie en spirale, mais cela ne singularise probablement pas notre terre. Il me semble donc ainsi que le sentiment de cerner complètement un élément de réalité extérieure n'appartient pour l'instant qu'aux seules mathématiques.

En conclusion je vais essayer de montrer en quel sens les travaux de K. Gödel permettent de distinguer la réalité mathématique primitive du système de perception que le cerveau humain élabore pour la comprendre et l'explorer. Le point de vue des formalistes est que les mathématiques sont uniquement des constructions hypothético-déductives, élaborées par l'homme, et dont le trait essentiel est d'être exemptes de contradictions. Ce point de vue a été formalisé par le mathématicien David Hilbert dans le but de définir clairement et sans ambiguïté ce qu'est une démonstration mathématique. Hilbert a ainsi introduit la notion de système formel. Un tel système est donné par un alphabet fini, une grammaire qui spécifie ce qu'est un énoncé cohérent, d'un nombre fini de propositions supposées vraies, ou axiomes, et de règles d'inférence logique qui permettent de procéder à des déductions. L'espoir entretenu par les mathématiciens pendant une assez longue période, était ainsi de réduire les mathématiques à un tel langage formel. Si ce rêve avait abouti, le point de vue exprimé par les formalistes serait parfaitement justifié et il serait en effet tentant de réduire les mathématiques à un langage. Les travaux de Gödel aux environs de 1930 ont donné une réponse négative et définitive à ces espoirs de formalisation. En général on parle d'indécidabilité, mais l'énoncé le plus fort et le plus troublant pour les formalistes est bien le suivant, que j'énonce sans entrer dans les détails techniques:

Pour tout système déductif formel  $S$  non contradictoire, il existe un énoncé *vrai* portant sur les propriétés des entiers naturels, et qui est *indémontrable* dans  $S$ .

Ainsi un système déductif formel, i.e. l'outil projectif que nous mettons au point grâce à notre cerveau pour percevoir la réalité mathématique, ne peut épuiser même les propriétés des entiers naturels. Ainsi l'information contenue dans la réalité primitive, brute, des entiers naturels n'est pas de type fini et échappera à toute tentative de la réduire aux déductions d'un langage formel. Ce résultat montre très clairement la distinction entre

cette réalité mathématique primitive et le système déductif que l'homme élabore pour l'analyser et la comprendre. Il est clair que ce système est une élaboration de notre cerveau, et qu'il a une évolution presque biologique par sélection et intégration au "corpus culturel" des mathématiques engrangées dans les bibliothèques. Mais si on l'oppose à la réalité mathématique primitive qu'il a pour objet, on y gagne sur le plan conceptuel, en enlevant le côté négatif du théorème de Gödel, et même sur la compréhension de la pratique du mathématicien. Il est d'ailleurs à ce propos amusant de constater qu'il n'est même plus nécessaire d'être mathématicien pour percevoir, grâce aux pouvoirs exploratoires des ordinateurs, l'existence du monde de l'arithmétique ou de l'itération. Vouloir réduire ce monde à des états physiques du cerveau, c'est un peu vouloir réduire la littérature à des réactions entre molécules d'encre et de papier. Les mathématiciens ont en général un sens aigu de la distinction qui existe entre 1) mettre au point des outils 2) soulever un coin du voile qui recouvre la réalité mathématique primitive. Ainsi un outil nouveau n'acquiert t'il vraiment droit à autre chose qu'à une bienveillante méfiance, que quand il a été essentiel dans ce que les Anglo-Saxons appellent fort justement un "breakthrough", un passage en force à travers le voile qui nous aveugle. Je finirai en citant Paul Valéry, selon lequel on ne lève ce voile qui masque la réalité mathématique qu'avec un mélange rare de concentration et de désir.

Alain Connes,  
Collège de France,  
11 Place Marcellin Berthelot,  
F-75005 Paris, Cedex 05