

Konvergenz von Teilen der harmonischen Reihe

Autor(en): **Stadje, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-43269>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Moreover, this value of ϱ_n appears to be the greatest possible in the context of the generalized Main Theorem.

A. Bezdek, Cornell University, Ithaca and Hungarian Academy of Sciences, Budapest
W. Kuperberg, Auburn University, Auburn

REFERENCES

- 1 Bezdek A.: Remark on the closest packing of convex discs, *Studia Sci. Math. Hungar.* 15 (1980), 283–285.
- 2 Böröczky K.: Closest packing and loosest covering of the space with balls, *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 79–89.
- 3 Fejes Tóth L.: Remarks on the closest packing of convex discs, *Comment. Math. Helvet.* 53 (1978), 536–541.
- 4 Horváth J.: Über die Enge von Zylinderpackungen und die Lockerheit von Zylinderüberdeckungen im n -dimensionalen Euklidischen Raum. *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 219–255.
- 5 Rourke C. P., Sanderson B. J.: Introduction to piecewise linear topology, Springer Verlag 1982.

© 1991 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/91/02000-03 \$ 1.50 + 0.20/0

Konvergenz von Teilen der harmonischen Reihe

1. Einleitung

Es seien M die Menge der natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung keine «9» auftritt, und P die Menge der Primzahlen. Dann ist wohlbekannt, daß (i) $\sum_{n \in M} n^{-1}$ konvergiert, wobei (ii) $\sum_{n \in P} n^{-1}$ divergiert. Ergebnis (i) geht wohl auf Kempner (1914) zurück; einen einfachen Beweis, der die Abschätzung $\sum_{n \in M} n^{-1} < 90$ liefert, findet man in Honsberger (1982), S. 89 ff. Irwin (1916) und Wadhwa (1975) geben untere und obere Schranken für die analoge Reihe an, die durch Weglassen aller eine «0» enthaltenden Terme entsteht. In dieser Arbeit wollen wir für eine ganze Klasse nach diesem Muster gebildeter Reihen eine einfache Abschätzung herleiten. Dieses Ergebnis werden wir dann anwenden, um zu zeigen, daß es für jedes $k \geq 0$ eine Primzahl gibt, deren Dezimaldarstellung eine gegebene Ziffer (etwa «9») mehr als k -mal enthält, und um eine obere Schranke für die kleinste derartige Primzahl zu gewinnen.

2. Teilreihen von $\sum n^{-1}$

Im folgenden seien eine natürliche Zahl $d \geq 2$, ein $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ und eine ganze Zahl $k \geq 0$ fest gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine eindeutige d -adische Darstellung $n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \dots$ mit $a_0, a_1, \dots \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Die Koeffizienten a_i nennen wir die Ziffern von n . Sei nun M die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren d -adischer Entwicklung die Ziffer j höchstens k -mal auftritt.

Satz: Es gilt

$$\sum_{n \in M} n^{-1} < d^{k+1} (1 + \ln(d^{k+1} - 1)) < d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d). \quad (1)$$

Beweis: Sei für beliebiges $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$A_n = \{n d^{k+1}, n d^{k+1} + 1, \dots, (n+1) d^{k+1} - 1\}. \quad (2)$$

Die Menge A_n besteht aus d^{k+1} aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Folglich existiert für jede beliebige Kombination $a_0, \dots, a_k$ von $k+1$ Ziffern aus $\{0, 1, \dots, d-1\}$ ein Element aus A_n mit diesen Endziffern. Insbesondere gibt es eine Zahl aus A_n , die die Ziffer j an den letzten $k+1$ Stellen ihrer d -adischen Darstellung hat. Daher besitzt $A_n \cap M$ höchstens $d^{k+1} - 1$ Elemente. Für $n \in \mathbb{N} \setminus M$ gilt $A_n \cap M = \emptyset$, denn jede Zahl aus A_n hat mindestens so viele Ziffern j wie n , falls $n \geq 1$.

Wir setzen

$$s_n = \sum_{i \in A_n \cap M} i^{-1}, \quad n \geq 0. \quad (3)$$

Dabei sei die leere Summe als 0 definiert. Für $n \in M$ folgt offenbar

$$s_n \leq (d^{k+1} - 1)/n d^{k+1}. \quad (4)$$

Für beliebiges $i \geq 2$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1} &= \sum_{l=0}^{i-1} \left(\sum_{n \in A_l \cap M} n^{-1} \right) = \sum_{n \in A_0 \cap M} () + \sum_{l=1}^{i-1} () \\ &< \sum_{n=1}^{d^{k+1}-1} n^{-1} + \sum_{\substack{1 \leq l < i \\ l: A_l \cap M \neq \emptyset}} s_l \\ &< 1 + \ln(d^{k+1} - 1) + \frac{d^{k+1} - 1}{d^{k+1}} \sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei haben wir für die zweite Ungleichung die Beziehung $2^{-1} + 3^{-1} + \dots + N^{-1} < \ln(N-1)$ sowie (4) ausgenutzt. Aus (5) folgt

$$\sum_{\substack{n \in M \\ n < i d^{k+1}}} n^{-1} < d^{k+1} (1 + \ln(d^{k+1} - 1)). \quad (6)$$

Da (6) für jedes $i \geq 2$ gilt, liefert der Grenzübergang $i \rightarrow \infty$ die Behauptung.

Beispiel: Sei $d = 10$, $j = 9$. Für die harmonische Reihe ohne Brüche, die eine Ziffer «9» enthalten, ergibt der Satz die obere Schranke $10(1 + \ln 9) = 31,97 \dots$. Lässt man nur die

Brüche weg, die mindestens zweimal die Ziffer «9» enthalten, so ist die entstehende Reihe kleiner als $100(1 + \ln 99) < 5596$.

Korollar: Die Teilmenge P von $\mathbb{N}$ habe die Eigenschaft

$$\sum_{n \in P} n^{-1} = \infty.$$

Dann gibt es eine Zahl $p_0 \in P$, deren d -adische Darstellung mindestens $(k+1)$ -mal die Ziffer j enthält und für die

$$f(p_0) := \sum_{\substack{n \in P \\ n < p_0}} n^{-1} \leq d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d) \quad (7)$$

gilt.

Beweis: Da P nicht in M enthalten sein kann, gibt es ein $p_0 \in P$, das $(k+1)$ -mal die Ziffer j enthält. Sei p_0 mit dieser Eigenschaft minimal gewählt. Es folgt:

$$\sum_{\substack{n \in P \\ n < p_0}} n^{-1} \leq \sum_{\substack{n \in M \\ n < p_0}} n^{-1} < d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d).$$

Die Abschätzung (7) gilt für jede Ziffer $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$. Somit enthält die Menge $\{p \in P \mid f(p) < d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d)\}$ für jede Ziffer $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ eine Zahl, in deren d -adischer Darstellung j mindestens $(k+1)$ -mal auftritt.

Die Abschätzung (7) ist oft zur Bestimmung einer oberen Schranke für p_0 nützlich. Falls zum Beispiel P die Menge der Primzahlen ist, kennt man das Verhalten von $f(p)$ für große Werte von p . Im allgemeinen kann man $f(p)$ mit Hilfe der oft leichter zugänglichen Funktion

$$\pi(n) = \text{Anzahl der } i \in P \text{ mit } i \leq n$$

nach unten abschätzen. Man setze nämlich $I_n = 1$ für $n \in P$ und $I_n = 0$ sonst. Dann ist $\pi(n) = I_1 + \dots + I_n$ und

$$\begin{aligned} f(2^i) &= \sum_{n=1}^{2^i} I_n/n = 2^{-i} \pi(2^i) + \sum_{n=1}^{2^i-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \pi(n) \\ &= \sum_{v=1}^{i-1} \sum_{n=2^v}^{2^{v+1}-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \pi(n) \\ &> \sum_{v=1}^{i-1} \pi(2^v) (2^{-v} - 2^{-v-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{i-1} 2^{-v} \pi(2^v). \end{aligned} \quad (8)$$

Insbesondere folgt

$$f(p_0) \geq f(2^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor}) > \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor - 1} 2^{-v} \pi(2^v). \quad (9)$$

Somit ergibt sich für p_0 die Beziehung

$$\sum_{v=1}^{\lfloor \log_2 p_0 \rfloor - 1} 2^{-v} \pi(2^v) < 2 d^{k+1} (1 + (k+1) \ln d). \quad (10)$$

3. Primzahlen mit vielen Neunen

Sei nun P die Menge der Primzahlen. Dann gilt bekanntlich

$$f(p_0) = \sum_{\substack{p \in P \\ n < p_0}} p^{-1} = \ln(\ln p_0) + a + O(e^{-c(\ln p_0)^{1/2}}) \quad \text{für } p_0 \rightarrow \infty \quad (11)$$

(Prachar (1957), S. 80). In (11) ist c eine positive Konstante und

$$a = \gamma - \sum_{p \in P} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m p^m} > 0, \quad (12)$$

wobei γ die Eulersche Konstante ist. Nach dem Korollar gibt es für beliebiges $k \geq 0$ und $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ eine Primzahl p_0 , in deren d -adischer Entwicklung die Ziffer j mindestens $(k+1)$ -mal vorkommt. Für hinreichend großes k gilt $f(p_0) > \ln(\ln p_0)$, so daß nach (7)

$$p_0 < \exp(d^{(k+1)d^{k+1}} \exp(d^{k+1})) \quad (13)$$

folgt. Die obere Schranke in (12) ist recht groß; für $d = 10$ und $k = 9$ ist sie z. B. gleich

$$10^{10(10 + \ln 10) 10^{10} \ln 10},$$

also eine Zahl mit (in Dezimalschreibweise) mindestens $2,303 \cdot 10^{1,2303 \cdot 10^{11}}$ Ziffern.

W. Stadje, Universität Osnabrück

LITERATUR

- 1 Honsberger R.: Mathematische Juwelen. Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1982.
- 2 Irwin F.: A curious convergent series. Amer. Math. Monthly 23, 149 (1916).
- 3 Kempner A. J.: A curious convergent series. Amer. Math. Monthly 21, 48 (1914).
- 4 Prachar K.: Primzahlverteilung. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1957.
- 5 Wadhwa A. D.: An interesting subseries of the harmonic series. Amer. Math. Monthly 82, 931 (1975).