

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 45 (1990)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 1021. Es sei

$$H(x, y) := \frac{2xy}{x+y}, \quad G(x, y) := (xy)^{1/2}, \quad A(x, y) := \frac{x+y}{2},$$

$$M_r(x, y) := \left(\frac{x^r + y^r}{2} \right)^{1/r}; \quad x, y > 0, \quad r \neq 0.$$

Man zeige, dass für $x \neq y$

$$H(x, y) < H(M_r(x, y), M_{-r}(x, y)) < G(x, y) < A(M_r(x, y), M_{-r}(x, y)) < A(x, y).$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Lösung: Für $x, y > 0$ folgt aus den gegebenen Definitionen

$$H(x, y) = 1/A\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \tag{1}$$

$$G\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = 1/G(x, y) \tag{2}$$

sowie bei $r \neq 0$

$$M_r\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = 1/M_{-r}(x, y). \tag{3}$$

Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt unter denselben Voraussetzungen

$$G(x, y) = ((xy)^{r/2})^{1/r} \leq \left(\frac{x^r + y^r}{2} \right)^{1/r} = M_r(x, y) \tag{4}$$

mit Gleichheit genau für $x = y$.

Seien jetzt o.B.d.A. $y < x$ und $0 < r$. Dann ist $M_r(x, y) < x$ und $M_{-r}(x, y) < y$, also hat man die rechte Hälfte von

$$G(x, y) < A(M_r(x, y), M_{-r}(x, y)) < A(x, y); \tag{5}$$

die linke Hälfte erhält man aus (4), wo nun strenge Ungleichung gilt. Natürlich gilt (5) für $x \neq y$ und $r \neq 0$.

Ersetzt man x, y in (4) durch $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$, so entsteht daraus wegen (1), (2) und (3)

$$1/G(x, y) < A(1/M_{-r}(x, y), 1/M_r(x, y)) < 1/H(x, y), \tag{6}$$

was die restliche Behauptung der Aufgabenstellung liefert, da der mittlere Term in (6) wegen (1) gleich $1/H(M_{-r}(x, y), M_r(x, y))$ ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten F. Bellot und A. López (Valladolid, Spanien), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), H.-J. Seiffert (Berlin), J. Waldmann (Jena), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1022. Die Zahlenfolgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ seien durch die Anfangswerte $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 2$ und die Rekursionsformeln

$$a_{n+1} = c_n^3 - 3a_n^2 b_n, \quad b_{n+1} = 2b_n^3 + 3a_n b_n c_n, \quad c_{n+1} = c_n^3 + 2b_n^3 + 3a_n b_n^2 \quad (n \geq 0)$$

gegeben. Zeige, dass die Zahlenfolgen $(a_n/b_n), (a_n/c_n), (b_n/c_n)$ konvergent sind, und bestimme ihre Grenzwerte.

J. Binz, Bolligen

Solution: Let $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ and $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$. The Fibonacci numbers are given by $F_m = (\alpha^m - \beta^m)/\sqrt{5}$ for $m = 0, 1, \dots$. We first prove that

$$a_n = F_{m-1}, \quad b_n = F_m, \quad c_n = F_{m+1},$$

with $m = 2 \cdot 3^n$. For $n = 0$ this is obvious, and for $n \geq 0$ it then follows from the recursion formulas

$$\begin{aligned} F_{3m-1} &= F_{m+1}^3 - 3F_{m-1}^2 F_m, \\ F_{3m} &= 2F_m^3 + 3F_{m-1} F_m F_{m+1}, \\ F_{3m+1} &= F_{m+1}^3 + 2F_m^3 + 3F_{m-1} F_m^2. \end{aligned}$$

These recursion formulas can be proved by substituting the above expression for F_m . This is a little laborious, but straightforward, and is thus omitted here.

Now using $\alpha > 1$ and $|\beta| < 1$ it follows easily that for $n \rightarrow \infty$, and thus also $m \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha^m - \beta^m} \rightarrow \frac{1}{\alpha}, \\ \frac{a_n}{c_n} &= \frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}} \rightarrow \frac{1}{\alpha^2}, \\ \frac{b_n}{c_n} &= \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}} \rightarrow \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

B. M. M. de Weger, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), W. Janous (Innsbruck, A) O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (Stockdorf, BRD), B. Ruh (Solothurn), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1023. Man zeige: Jede Kurve 4. Ordnung mit der Gleichung

$$y = f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad a_4 \neq 0$$

lässt sich perspektiv-affin auf sich selbst abbilden. Man bestimme die Affinitätsachse und die Affinitätsrichtung.

M. Herter, Männedorf

Lösung (Bearbeitung der Redaktion). Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems lässt sich bekanntlich erreichen, dass sich die Gleichung der Kurve k auf

$$k: y = A x^4 + B x^2 + C x$$

reduziert. Die Gleichung einer beliebigen, zur Tangente in $O = (0, 0)$ parallelen Geraden g lautet dann

$$g: y = C x + p.$$

Für die Abszissen der Schnittpunkte von k und g ergibt sich somit die nur gerade Potenzen von x enthaltende Gleichung

$$A x^4 + B x^2 - p = 0.$$

$k \cap g$ besteht also aus Punkten mit paarweise betragsgleichen Abszissen entgegengesetzten Vorzeichens. Die Affinitätsachse ist daher die y -Achse, und die Affinitätsrichtung ist gegeben durch die Richtung der Tangente in O .

M. Herter, Männedorf
Hj. Stocker, Wädenswil

Eine weitere Lösung sandte R. Wyss (Flumenthal)

Aufgabe 1024. Zwei verschiedene natürliche Zahlen m, n heissen befreundet genau dann, wenn $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$, wobei $\sigma(N)$ die Summe aller positiven Teiler von N bezeichnet. Man zeige: Für jedes Paar befreundeter Zahlen m, n trifft mindestens ein der folgenden Aussagen zu:

$$(1) (m, n) > 1 \quad (2) m \equiv n \pmod{2} \quad (3) m + n \equiv 0 \pmod{3}.$$

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Lösung: Wir zeigen, daß für ein befreundetes Paar m, n , für das (1) und (2) nicht gelten, jedenfalls (3) zutrifft. Es seien also m, n teilerfremd und von verschiedener Parität, o.B.d.A. sei $2|m, 2 \nmid n$. Aus

$$m = 2^a \cdot \prod p^b, \quad n = \prod q^c \tag{4}$$

mit $a \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen ungeraden Primzahlen p, q sowie aus $\sigma(m) = m + n = \sigma(n)$ folgt

$$(2^{a+1} - 1) \prod (p^b + p^{b-1} + \dots + 1) = m + n = \prod (q^c + q^{c-1} + \dots + 1). \tag{5}$$

Da $m + n$ und alle p, q ungerade sind, müssen alle b, c gerade sein. Für $2 \nmid a$ gilt $3|(2^{a+1} - 1)$, also $3|(m + n)$ wegen der linken Hälfte von (5). Im Falle $2|a$ erkennt man

aus (4), dass m, n teilerfremde Quadrate sind; wegen $2^{a+1} - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ und (5) hätte $m + n$ einen Primfaktor $r \equiv 3 \pmod{4}$, der (nach dem ersten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz) in m und in n aufgehen müßte.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte Kee-Wai Lau (Hong Kong).

Berichtigung zu Aufgabe 1036:

Die behauptete Ungleichung muss lauten

$$m + \frac{n}{m(n-1)} \left[(A(x))^2 - \frac{1}{n} A(x^2) \right] < 2A(x) < M + \frac{n}{M(n-1)} \left[(A(x))^2 - \frac{1}{n} A(x^2) \right]$$

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1991* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1040. Durch

$$f(z) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{m+n+z}{m+j}^{-1} \quad \text{und} \quad g(z) := \frac{m+n+1+z}{m+1+z} \binom{m+z}{m}^{-1}$$

sind für feste natürliche Zahlen m, n zwei komplexe Funktionen f, g gegeben; \mathbb{D} sei der Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche. Man zeige, dass

$$f(z) = g(z); \quad z \in \mathbb{D}.$$

J. Binz, Bolligen
Hj. Stocker, Wädenswil

Aufgabe 1041. Man bestimme alle positiven reellen Zahlen a mit der Eigenschaft

$$(a+x)^{a-x} > (a-x)^{a+x} \quad \text{für alle } x \in (0, a).$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Aufgabe 1042. Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ bezeichne P_n die Menge aller reellen Polynome

$$p = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1$$

mit mindestens einer reellen Nullstelle. Man bestimme

$$\kappa_n := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \mid p \in P_n \right\}$$

W. Janous, Innsbruck, A