Aufgaben

Aufgabe 997. Let $r, s, t > 1$ be integers $\equiv 1 \bmod 3$ and let

$$3a = st + t + 1, \quad 3b = tr + r + 1, \quad 3c = rs + s + 1\,.$$

Prove or disprove that

$$N := \frac{(rst)!}{(r!)^a (s!)^b (t!)^c}$$

must be an integer.

M. S. Klamkin, Alberta, CD

Lösung: Wir zeigen zunächst die wohlbekannte Tatsache, daß $(mn)!/(m!^n n!)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ganzzahlig ist, durch Induktion nach n: Für $n = 1$ ist diese Behauptung bei beliebigem $m \in \mathbb{N}$ trivialerweise richtig. Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ richtig; dann ist

$$\frac{(m(n+1))!}{m!^{n+1}(n+1)!} = \frac{(mn)!}{m!^n n!} \cdot \frac{(mn+m-1)\ldots(mn+1)}{(m-1)!}\,.$$

Auf der rechten Seite ist der erste Bruch nach Induktionsvoraussetzung ganz, während der zweite ganz ist, da sein Zähler Produkt von $m-1$ sukzessiven ganzen Zahlen ist. Nun können wird zeigen, daß das N in der Aufgabenstellung stets ganz ist: Nach der zweimal angewandten Vorbemerkung ist

$$\frac{(rst)!}{r!^{st}(st)!} \cdot \frac{(st)!}{t!^s s!} = \frac{(rst)!}{r!^{st} t!^s s!} \tag{1}$$

ganz, ebenso nach zyklischer Vertauschung von r, s, t

$$\frac{(rst)!}{s!^{tr} r!^t t!} \text{ und } \frac{(rst)!}{t!^{rs} s!^r r!}\,. \tag{2}$$

Das Produkt der drei Quotienten in (1) und (2), also

$$\frac{(rst)!^3}{r!^{st+t+1}\, s!^{tr+r+1}\, t!^{rs+s+1}} = \left(\frac{(rst)!}{r!^a s!^b t!^c}\right)^3 = N^3\,,$$

ist ebenfalls ganz. Damit ist N eine positive rationale Zahl, die ganz-algebraisch ist, weshalb $N \in \mathbb{N}$ sein muß.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Aufgabe 998. Für reelle $a, b > 0$ mit $a \neq b$ sei

$$F(a,b) := \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}.$$

Man zeige: Aus $0 < a < b$, $0 < s < t$ und $c > 0$ folgt

$$\frac{F(b+t,c)}{F(b+s,c)} < \frac{F(a+t,c)}{F(a+s,c)}.$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung: Zusätzlich sei für $a > 0$ $F(a,a) := \lim\limits_{b \to a} F(a,b) = a$ definiert. Wegen

$$F(ka, kb) = kF(a,b)$$

kann o.B.d.A. $c = 1$ angenommen werden. Setzt man dann $v := b - a$, $x := a + t$ und $y := a + s$, so gilt $v > 0$ und $x > y$. Die zu beweisende Ungleichung geht nach einer elementaren Umformung über in

$$\frac{F(x+v,1)}{F(y+v,1)} < \frac{F(x,1)}{F(y,1)}.$$

Somit genügt es zu zeigen, daß die Funktion

$$f(v) := \log F(x+v,1) - \log F(y+v,1), \quad v \geqq 0,$$

streng monoton fällt. Offensichtlich ist

$$f(v) = g(x+v) - g(y+v) \tag{$*$}$$

mit der auf $(0, +\infty)$ zweimal differenzierbaren Funktion

$$g(w) := \begin{cases} \dfrac{w \log w}{w-1} & \text{für} \quad w > 0,\ w \neq 1 \\ 1 & \text{für} \quad w = 1\,. \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$g'(w) = \begin{cases} \dfrac{w - \log w - 1}{(w-1)^2} & \text{für} \quad w > 0,\ w \neq 1 \\ 1/2 & \text{für} \quad w = 1\,, \end{cases}$$

sowie

$$g''(w) = \begin{cases} \dfrac{2}{(w-1)^2}\left(\dfrac{\log w}{w-1} - \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{w}\right)\right) & \text{für} \quad w>0,\ w \neq 1 \\ -1/3 & \text{für} \quad w=1\,. \end{cases}$$

Mit der Ungleichung von J. Karamata (s. D. S. Mitrinovic, Analytic Inequalities, Springer Verlag, 1970, S. 272) und der arithmetisch-geometrischen Ungleichung erhält man die Abschätzung

$$\frac{\log w}{w-1} < \frac{1}{\sqrt{w}} < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{w}\right) \quad (w>0,\ w \neq 1)\,.$$

Dies zeigt, daß $g'' < 0$ und damit g' streng monoton fällt. Wegen $x > y$ und $v > 0$ folgt nach Differenzieren von $(*)$ $f' < 0$, womit bewiesen ist, daß f streng monoton fallend ist.

H.-J. Seiffert, Berlin

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Kee-Wai Lau (Hong Kong), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 999. Die Zahlenfolge $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ genüge der Rekursionsformel

$$f(n) = \frac{b+1-f(n-1)}{b-f(n-1)} \quad (n \geqq 2)$$

mit konstantem $b \in \mathbb{R}$. Zeige: Zu jeder natürlichen Zahl $m \geqq 2$ und beliebig gegebenem Startwert $f(1)$ lässt sich ein b so finden, dass $f(n)$ periodisch mit der Periodenlänge m wird.

J. Binz, Bolligen

Lösung des Aufgabenstellers.

$b = 1 + \cos\varphi$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{m}$ ist ein geeigneter Wert.

Beweis: Die Fixpunkte der komplexen Funktion $f(z) = \dfrac{b+1-z}{b-z}$ sind $a = 1 + e^{i\varphi}$ und $\bar{a} = 1 + e^{-i\varphi}$. Wir ordnen der Folge $f(n)$ die komplexe Folge $g(n) = \dfrac{f(n)-\bar{a}}{f(n)-a}$ zu. Mit Hilfe der Rekursion für $f(n)$ erhält man

$$g(n) = \frac{e^{-i\varphi} f(n-1) + 1 - b e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} f(n-1) + 1 - b e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi} \frac{f(n-1)-\bar{a}}{f(n-1)-a} = e^{-2\pi i/m} g(n-1)\,.$$

$g(n)$ ist periodisch mit Periodenlänge m. Wegen $f(n) = \dfrac{a\,g(n)-\bar{a}}{g(n)-1}$ wird auch $f(n)$ periodisch mit Periodenlänge m.

Beispiel: $m=6$, $b=1+\sqrt{3}$, $f(1)=2$ führt auf die Folge

$$2,\ \frac{3+\sqrt{3}}{2},\ 2+\sqrt{3},\ 0,\ \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{3}, 2, \ldots .$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Guggenheimer (New York, USA), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), B. Ruh (Solothurn), K. Schütte (München, BRD), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Aufgabe 1000. Man gebe die Lösung der Rekursionsgleichung

$$\sum_{j=0}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (-1)^j \binom{q-j+1}{j} \alpha_{q-j} = 0, \quad q > 0 \tag{1}$$

mit $\alpha_1 = 1$ in geschlossener Form an.

A. Müller, Zürich

Bemerkung: Aufgrund von (1) muss $\alpha_0 = 1$ festgesetzt werden.

Lösung: Betrachtet man die linken Seiten von (1) als Koeffizienten einer formalen Potenzreihe und ordnet diese nach den α_q, so erhält man

$$0 = \sum_{q=1}^{\infty} z^{q-1} \sum_{j=0}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} (-1)^j \binom{q-j+1}{j} \alpha_{q-j} = -1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \binom{q+1}{j} z^{q+j-1} \right) \alpha_q$$

$$= -1 + \sum_{q=1}^{\infty} (1-z)^{q+1} \cdot z^{q-1} \alpha_q = -1 + (1-z)^2 \sum_{q=1}^{\infty} (z-z^2)^{q-1} \alpha_q$$

d. h.

$$\sum_{q=1}^{\infty} (z-z^2)^{q-1} \alpha_q = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Die Substitution $w = z - z^2$ $\left(\text{bzw. } z = \dfrac{1-\sqrt{1-4w}}{2}\right)$ führt auf die Beziehung

$$1 - 2 \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_q w^{q+1} = \sqrt{1-4w}\,.$$

Durch Vergleich mit der bekannten formalen Potenzreihe der rechten Seite gewinnt man schliesslich

$$\alpha_q = 2\binom{\frac{1}{2}}{q+1}\cdot(-4)^q = \frac{1}{q+1}\binom{2q}{q} \qquad \text{(Catalan'sche Zahlen).}$$

R. Wyss, Flumenthal

Bemerkung der Redaktion: J. Binz beweist durch Abzählung von minimalen Gitterwegen allgemeiner: Die Lösung der Rekursion

$$\sum_{i\geqq 0}(-1)^i\binom{n+m-i}{i}\alpha_{n-1} = 0, \quad \alpha_0 = 1$$

lautet

$$\alpha_n = \frac{m}{m+n}\binom{2n+m-1}{n+m-1}.$$

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen, 2 Lösungen), P. Bundschuh (Köln, BRD), U. Graf (la Neuveville), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), W. Raffke (Vechta, BRD), B. Ruh (Solothurn), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1990* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1021. Es sei

$$H(x,y) := \frac{2xy}{x+y}, \quad G(x,y) := (xy)^{1/2}, \quad A(x,y) := \frac{x+y}{2},$$
$$M_r(x,y) := \left(\frac{x^r+y^r}{2}\right)^{1/r}; \quad x,y>0, \quad r \neq 0.$$

Man zeige, dass für $x \neq y$

$$H(x,y) < H(M_r(x,y),\, M_{-r}(x,y)) < G(x,y) < A(M_r(x,y),\, M_{-r}(x,y)) < A(x,y)\,.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika

Aufgabe 1022. Die Zahlenfolgen (a_n), (b_n), (c_n) seien durch die Anfangswerte $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $c_0 = 2$ und die Rekursionsformeln

$$a_{n+1} = c_n^3 - 3a_n^2 b_n\,, \quad b_{n+1} = 2b_n^3 + 3a_n b_n c_n\,, \quad c_{n+1} = c_n^3 + 2b_n^3 + 3a_n b_n^2 \quad (n \geqq 0)$$

gegeben. Zeige, dass die Zahlenfolgen (a_n/b_n), (a_n/c_n), (b_n/c_n) konvergent sind, und bestimme ihre Grenzwerte.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1023. Man zeige: Jede Kurve 4. Ordnung mit der Gleichung

$$y = f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,; \quad a_4 \neq 0$$

lässt sich perspektiv-affin auf sich selbst abbilden. Man bestimme die Affinitätsachse und die Affinitätsrichtung.

M. Herter, Männedorf

Aufgabe 1024. Zwei verschiedene natürliche Zahlen m, n heissen befreundet genau dann, wenn $\sigma(m) = \sigma(n) = m + n$, wobei $\sigma(N)$ die Summe aller positiven Teiler von N bezeichnet. Man zeige: Für jedes Paar befreundeter Zahlen m, n trifft mindestens eine der folgenden Aussagen zu:

$$(1)\ (m,n) > 1 \qquad (2)\ m \equiv n \pmod 2 \qquad (3)\ m + n \equiv 0 \pmod 3\,.$$

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Berichtigung zu Aufgabe 1016: Der Radikand auf der linken Seite der Ungleichung lautet

$$(x + y + z + 1)^2 + 4xyz\,.$$