Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **23.09.2024**

kann nicht auch $\gamma_j = \pi - \beta_j$ sein, denn sonst wäre $\gamma_i + \gamma_j = \pi + \beta_k$ im Widerspruch zur Festsetzung, daß γ_i und γ_j Innenwinkel eines Dreiecks sind. Man hat also in diesem Fall $\gamma_i = \pi - \beta_i$, $\gamma_j = \beta_j$ und ebenso $\gamma_k = \beta_k$. Hieraus folgt, da $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ist, $\gamma_i = \pi - \beta_i = \beta_i$. Man erhält also in jedem Fall $\gamma_i = \beta_i$ für alle $i = 1, 2, 3$, womit das Theorem bewiesen ist.

Anmerkung. Das Theorem gilt, wie aus [1] hervorgeht, auch für den Fall, dass allle Dreiecke $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$, $A_1A_2B_3$ nach innen an das Dreieck $A_1A_2A_3$ angelegt sind, sofern der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1A_2A_3$ nicht zugleich der Umkreismittelpunkt aller nach innen angelegten Dreiecke ist. Der Beweis hierfür läßt sich auch analog zu dem hier vorliegenden Beweis durchführen.

K. Schütte, Math. Institut, Universität München

LITERATUR

1 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte *34*, 256–268 (1987).

 0013-6018/89/050133-06$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 993. Man beweise oder widerlege: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es unendlich viele natürliche Zahlen k derart, dass

$$S(m,k) := m + (m+1) + \ldots + (m+k-1)$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

J. Binz, Bolligen

Lösung. Die Aussage wird folgendermassen bewiesen:

Es ist $S(1,1) = 1$ eine Quadratzahl.
Ist $S(1,k)$ eine Quadratzahl, so sind sowohl

$$S(1, 4k(k+1)) = \frac{4k(k+1)(4k(k+1)+1)}{2} = 4 \cdot S(1,k) \cdot (2k+1)^2, \tag{1}$$

als auch

$$S(m,(2m-1)k) = \frac{(2m-1)k(m+m+(2m-1)k-1)}{2}$$

$$= \frac{(2m-1)k(2m-1)(k+1)}{2} = (2m-1)^2 \cdot S(1,k) \qquad (2)$$

Quadratzahlen.
Wegen (1) enthält $\{S(1,k)\}$ und damit wegen (2) für jedes m auch $\{S(m,k)\}$ unendlich viele Quadratzahlen.

P. Hohler, Olten

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), G. Bercea (München, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehèr (Pécs, Ungarn), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), W. Raffke (Vechta, BRD), K. Schütte (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), P. Weisenhorn (Achern, BRD), H. Widmer (Rieden).

Aufgabe 994. $\sigma'(n)$ bezeichne die Summe aller quadratfreien Teiler der natürlichen Zahl n. Genau für welche n gilt $n \mid \sigma'(n)$?

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Lösung. $n = 1$ erfüllt die Bedingung, es sei deshalb $n \geq 2$. Ausgehend von der Primfaktorenzerlegung

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}, \quad p_1 < \ldots < p_m, \quad \text{alle } e_i \geq 1$$

haben wir

$$\sigma'(n) = 1 + \sum p_i + \sum p_i p_j + \ldots + \prod p_i = \prod_{i=1}^{m} (1+p_i).$$

Aus $n \mid \sigma'(n)$ folgt nun (weil p_m und $p_m + 1$ teilerfremd sind)

$$p_m \mid \prod_{i=1}^{m-1} (1+p_i) \qquad (1)$$

und weiter $m \geq 2$. Für $p_m \geq 5$ gilt aber $p_m \geq p_{m-1} + 2$, im Widerspruch zu (1). Deshalb ist $p_m = 3$, $n = 2^a \cdot 3^b$ und $\sigma'(n) = 12$. Das liefert schliesslich $n = 6$ oder $n = 12$.

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehèr (Pécs, Ungarn), L. Kuipers (Sierre), Kee-Wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 995. Auf wie viele Arten kann man aus einer n-elementigen Menge U zwei nichtleere disjunkte Teilmengen auswählen?

M. Jeger, Zürich

1. Lösung. Zu jedem geordneten Paar (A, B) von nichtleeren disjunkten Teilmengen von U bilden wir die Funktion

$$f_{(A,B)}: x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 2 & x \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Umgekehrt ist (A, B) durch eine Funktion $U \to \{0, 1, 2\}$ eindeutig bestimmt. Solche Funktionen gibt es $3^n - 1$, die nicht null sind. Davon wiederum sind $2^n - 1$ solche, die den Wert 1 nicht annehmen (dann wäre A leer) und ebensoviele, die den Wert 2 nicht annehmen. Insgesamt gibt es also

$$3^n - 1 - 2(2^n - 1) = 3^n - 2^{n+1} + 1$$

geordnete und damit

$$N = \frac{3^n + 1}{2} - 2^n$$

ungeordnete Paare der verlangten Art.

A. Müller, Zürich

2. Lösung (mit Verallgemeinerung). Jede Auwahl von genau k disjunkten (nichtleeren) Teilmengen $T_1, T_2, \ldots, T_k$ aus der Menge $U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ repräsentiert eine Abbildung f bzw. ein n-Tupel über der Menge $V = \{0, 1, \ldots, k\}$, wenn $f: i \mapsto j$ $i \in U, j \in V, i \in T_j$ und T_0 die Restmenge der bei der Auswahl nicht berücksichtigten Elemente von U bezeichnet. Es sind also die n-Tupel, in denen jede (Teilmengen-)Nummer $1, 2, \ldots, k$ mindestens einmal vorkommt, zu zählen. Bezeichnet A_j die Menge aller n-Tupel mit mindestens einem Element «j» (also $\overline{A_j}$ alle n-Tupel ohne «j»), so erhält man nach Division mit $k!$ – die Bezeichnung der Teilmengen ist ja belanglos – und vermöge des Ein- und Ausschaltprinzipes für die Anzahlen μ:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) \\
&= \frac{1}{k!}\left[\mu\left(\bigcup_{j=0}^{k} A_j\right) - \sum_{j=1}^{k} \mu(\overline{A_j}) + \sum_{j_1<j_2=1}^{k} \mu(\overline{A_{j_1}} \cap \overline{A_{j_2}}) - \ldots + (-1)^k \mu(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_k})\right] \\
&= \frac{(k+1)^n - \binom{k}{1}k^n + \binom{k}{2}(k-1)^n - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} 1^n}{k!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)^{n+1} - \binom{k+1}{1} k^{n+1} + \binom{k+1}{2}(k-1)^{n+1} - \ldots + (-1)^k \binom{k+1}{k} 1^{n+1}}{(k+1)!}$$

$$= \underline{S(n+1, k+1)} \quad \text{(Stirling-Zahl 2. Art).}$$

Mit $k = 2$ ergibt $S(n+1, 3) = \dfrac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}$ das Resultat des Aufgabenstellers.

R. Wyss, Flumenthal

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Niederweningen), J Binz (Bolligen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K.-D. Drews (Rostock, DDR), H. Egli (Zürich), J. Fehèr (Pécs, Ungarn), H. Guggenheimer (Farmingdale, USA), P. Hohler (Olten), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), Seminar-Problemgruppe (Kreuzlingen), Kee-Wai Lau (Hong Kong), J. H. van Lint (Eindhoven, NL), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), V. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Bern), W. Raffke (Vechta, BRD), Schülerproblemgruppe Rämibühl (Zürich), A. Rauzenberg (Jülich, BRD), B. Ruh (Solothurn), J. Schaer (Calgary, CD), K. Schütte (München), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), P. Weisenhorn (Achern), H. Widmer (Rieden), M. Vowe (Therwil). Eine Lösung war falsch.

Aufgabe 996. Für natürliche Zahlen n sei

$$f(n) := \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} \cdot 2^{[\frac{n-1}{2}]-i},$$

$$g(n) := \frac{1}{2}\left[(\sqrt{2}+1) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) + (\sqrt{2}-1) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Dann gilt:

$$f(n) = g(n) \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Dies ist zu zeigen.

K.-G. Warneke, Vechta, BRD

Lösung. Die Tschebyscheff-Polynome 2. Art

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1, \; n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

besitzen bekanntlich die Darstellung (s. z. B. Abramowitz/Stegun, Handbook of Mathematical Functions, New York 1965, p. 775)

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \binom{n-i}{i} (2x)^{n-2i}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) und mit $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ besteht demzufolge der Zusammenhang

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{\frac{n}{2}-i} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right). \tag{3}$$

Wie sich leicht zeigen läßt, gilt nun

$$2^{\frac{n}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1+(-1)^n(\sqrt{2}-1)} \cdot 2^{[\frac{n}{2}]} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

Wird (4) in (3) eingetragen und ersetzt man dann n durch $n-1$, so erscheint für natürliche Zahlen $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} \cdot 2^{[\frac{n-1}{2}]-i} &= \frac{\sqrt{2}+1-(-1)^n(\sqrt{2}-1)}{2} \sin\frac{\pi n}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin\frac{\pi n}{4} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sin\frac{3\pi n}{4},\end{aligned}$$

d.h. es ist $f(n) = g(n)$, w.z.b.w.

F. Götze, Jena, DDR

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), K.-D. Drews (Rostock, DDR), U. Graf (La Neuveville), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Kee-Wai Lau (Hong-Kong), W. Raffke (Vechta, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), P. Weisenhorn (Achern, BRD), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1990* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 1017. Für ein nicht gleichschenkliges Dreieck ABC mit Umkreismittelpunkt O, Umkreisradius R und Inkreisradius r bezeichne X den Schnittpunkt der durch A und den Berührpunkt des Inkreises mit der Seite BC verlaufenden Transversalen und der Mittelsenkrechten auf BC. Analog im Sinne zyklischer Vertauschung seien die Punkte Y, Z definiert. Man zeige, dass

$$OX + OY + OZ = 5R + 2r.$$

H. Kappus, Rodersdorf

Aufgabe 1018. Die Fibonacci-Folge (F_n), definiert durch

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{für} \quad n \geq 0,$$

ist bekanntlich für jedes $m \in \mathbb{N}$ modulo m rein periodisch. Man bestimme die Periodenlänge für $m = 2^k$ und $m = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 1019. a, b, c seien die Seiten eines Dreiecks. Man zeige, dass

$$\sqrt{a^2 + 3(b-c)^2} + \sqrt{b^2 + 3(c-a)^2} \geq \sqrt{3c^2 + (a-b)^2}.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

S. J. Bilchev, Russe, Bulgarien

Aufgabe 1020. Die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genüge der Differentialgleichung

$$f^{(4)}(z) = f(z)$$

und den Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Man berechne den Wert des Produktes

$$\prod_{n=1}^{\infty} f(z/2^n); \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

H. Alzer, Johannesburg, Südafrika