Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

Autor(en): **Schütte, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41622

Nun wende man beim Kreissehnensechseck $A_1FBPA_4A_2$ den Pascal'schen Satz an. Er sagt, dass die Punkte I_{412}, B_2 und Q kollinear sind. Und ebenso ergibt sich mit dem Sechseck $A_2GBPA_3A_1$, dass B_1, I_{123} und Q kollinear sind. I_{123} liegt zwischen B_1 und Q, wenn B_2 zwischen I_{412} und Q liegt. Da die Geraden $I_{412}I_{123}$ und B_1B_2 nach (1) parallel sind, bleibt den fünf Punkten I_{412}, I_{123}, B_1, B_2, Q nichts anderes übrig, als insgesamt kollinear zu sein.

Beweis von (3):

Nach (2) ist I_{412} der Schnittpunkt der Geraden s_{41} und s_{12}. Dass I_{412} auf der Geraden $M_{41}M_{12}$ liegt, ist wegen der auftretenden ähnlichen Dreiecke (Fig. 5) leicht einzusehen. Man könnte aber auch hier den Pascal'schen Kreuzliniensatz anwenden auf das Geradenpaar, gebildet durch A_2A_4 und die Ferngerade, mit den Punkten: S, Fernpunkt von w, Schnittpunkt von s_{12} mit A_2A_4, Fernspunkt senkrecht A_2A_4, Schnittpunkt von s_{41} mit A_2A_4, Fernpunkt von w'.
Aus der Fig. 5 lässt sich auch leicht das (nur vom Winkel zwischen A_1A_3 und A_2A_4 abhängige) Verhältnis ablesen, in welchem die Inkreismittelpunkte die Seiten des Füllkreismittelpunktvierecks teilen. Siehe dazu [2].
Es bleibe dem Leser überlassen, zu untersuchen, welche Rolle die Ankreismittelpunkte der Dreiecke $A_1A_2A_3, \ldots$ bei der Fig. 2 spielen, zusammen mit den vier den Kreis k und die Geraden A_1A_3, A_2A_4 berührenden Kreisen, welche ausserhalb von k liegen.

R. Stärk, Kantonsschule Schaffhausen

LITERATUR

1 Ogilvy C. S.: Mathematische Leckerbissen. Vieweg Paperback, Braunschweig 1969.
2 Turnwald G.: Über eine Vermutung von Thébault. El. Math., Vol. 41, 11–13 (1986).

 0013-6018/89/050130-04$1.50 + 0.20/0

Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

Als Satz von Napoleon wird ein elementargeometrischer Satz bezeichnet, der besagt, dass die Mittelpunkte der gleichseitigen Bereiche, die außen an die Seiten eines beliebigen Dreiecks angelegt sind, ein gleichseitiges Dreieck bilden.
In [1] wurde eine Verallgemeinerung dieses Satzes bewiesen. Im folgenden wird für diesen verallgemeinerten Satz von Napoleon eine zwar äquivalente, aber einfachere Fassung formuliert und hierfür ein Beweis gegeben, der einfacher und direkter als der in [1] durchgeführte Beweis ist.

Theorem.

Voraussetzungen. An die Seiten eines beliebigen Dreiecks $A_1A_2A_3$ seien außen die Dreiecke $A_2A_3B_1$, $A_3A_1B_2$, $A_1A_2B_3$ angelegt. Die Innenwinkel dieser Dreiecke an den Punkten B_1, B_2, B_3 seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, wobei $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$ ist, und die Umkreismittelpunkte dieser Dreiecke seien M_1, M_2, M_3.

Behauptung. $M_1M_2M_3$ ist ein Dreieck, das an den Eckpunkten M_1, M_2, M_3 die Innenwinkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ hat.
(Der Spezialfall $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ des Theorems enthält den Satz von Napoleon.)
Wir beweisen das Theorem mit Hilfe einiger Lemmata.
Im folgenden sei i, j, k eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3. K_i sei der Umkreis um das Dreieck $A_jA_kB_i$.
Wir können annehmen, dass β_1 und β_2 spitze Winkel sind. Dann gilt für $i = 1, 2$ und, falls auch β_3 ein spitzer Winkel ist, ebenfalls für $i = 3$ nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle A_kM_iA_j = 2\beta_i \tag{1}$$

$$\sphericalangle M_iA_jA_k = \pi/2 - \beta_i . \tag{2}$$

Ist β_3 ein rechter Winkel, so ist M_3 der Mittelpunkt der Dreieckseite A_1A_2.
Ist β_3 ein stumpfer Winkel, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle A_2M_3A_1 = 2\pi - 2\beta_3 \tag{3}$$

$$\sphericalangle M_3A_1A_2 = \beta_3 - \pi/2 \tag{4}$$

Lemma 1. Für jeden Punkt P gilt:

a) Liegen P und A_i auf derselben Seite der Geraden A_jA_k, so liegt P genau dann auf K_i, wenn $\sphericalangle A_jPA_k = \pi - \beta_i$ ist.
b) Liegen P und A_i auf verschiedenen Seiten der Geraden A_jA_k, so liegt P genau dann auf K_i, wenn $\sphericalangle A_jPA_k = \beta_i$ ist.

Beweis. Da das Dreieck $A_jA_kB_i$ außen an das Dreieck $A_1A_2A_3$ angelegt ist, liegen P und B_i im Fall a) auf verschiedenen Seiten und im Fall b) auf derselben Seite der Geraden A_jA_k. Nach dem Periheriewinkelsatz folgen die Behauptungen.

Lemma 2. M_1, M_2, M_3 sind paarweise verschiedene Punkte.

Beweis. Angenommen, es sei $M_i = M_j$, dann folgt, da A_k auf K_i und auf K_j liegt, dass $K_i = K_j$ ist, so dass alle Punkte A_1, A_2, A_3, B_i, B_j auf K_i liegen. Dann ist aber $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \pi$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit sind M_1, M_2, M_3 paarweise verschiedene Punkte.

Definition. S_i sei das Spiegelbild des Punktes A_i an der Geraden M_jM_k.

Lemma 3. A_i und S_i sind die einzigen gemeinsamen Punkte der Kreise K_j und K_k.

Beweis. Falls sich die Kreise K_j und K_b berühren, ist $A_i = S_i$ der Berührungspunkt dieser Kreise. Andernfalls sind A_i und S_i zwei verschiedene Schnittpunkte der Kreise K_j und K_k. Hiermit ergibt sich die Behauptung, da K_j und K_k nach Lemma 2 zwei verschiedene Kreise sind.

Lemma 4. S_3 liegt auf dem Kreis K_3.

Beweis. Für S_3 kommen folgende fünf Fälle in Betracht.

1. Fall. S_3 liegt auf einer Geraden A_1A_3 oder A_2A_3.
Ist S_3 ein von A_3 verschiedener Punkt der Geraden A_1A_3, so liegt M_2 sowohl auf der Mittelsenkrechten von A_1A_3 als auch auf der Mittelsenkrechten von A_3S_3. Es folgt $S_3 = A_1$, also S_3 auf K_3. Ebenso ergibt sich die Behauptung, wenn S_3 ein von A_3 verschiedener Punkt der Geraden A_2A_3 ist. Sei nun $S_3 = A_3$. Dann berühren sich die Kreise K_1 und K_2 im Punkt A_3. Nach (2) hat man

$$\sphericalangle M_1A_3A_2 = \pi/2 - \beta_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle M_2A_3A_1 = \pi/2 - \beta_2 .$$

Da in diesem Fall A_3 auf M_1M_2 zwischen M_1 und M_2 liegt und A_1, A_2 auf derselben Seite von M_1M_2 liegen, folgt

$$\sphericalangle A_2A_3A_1 = \pi - \beta_3 .$$

Nach Lemma 1a) folgt, dass $A_3 = S_3$ auf K_3 liegt.

2. Fall. Es liegen S_3, A_1 auf derselben Seite von A_2A_3 und S_3, A_2 auf derselben Seite von A_1A_3.
Da S_3 auf K_1 und auf K_2 liegt, folgt nach Lemma 1a)

$$\sphericalangle A_1S_3A_3 = \pi - \beta_2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle A_3S_3A_2 = \pi - \beta_1 .$$

Da die Summe dieser zwei Winkel grösser als π ist, liegen S_3 und A_3 auf derselben Seite von A_1A_2. Da sich auch

$$\sphericalangle A_1S_3A_2 = \pi - \beta_3$$

ergibt, folgt nach Lemma 1a), dass S_3 auf K_3 liegt.

3. Fall. Es liegen S_3, A_1 auf verschiedenen Seiten von A_2A_3 und S_3, A_2 auf verschiedenen Seiten von A_1A_3.
Dann hat nach Lemma 1b)

$$\sphericalangle A_1S_3A_3 = \beta_2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle A_3S_3A_2 = \beta_1 .$$

Da in diesem Fall S_3 und A_3 auf derselben Seite von $A_1 A_2$ liegen und

$$\sphericalangle A_1 S_3 A_2 = \beta_2 + \beta_1 = \pi - \beta_3 .$$

Nach Lemma 1 a) folgt, dass S_3 auf K_3 liegt.

4. Fall. Es liegen S_3, A_1 auf derselben Seite von $A_2 A_3$ und S_3, A_2 auf verschiedenen Seiten von $A_1 A_3$.
Dann hat man nach Lemma 1

$$\sphericalangle A_3 S_3 A_2 = \pi - \beta_1 \quad \text{und} \quad \sphericalangle A_3 S_3 A_1 = \beta_2 .$$

Da $\beta_2 < \pi - \beta_1$ ist, liegt in diesem Fall A_1 im Winkelraum von $\sphericalangle A_3 S_3 A_2$. Dann liegen S_3 und A_3 auf verschiedenen Seiten von $A_1 A_2$, und man erhält

$$\sphericalangle A_1 S_3 A_2 = \pi - \beta_1 - \beta_2 = \beta_3 .$$

Nach Lemma 1 b) folgt, dass S_3 auf K_3 liegt.

5. Fall. Es liegen S_3, A_1 auf verschiedenen Seiten von $A_2 A_3$ und S_3, A_2 auf derselben Seite von $A_1 A_3$.
Dann ergibt sich die Behauptung entsprechend wie im 4. Fall.

Lemma 5. $S_1 = S_2 = S_3$.

Beweis. Aus den Lemmata 3 und 4 folgt, dass S_3 auf allen drei Kreisen K_1, K_2, K_3 liegt. Gilt nicht bereits $S_1 = S_2 = S_3$, so folgt nach Lemma 3, dass $A_1 = S_2 = S_3$ oder $A_2 = S_1 = S_3$ ist. Wir können dann $A_1 = S_2 = S_3$ annehmen. Da in diesem Fall A_1 auf K_1 liegt, folgt nach Lemma 1 a)

$$\sphericalangle A_2 A_1 A_3 = \pi - \beta_1 .$$

Nach (2) hat man

$$\sphericalangle A_3 A_1 M_2 = \pi/2 - \beta_2 .$$

Es folgt

a) $\quad \sphericalangle A_2 A_1 A_3 + \sphericalangle A_3 A_1 M_2 = \pi/2 + \beta_3 .$

Ist β_3 ein spitzer Winkel, so hat man nach (2)

b) $\quad \sphericalangle M_3 A_1 A_2 = \pi/2 - \beta_3 .$

Da in diesem Fall M_2, M_3 auf verschiedenen Seiten von $A_1 A_2$ und auf verschiedenen Seiten von $A_1 A_3$ liegen, folgt aus a) und b)

$$\sphericalangle M_3 A_1 M_2 = \pi.$$

Ist β_3 ein rechter Winkel, so liegt M_3 auf $A_1 A_2$ und nach a) auch M_2 auf der Geraden $A_1 A_2$, also A_1 auf der Geraden $M_2 M_3$. Ist schließlich β_3 ein stumpfer Winkel, so hat man nach (4)

c) $\quad \sphericalangle M_3 A_1 A_2 = \beta_3 - \pi/2.$

Da in diesem Fall M_3 und A_3 auf derselben Seite von $A_1 A_2$ liegen, folgt aus a) und c)

$$\sphericalangle M_3 A_1 M_2 = \pi.$$

Somit liegt A_1 in jedem Fall auf der Geraden $M_2 M_3$. Es folgt $A_1 = S_1$, also $S_1 = S_2 = S_3$.

Lemma 6. M_1, M_2, M_3 sind nichtkollineare Punkte.

Beweis. Wären M_1, M_2, M_3 kollinear, so hätte man nach Lemma 5 $A_1 = A_2 = A_3$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 7. Die Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ schneiden sich unter den Winkeln β_i und $\pi - \beta_1$.

Beweis. Nach Lemma 5 hat man einen Punkt $S := S_1 = S_2 = S_3$ auf dem Kreis K_i.

1. Fall. $S = A_j$, also $A_j = S_j$ und $A_j = S_k$.
Aus $A_j = S_j$ folgt, daß die Gerade $M_i M_k$ die Gerade $M_i A_j$ ist. Aus $A_j = S_k$ folgt, daß die Gerade $M_i M_j$ den Winkel $\sphericalangle A_j M_i A_k$ halbiert. Da dieser Winkel gleich $2\beta_i$ oder gleich $2\pi - 2\beta_i$ ist, schneiden sich in diesem Fall die Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ unter den Winkeln β_i und $\pi - \beta_i$.

2. Fall. $S = A_k$.
Dann ergibt sich die Behauptung entsprechend wie im 1. Fall

3. Fall. $S \neq A_j$ und $S \neq A_k$.
Dann sind die Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ die Mittelsenkrechten von $A_k S$ und von $A_j S$. Nach Lemma 1 schneiden sich die Geraden $A_k S$ und $A_j S$ unter den Winkeln β_i und $\pi - \beta_i$. Folglich schneiden sich auch die zu ihnen orthogonalen Geraden $M_i M_j$ und $M_i M_k$ unter den Winkeln β_i und $\pi - \beta_i$.

Beweis des **Theorems.**

γ_i sei der Innenwinkel des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ am Punkt M_i. Nach Lemma 7 gilt dann $\gamma_1 = \beta_i$ oder $\gamma_i = \pi - \beta_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. Angenommen, es gebe ein $\gamma_i = \pi - \beta_i$. Dann kann nicht auch $\gamma_j = \pi - \beta_j$ sein, denn sonst wäre $\gamma_i + \gamma_j = \pi + \beta_k$ im Widerspruch zur Festsetzung, daß γ_i und γ_j Innenwinkel eines Dreiecks sind. Man hat also in diesem Fall $\gamma_i = \pi - \beta_i$, $\gamma_j = \beta_j$ und ebenso $\gamma_k = \beta_k$. Hieraus folgt, da $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ ist, $\gamma_i = \pi - \beta_i = \beta_i$. Man erhält also in jedem Fall $\gamma_i = \beta_i$ für alle $i = 1, 2, 3$, womit das Theorem bewiesen ist.

Anmerkung. Das Theorem gilt, wie aus [1] hervorgeht, auch für den Fall, dass allle Dreiecke $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_1 B_2$, $A_1 A_2 B_3$ nach innen an das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ angelegt sind, sofern der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ nicht zugleich der Umkreismittelpunkt aller nach innen angelegten Dreiecke ist. Der Beweis hierfür läßt sich auch analog zu dem hier vorliegenden Beweis durchführen.

K. Schütte, Math. Institut, Universität München

LITERATUR

1 Schütte K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. Mathematische Semesterberichte *34*, 256–268 (1987).

 0013-6018/89/050133-06$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 993. Man beweise oder widerlege: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es unendlich viele natürliche Zahlen k derart, dass

$$S(m,k) := m + (m+1) + \ldots + (m+k-1)$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

J. Binz, Bolligen

Lösung. Die Aussage wird folgendermassen bewiesen:

Es ist $S(1,1) = 1$ eine Quadratzahl.
Ist $S(1,k)$ eine Quadratzahl, so sind sowohl

$$S(1, 4k(k+1)) = \frac{4k(k+1)(4k(k+1)+1)}{2} = 4 \cdot S(1,k) \cdot (2k+1)^2, \tag{1}$$