

# Eine weitere Lösung der Thébault'schen Aufgabe

Autor(en): **Stärk, R.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41621>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Korollar 1.** Für festes  $n$  hat jedes Glied der Zahlenfolge (1) einen Primfaktor, der in keinem andern Glied der Folge aufgeht.

*Beweis.* Hat  $n! + k$  einen Primfaktor  $> n$ , so leistet dieser – wie man leicht einsieht – das Verlangte. Andernfalls übernimmt  $k$  diese Rolle.

**Korollar 2.** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Dies folgt unmittelbar aus dem Korollar 1; dieses garantiert zu jeder Zahl  $n > 1$  die Existenz von  $n - 1$  Primzahlen.

Nach Grundhöfer [1] weiss man, dass für  $n > 5$  keine der Zahlen (1) eine Primzahlpotenz sein kann. Somit kann die zweite im Satz 1 erwähnte Möglichkeit in Wirklichkeit nicht eintreten. Also gilt

**Satz 2.** Für jedes  $n \geq 6$  und  $2 \leq k \leq n$  hat die Zahl  $n! + k$  mehr als einen Primteiler, und mindestens einer davon ist grösser als  $n$ .

M. R. Chowdhury, Dhaka University, Bangladesh

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Grundhöfer T.: Über die Zahlen der Form  $n! + k$ , Arch. Math. 33, 361–363 (1979).

## Didaktik und Elementarmathematik

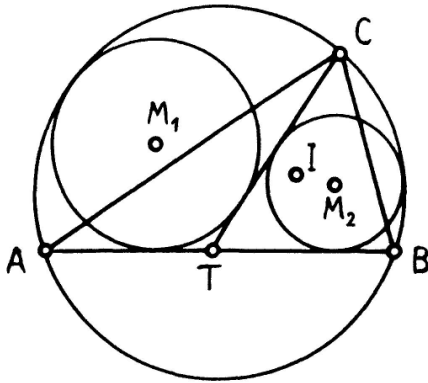
### Eine weitere Lösung der Thébault'schen Aufgabe

In der Geometrie freut man sich immer, wenn bei einer Beweisaufgabe, die mit analytischen Mitteln gelöst werden kann, sich auch ein Lösungsweg findet, der ohne Gleichungen und trigonometrische Umformungen auskommt. Ein Beispiel liefert die vor fünfzig Jahren von V. Thébault gestellte Aufgabe:

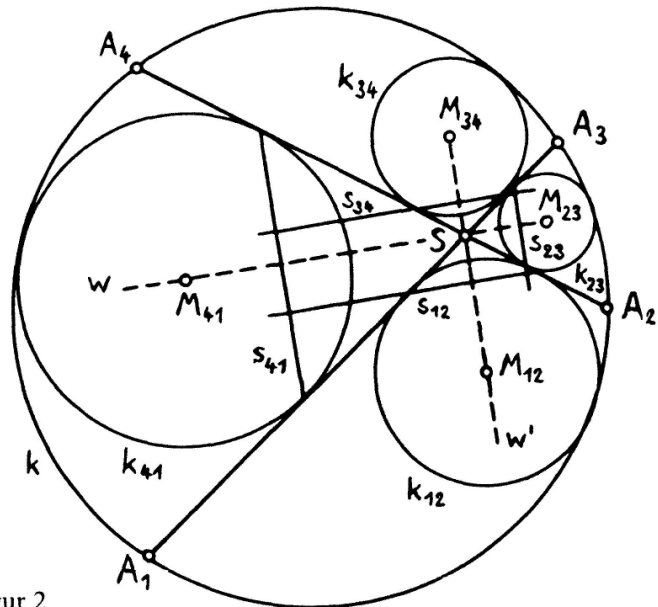
*Gegeben ist ein Dreieck  $ABC$ .  $T$  sei ein Punkt der Seite  $AB$ , und  $M_1, M_2$  seien die Mittelpunkte der Füllkreise, welche die Seite  $AB$ , die Strecke  $CT$  und den Umkreis des Dreiecks berühren (Fig. 1). Man zeige, dass  $M_1, M_2$  und der Inkreismittelpunkt  $I$  des Dreiecks kollinear sind.*

Die Aufgabe wurde von C. Stanley Ogilvy in seine bekannte Problemsammlung [1] aufgenommen mit der Bemerkung, diese Aufgabe sei elementar, aber schwierig und könne bei hinreichendem Scharfsinn ziemlich sicher unter Verwendung rein synthetischer Methoden gelöst werden.

Nachdem kürzlich G. Turnwald in dieser Zeitschrift einen interessanten trigonometrischen Beweis vorgeführt hat [2], der aber einige Umformungskunst verlangt, dürfte der folgende Beweis, der ganz ohne Formeln auskommt, vielleicht das Interesse des Lesers finden.



Figur 1



Figur 2

Wir betrachten die Fig. 2.

In einem Kreis  $k$  seien zwei sich in einem Punkt  $S$  schneidende Sehnen  $A_1A_3$  und  $A_2A_4$  gegeben. Es seien  $w$  und  $w'$  ihre Winkelhalbierenden.  $M_{12}, M_{23}, M_{34}, M_{41}$  seien die Mittelpunkte der Füllkreise  $k_{12}, k_{23}, k_{34}, k_{41}$ , welche die beiden Sehnen und  $k$  berühren, und  $s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{41}$  seien die Polaren von  $S$  bez. dieser Kreise.

Nun denke man sich noch die Inkreismittelpunkte  $I_{123}, I_{234}, I_{341}, I_{412}$  der vier Dreiecke  $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2$  in die Figur eingezeichnet.

Die folgenden drei Tatsachen sollen bewiesen werden:

- (1) Die Inkreismittelpunkte  $I_{123}, I_{234}, \dots$  bilden ein Rechteck, dessen Seiten parallel sind zu den Winkelhalbierenden  $w$  und  $w'$ .
- (2) Die Inkreismittelpunkte  $I_{123}, I_{234}, \dots$  liegen auf den Geraden  $s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{41}$ , nämlich  $I_{412}$  und  $I_{123}$  auf  $s_{12}$  etc.
- (3) Die Inkreismittelpunkte  $I_{123}, I_{234}, \dots$  liegen auf den Seiten des Vierecks  $M_{12}M_{23}M_{34}M_{41}$ , nämlich  $I_{412}$  auf  $M_{41}M_{12}$  etc.

Die Aussage (3) ist – man betrachte die halbe Figur – die Behauptung der Thébault'schen Aufgabe.

### Beweis von (1):

Unter wiederholter Bezugnahme auf die Kreiswinkelsätze kann man etwa wie folgt schliessen. Da in einem Dreieck der Winkel, unter dem man eine Seite vom Inkreismittelpunkt aus sieht, gleich dem um  $90^\circ$  vermehrten halben Gegenwinkel der Seite ist, liegt in  $A_1A_2I_{123}I_{412}$  ein Sehnenviereck vor (Fig. 3). Wir bezeichnen die Winkel  $A_2A_1A_4, A_2A_1A_3, A_3A_2A_1, A_4A_2A_1$  mit  $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ . Für den Winkel zwischen den Geraden



Nun wende man beim Kreissehnensechseck  $A_1FBPA_4A_2$  den Pascal'schen Satz an. Er sagt, dass die Punkte  $I_{412}$ ,  $B_2$  und  $Q$  kollinear sind. Und ebenso ergibt sich mit dem Sechseck  $A_2GBPA_3A_1$ , dass  $B_1$ ,  $I_{123}$  und  $Q$  kollinear sind.  $I_{123}$  liegt zwischen  $B_1$  und  $Q$ , wenn  $B_2$  zwischen  $I_{412}$  und  $Q$  liegt. Da die Geraden  $I_{412}I_{123}$  und  $B_1B_2$  nach (1) parallel sind, bleibt den fünf Punkten  $I_{412}$ ,  $I_{123}$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $Q$  nichts anderes übrig, als insgesamt kollinear zu sein.

### Beweis von (3):

Nach (2) ist  $I_{412}$  der Schnittpunkt der Geraden  $s_{41}$  und  $s_{12}$ . Dass  $I_{412}$  auf der Geraden  $M_{41}M_{12}$  liegt, ist wegen der auftretenden ähnlichen Dreiecke (Fig. 5) leicht einzusehen. Man könnte aber auch hier den Pascal'schen Kreuzliniensatz anwenden auf das Geradenpaar, gebildet durch  $A_2A_4$  und die Ferngerade, mit den Punkten:  $S$ , Fernpunkt von  $w$ , Schnittpunkt von  $s_{12}$  mit  $A_2A_4$ , Fernpunkt senkrecht  $A_2A_4$ , Schnittpunkt von  $s_{41}$  mit  $A_2A_4$ , Fernpunkt von  $w'$ .

Aus der Fig. 5 lässt sich auch leicht das (nur vom Winkel zwischen  $A_1A_3$  und  $A_2A_4$  abhängige) Verhältnis ablesen, in welchem die Inkreismittelpunkte die Seiten des Füllkreismittelpunktvierecks teilen. Siehe dazu [2].

Es bleibe dem Leser überlassen, zu untersuchen, welche Rolle die Ankreismittelpunkte der Dreiecke  $A_1A_2A_3, \dots$  bei der Fig. 2 spielen, zusammen mit den vier den Kreis  $k$  und die Geraden  $A_1A_3, A_2A_4$  berührenden Kreisen, welche ausserhalb von  $k$  liegen.

R. Stärk, Kantonsschule Schaffhausen

### LITERATUR

- 1 Ogilvy C. S.: Mathematische Leckerbissen. Vieweg Paperback, Braunschweig 1969.
- 2 Turnwald G.: Über eine Vermutung von Thébault. El. Math., Vol. 41, 11–13 (1986).

## Neue Fassung einer Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon

Als Satz von Napoleon wird ein elementargeometrischer Satz bezeichnet, der besagt, dass die Mittelpunkte der gleichseitigen Bereiche, die außen an die Seiten eines beliebigen Dreiecks angelegt sind, ein gleichseitiges Dreieck bilden.

In [1] wurde eine Verallgemeinerung dieses Satzes bewiesen. Im folgenden wird für diesen verallgemeinerten Satz von Napoleon eine zwar äquivalente, aber einfachere Fassung formuliert und hierfür ein Beweis gegeben, der einfacher und direkter als der in [1] durchgeführte Beweis ist.