ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 44 Nr. 4 Seiten 89–112 Basel, Juli 1989

Die Fredholmsche Alternative und Polynome

In dieser Abhandlung wird gezeigt, wie man die Fredholmsche Alternative in ihrer einfachsten Form für Beweise algebraischer Sätze über Polynome und rationale Funktionen verwenden kann. Da der algebraische Aufwand dabei minimal ist, erscheint dieser Zugang besonders geeignet im Rahmen einführender Vorlesungen.

Im folgenden betrachten wir Polynome mit komplexen oder reellen Koeffizienten. Mit $\deg P$ bezeichnen wird den Grad des Polynoms P. Zwei Polynome $P, Q \neq 0$ heissen *teilerfremd,* wenn es keine Polynome $p, q \neq 0$ mit $\deg p < \deg P$, $\deg q < \deg Q$ und $\frac{P}{Q} = \frac{p}{q}$ gibt.
In der Algebra wird bewiesen, dass es zu zwei teilerfremden Polynomen P, Q zwei Polynome A, B mit $\deg A < \deg P$ und $\deg B < \deg Q$ und

$$AQ + BP = 1 \tag{1}$$

gibt. Wir wollen für diesen «Hauptsatz» einen elementaren Beweis vorstellen, der als wesentliches Hilfsmittel die Fredholmsche Alternative für lineare Gleichungssysteme der Form

$$Mc = d \tag{2}$$

mit quadratischer Matrix M benutzt. Die Alternative besagt bekanntlich, dass (2) *entweder* im Falle $d = 0$ nichttriviale Lösungen oder für jedes d genau eine Lösung c hat.

Hauptsatz für Polynome. *Die Polynome $P, Q \neq 0$ seien teilerfremd, und für das Polynom R gelte* $\deg R < \deg P + \deg Q$. *Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome A, B mit* $\deg A < \deg P$, $\deg B < \deg Q$ *und*

$$AQ + BP = R. \tag{3}$$

Bemerkung. Der Spezialfall $R = 1$ ergibt gerade (1).

Der Zusammenhang zwischen Polynomgleichungen und linearen Gleichungssystemen wird zunächst durch ein Beispiel erläutert.

Beispiel. Es seien $P(s) = s^3 - 1$, $Q(s) = s^4 + 1$ und $R(s) = s^5 - 1$. Verwendet man die Ansätze $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2$ und $B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3$, so erhält man durch Koeffizientenvergleich in (3) die sieben linearen Gleichungen

$$a_2 + b_3 = 0, \quad a_1 + b_2 = 1, \quad a_0 + b_1 = 0,$$

$$b_0 - b_3 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \quad a_1 - b_1 = 0, \quad a_0 - b_0 = -1$$

mit sieben Unbekannten. Es folgt $A(s) = s - 1$ und $B(s) = s$. Die Gleichung (3) lautet hier also

$$(s-1)(s^4+1) + s(s^3-1) = s^5 - 1 .$$

Beweis des Hauptsatzes. Das durch Koeffizientenvergleich aus (3) entstehende lineare Gleichungssystem mit $\deg P + \deg Q$ Unbekannten ist genau dann homogen bzw. inhomogen, wenn $R = 0$ bzw. $R \neq 0$ ist. Da P und Q teilerfremd sind, besitzt die Gleichung $AQ + BP = 0$ nur die Lösung $A = B = 0$, anderfalls erhielte man $\frac{P}{Q} = -\frac{A}{B}$ mit $\deg A < \deg P$ und $\deg B < \deg Q$. Ist $R \neq 0$, so liefert die Fredholmsche Alternative eindeutig die Koeffizienten von A und B. □

Korollar. *Die Determinante des im Beweis auftretenden linearen Gleichungssystems, die sog. Resultante von P und Q, verschwindet nicht, wenn $P, Q \neq 0$ teilerfremd sind.*

Der obige Hauptsatz für Polynome findet eine wichtige Anwendung im folgenden

Satz über die Partialbruchzerlegung. *Das Polynom $Q \neq 0$ besitze eine Produktdarstellung der Form*

$$Q = Q_1 Q_2, \dots, Q_n, \tag{4}$$

und dabei seien Q_j, Q_k teilerfremd für $j \neq k$. Ist P ein Polynom mit $\deg P < \deg Q$, *dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $P_1, \dots, P_n$ mit* $\deg P_j < \deg Q_j$ *für $j = 1, \dots, n$ derart, daß*

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \dots + \frac{P_n}{Q_n}. \tag{5}$$

Beweis. Ist $n = 2$, dann gibt es nach dem obigen Hauptsatz zwei eindeutig bestimmte Polynome $A = P_1$ und $B = P_2$ mit $\deg P_1 < \deg Q_1$, $\deg P_2 < \deg Q_2$ und

$$P = P_1 Q_2 + P_2 Q_1 .$$

Division durch Q ergibt dann (5).
Der Rest folgt durch vollständige Induktion nach n: Ist $Q = (Q_1, \dots, Q_{n-1}) Q_n$, so gibt es wiederum nach dem Hauptsatz zwei eindeutig bestimmte Polynome A und $B = P_n$ mit $\deg A < \deg(Q_1, \dots, Q_{n-1})$, $\deg P_n < \deg Q_n$ und

$$P = AQ_n + P_n(Q_1, \dots, Q_{n-1}) .$$

Division durch Q liefert

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{Q_1, \ldots, Q_{n-1}} + \frac{P_n}{Q_n},$$

und der Rest folgt mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\frac{A}{Q_1, \ldots, Q_{n-1}} = \frac{P_1}{Q_1} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}. \qquad \square$$

Ist etwa $Q_1 = s - s_1$ in (4), so entspricht diesem Linearfaktor der Partialbruch $\frac{a}{s - s_1}$ mit einer eindeutig bestimmten Konstanten a in (5).
Nun sei $Q_1(s) = (s - s_1)^m$ mit $m \geq 2$. Wenn wir das Polynom P_1 mit $\deg P_1 < m$ in der Form

$$P_1 = a_m + a_{m-1}(s - s_1) + \ldots + a_1 (s - s_1)^{m-1}$$

entwickeln, erhalten wir schließlich die bekannte Darstellung

$$\frac{P_1}{(s - s_1)^m} = \frac{a_m}{(s - s_1)^m} + \frac{a_{m-1}}{(s - s_1)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_1}{s - s_1}. \tag{6}$$

Wir wollen noch zeigen, wie man die Fredholmsche Alternative für den Beweis des Divisionsalgorithmus heranziehen kann.

Satz über die Division mit Rest. *Zu zwei Polynomen P und $Q \neq 0$ gibt es genau zwei Polynome M und R mit* $\deg R < \deg Q$ *derart, daß*

$$P = MQ + R \tag{7}$$

ist.

Beweis. Ist $\deg P < \deg Q$, so gibt es nach dem Hauptsatz genau zwei Polynome $A = M$ und $B = R$ mit $\deg R < \deg Q$ und $\deg M < \deg 1 = 0$, so daß $MQ + R \cdot 1 = P$ gilt. In diesem Fall ist also $M = 0$ und $R = P$.
Ist dagegen $\deg P \geq \deg Q$, so erhält man durch Koeffizientenvergleich in (7) ein lineares Gleichungssystem mit $\deg Q$ unbekannten Koeffizienten von R und $1 + \deg P - \deg Q$ unbekannten Koeffizienten von M, also mit insgesamt $1 + \deg P$ Unbekannten. Die Anzahl der Gleichungen ist auch $1 + \deg P$, denn jedem Koeffizienten von P entspricht eine Gleichung. Nun besitzt die homogene Gleichung $MQ + R = 0$ nur die Lösung $M = R = 0$; wäre nämlich $M \neq 0$, so erhielte man den Widerspruch

$$\deg Q \leqq \deg Q + \deg M = \deg R < \deg Q.$$

Da also das entspechende homogene lineare Gleichungssystem nur die Nullösung besitzt, liefert die Fredholmsche Alternative eindeutig die Koeffizienten von M und R. $\square$

Der Satz über die Division mit Rest läßt sich auf die Partialbruchzerlegung anwenden. Hat man in der Produktdarstellung (4) quadratische Faktoren $q(s) = s^2 + \beta s + \gamma$ und ist dort etwa $Q_1 = q^m$, dann läßt sich der zugehörige Partialbruch $\frac{P_1}{q^m}$ in (5) mit $\deg P_1 < 2m$ durch Division mit Rest in die bekannte Form

$$\frac{P_1(s)}{(q(s))^m} = \frac{b_m s + c_m}{(q(s))^m} + \frac{b_{m-1} s + c_{m-1}}{(q(s))^{m-1}} + \ldots + \frac{b_1 s + c_1}{q(s)} \tag{8}$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m$ bringen. Das Verfahren wird am folgenden Beispiel erläutert.

Beispiel. Ist etwa $P_1(s) = 2s^5 - s^4 + 4s^3 + 1$ und $Q_1(s) = (s^2+1)^3$, so führt wiederholte Division durch $s^2 + 1$ auf

$$2s^5 - s^4 + 4s^3 + 1 = (2s^3 - s^2 + 2s + 1)(s^2+1) - 2s,$$

$$2s^3 - s^2 + 2s + 1 = (2s-1)(s^2+1) + 2,$$

und damit lautet die Partialbruchzerlegung (8) in diesem Fall

$$\frac{2s^5 - s^4 + 4s^3 + 1}{(s^2+1)^3} = -\frac{2s}{(s^2+1)^3} + \frac{2}{(s^2+1)^2} + \frac{2s-1}{s^2+1}.$$

Ray Redheffer, University of California, Los Angeles,
z.Zt. Gastprofessor am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe

Alexander Voigt, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe

 0013-6018/89/040089-04$1.50 + 0.20/0

On a discrete Dido-type question

We start with the following well-known fact [1]. If D is a simply connected domain of the Euclidean plane with area $\mathscr{A}(D)$ whose boundary is divided into a segment and a simple curve Γ of length $L(\Gamma)$, then $\mathscr{A}(D) \leqq \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot L^2(\Gamma)$ with equality if and only if D is a hemicircle. In other words if we have a simple curve Γ of given length $L(\Gamma)$ in the Euclidean plane, then the area of its convex hull is maximal if and only if Γ is a hemicircle i.e. $\mathscr{A}(\operatorname{conv}\Gamma) \leqq \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot L^2(\Gamma)$. Reading these sentences we immediately thought of the following discrete version of the above problem. We call it a discrete Dido-type question since it is related to the well-known Dido-problem of Hajós ([3], [4], [5]) and also it is related to the problem of [2], but we believe it to be a new question.