

# On cubic polynomials giving many primes

Autor(en): **Goetgheluck, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **44 (1989)**

Heft 3

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41611>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

also modulo  $\frac{1}{2}\pi$  reduziert = 0, beträgt. Es bleiben die Terme längs  $A_0 A_3$  (mit dem Diederwinkel  $\frac{1}{2}\pi - \alpha$  und der Kantenlänge  $l = \int_{2 \sin \alpha}^u 1/z \, dz$  zwischen den gelegten Horosphären), und längs  $A_0 A_1$  (mit dem Diederwinkel  $\alpha$  und der Länge  $\int_1^u 1/z \, dz$  ausserhalb der Horosphären). Die elementare Ermittlung der Integrale führt auf

$$\Psi(L(\alpha)) = (\log u - \log |2 \sin \alpha|) \otimes (\frac{\pi}{2} - \alpha) + (\log u) \otimes \alpha,$$

also nach Reduzierung mod  $\frac{1}{2}\pi$  und Addition auf

$$\Psi(L(\alpha)) = \log |2 \sin \alpha| \otimes \alpha, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Hans E. Debrunner, Math. Institut, Universität Bern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Böhm J. und Schwulow H.: Eine Zerlegung von vierdimensionalen euklidischen und nichteuklidischen Simplexen in Orthoscheme. *Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena Math. Natur. Reihe* 31, 545–555 (1982); MR 84 d: 52008.
- 2 Böhm J. und Hertel E.: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*. Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart 1981; MR 82 k: 52001 a.
- 3 Debrunner H. E.: *Dissecting orthoschemes into orthoschemes*, im Druck.
- 4 Dupont J. L. and Sah C.-H.: Scissors congruences, II. *J. Pure Appl. Algebra* 25, 159–195 (1982); 30 217 (1983); MR 84 b: 53062 b.
- 5 Hilbert D. und Cohn-Vossen S.: *Anschauliche Geometrie*. Springer, Berlin 1932.
- 6 Lobatschewskij N. I.: *Über die Anfangsgründe der Geometrie*, Kasaner Bote 1830. Übersetzt und kommentiert von F. Engel, Teubner, Leipzig 1898.
- 7 Milnor J. W.: *Hyperbolic Geometry: the first 150 years*. *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 9–24 (1982); MR 82 m: 57005.
- 8 Sah C.-H.: Scissors congruences, I. *The Gauss-Bonnet map*, *Math. Scand* 49, 181–210 (1982); 53, 62 (1983); MR 84 b: 53062 a.
- 9 Schläfli L.: *Theorie der vielfachen Kontinuität*, 1852. In: L. Schläfli, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Band I, 177–392, Birkhäuser, Basel 1950.
- 10 Wythoff W. A.: *The rule of Neper in the four dimensional space*. *K. Akad. Wet. Amsterdam, Proc. Sect. of Sci.* 9, 529–534 (1907).

## On cubic polynomials giving many primes

### 1. Introduction

In the following «prime» means positive or negative prime, that is an integer of the sequence ... -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11 ...

The question of finding quadratic polynomials giving many primes has been widely investigated (see [2, p. 115–117] and [4, p. 141–143]) and we can cite for example  $2n^2 - 199$  (Karst, 1973, see [3]) giving 87 primes for  $n = 0, 1, \dots, 99$  and  $n^2 + n + 41$  (Euler, 1772) giving 86 primes in the same range.

The purpose of this paper is to exhibit some polynomials  $an^3 + bn^2 + cn + d$  giving many primes and to explain the way they were discovered. In the mathematical literature we found only one result about this subject in [1, p. 420]: «Escott found that  $x^3 + x^2 + 17$  is a prime for  $-14, -13, \dots, +10$ » (In fact this is not true since making  $x = -3$  yields the number  $-1$ ).

Arbitrarily we shall say that

« $p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$  gives many primes»

if and only if:

Card  $\{n \in [0, 1, 2, \dots, 99]$  such that  $p(n)$  is prime $\} \geq 75$ .

## 2. Method of computation

All calculations were performed with a micro-computer, using PASCAL and assembly language.

### *First step*

We determine all polynomials  $p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$  satisfying:

- (i)  $a = 1$  or  $a = 2$ .
- (ii)  $-1 \leq b \leq 1$  if  $a = 1$ ;  
 $-2 \leq b \leq 3$  if  $a = 2$ .
- (iii)  $|c| \leq 15$ .
- (iv)  $p(n) \not\equiv 0 \pmod{m}$  ( $m = 2, 3, 5, 7$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ).
- (v)  $|d| \leq 10\,000$ .
- (vi) Card  $\{n \in [0, 1, \dots, 99]$  such that  $p(n)$  is prime $\} \geq 60$ .

### *Comments*

1) Condition (ii) is not a real restriction since replacing  $n$  by  $n + 1$  transforms  $p(n)$  into  $an^3 + (b + 3a)n^2 + (c + 2b + 3a)n + (d + a + b + c)$  showing that  $b$  can be reduced mod  $3a$ .

2) Without condition (iv) we should have 5,219,739 polynomials to examine, that is 521,973,900 primality tests to perform. With this condition the amount of computation is reduced by a factor 40 and the percentage of interesting polynomials lost is very low.

Practically, for given  $a$ ,  $b$ , and  $c$ , to get  $d \in [0, \dots, 209]$  ( $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ) such that  $an^3 + bn^2 + cn + d$  is never divisible by 2, 3, 5 or 7 we run the following algorithm:

```

For  $p = 2, 3, 5$  and  $7$  do
  for  $n = 0$  to  $p - 1$  do
    for  $d = 0$  to  $p - 1$  do
      if  $(an^3 + bn^2 + cn + d) \bmod p = 0$ 
        then for  $j = d$  to  $209$  step  $p$  do suppress  $j$ .

```

The convenient values of  $d \pmod{210}$  are the remaining  $j \in [0, \dots, 209]$ .

*Example:* For  $a = 2$ ,  $b = 1$  and  $c = -7$ , we have only to consider  $d = 41, 107, 167, 191 \pmod{210}$ .

### *Second step*

For every polynomial provided by step 1:

- We search in the interval  $[-100, \dots, 100]$  a sequence of 100 consecutive integers  $j, j + 1, \dots, j + 99$  satisfying.  
Card  $\{n \in [j, j + 1, \dots, j + 99] \text{ such that } p(n) \text{ is prime}\}$  is maximum.
- If the maximum is greater than or equal to 75, changing  $n$  into  $n + j$  in  $p(n)$  yields a new polynomial giving at least 75 primes values for  $n = 0, 1, \dots, 99$ .
- If the maximum is less than 75, the polynomial is rejected.

### *Third step*

In the list of polynomials we get from step 2, there are pairs of polynomials  $(p(n), q(n))$  such that  $p(n) \equiv -q(-n - k)$  for some integer  $k$ . Geometrically this means that graphs of  $p$  and  $q$  are symmetric with respect to a vertical axis. For every pair of such polynomials we cancel one of them.

## 3. Results

From step 1 we get 215 polynomials. After step 2 it remains 34 polynomials and after step 3, 21 polynomials giving at least 75 prime values for  $n = 0, 1, \dots, 99$ . They are listed below with the number of prime values they have for  $0 \leq n < 100, 200, \dots, 500$ .

Polynomials from step 1 have also been exploited to search the longest sequences of consecutive integers  $n$  such that all corresponding values of  $p(n)$  are primes:

- Formulas (14) and (15) give 26 primes respectively for  $n = 16, \dots, 41$  and  $n = 74, \dots, 99$ ;
- Formula  $|2n^3 - 83n^2 + 1157n - 4999|$  gives 34 distinct primes for  $n = 0, \dots, 33$ .

No	a	b	c	d	Number of primes given by $an^3 + bn^2 + cn + d$ for				
					$n < 100$	$n < 200$	$n < 300$	$n < 400$	$n < 500$
(1)	1	-220	16 119	-392 723	75	134	179	219	261
(2)	1	-199	13 190	-290 869	75	124	163	206	235
(3)	1	-160	8 547	-142 811	75	130	179	221	264
(4)	1	-159	8 420	-148 153	76	124	164	203	238
(5)	1	-151	7 610	-129 097	76	125	168	204	245
(6)	1	-150	7 493	-124 277	76	128	170	217	250
(7)	1	-137	6 270	-95 203	75	121	168	197	233
(8)	1	-125	5 196	-73 291	79	130	174	212	254
(9)	1	-119	4 718	-71 741	75	118	158	190	224
(10)	1	-114	4 343	-54 829	76	125	171	200	232
(11)	1	-111	4 100	-49 367	76	119	150	199	246
(12)	1	-97	3 126	-32 603	75	115	161	195	235
(13)	1	-96	3 059	-32 563	75	127	162	192	225
(14)	1	-82	2 237	-20 407	75	112	149	183	218
(15)	2	-489	39 847	-1 084 553	75	134	176	222	267
(16)	2	-372	23 050	-476 027	75	128	174	211	239
(17)	2	-292	14 202	-231 551	76	124	160	206	252
(18)	2	-289	13 917	-221 891	75	124	172	210	247
(19)	2	-281	13 157	-204 487	78	129	169	214	250
(20)	2	-280	13 072	-203 857	76	123	168	204	240
(21)	2	-199	6 595	-79 657	79	125	174	217	257

P. Goetgheluck, Université de Paris-sud

REFERENCES

- 1 Dickson L. E.: History of the theory of numbers, vol. I. Carnegie Inst. Washington, Chelsea, New York 1952.
- 2 Guy R. K.: Reviews in number theory 1973–1983, vol. I. AMS, Providence RI, 1984.
- 3 Karst E.: New quadratic forms with high density of primes. Elem. Math. 28, 116–118 (1973).
- 4 Leveque W. J.: Reviews in number theory 1940–1972, vol. I. AMS, Providence RI, 1974.

## A remark on the gamma function

According to Problem 188, Part II of G. Pólya and G. Szegő [2] for each integrable function  $f(x)$  on  $0 \leq x \leq 1$  we have:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,n)=1}}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx,$$