

# Ein Schliessungssatz der Elementargeometrie

Autor(en): **Walser, Hans**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40813>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 43

Nr. 6

Seiten 161–192

Basel, November 1988

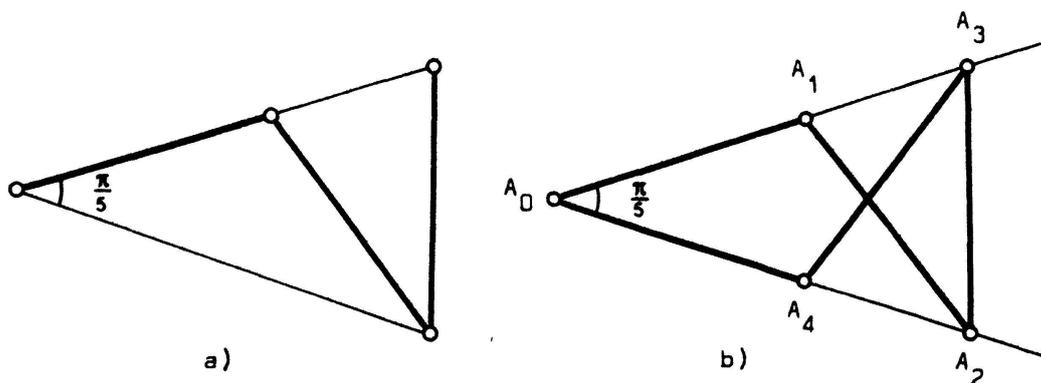
## Ein Schliessungssatz der Elementargeometrie

### 1. Einleitung

Es werden einige Beispiele aus der diskreten Geometrie vorgestellt, die sich aus dem mehrfachen Abtragen einer Strecke konstanter Länge ergeben. Abwechslungsweise Abtragen auf zwei sich schneidenden Geraden ergibt genau dann einen geschlossenen Polygonzug, wenn der Schnittwinkel der beiden Geraden in einem rationalen Verhältnis zu  $\pi$  steht. Eine räumliche Anwendung führt zur Feststellung, dass es auf Wendelflächen neben den üblichen koaxialen Schraubenlinien auch desaxiierte Schraubenlinien gibt. Die dabei verwendeten Methoden gehören in das Gebiet der Differenzgeometrie [2], sie führen von der diskreten Geometrie zur Differentialgeometrie.

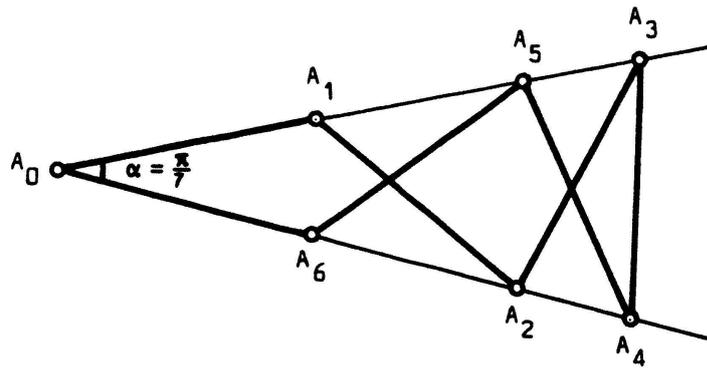
### 2. Abtragen einer Strecke konstanter Länge in einem Winkelfeld

Zeichnet man in einem gleichschenkligen Dreieck mit dem Spitzenwinkel  $\frac{\pi}{5}$  eine Winkelhalbierende eines Basiswinkels ein, erhält man einen Polygonzug aus drei gleich langen Strecken (Fig. 1 a). Daraus folgt, dass man in einem Winkel von  $\alpha = \frac{\pi}{5}$  vom Scheitel aus eine Strecke konstanter Länge  $a$  abwechslungsweise auf den einen oder den andern Schenkel abtragen kann und nach fünfmaligem Abtragen zum Scheitel zurückkommt (Fig. 1 b).

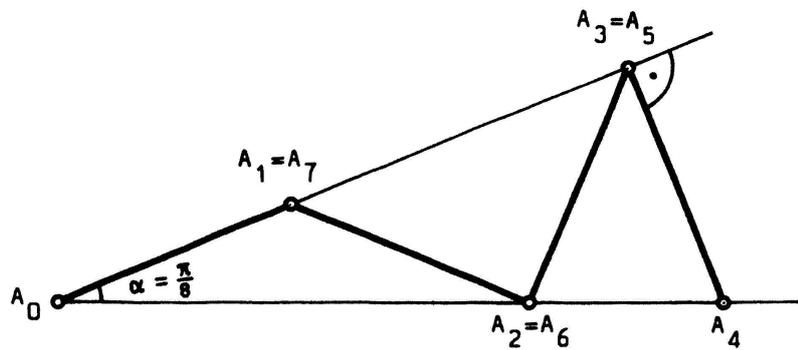


Figur 1. Polygonzüge in einem Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{5}$ .

Mit einfachen Winkelüberlegungen kann man zeigen, dass man für jede natürliche Zahl  $n$  in einem Winkel von  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  vom Scheitel ausgehend genau  $n$  Strecken der Länge  $a$  abwechslungsweise auf die beiden Schenkel abtragen kann und dann zum Scheitel zurückkommt. Für ungerades  $n$  erfolgt der Rückweg spiegelbildlich zum Hinweg (Fig. 2 für  $n = 7$ ), für gerades  $n$  fällt der Rückweg mit dem Hinweg zusammen (Fig. 3 für  $n = 8$ ).

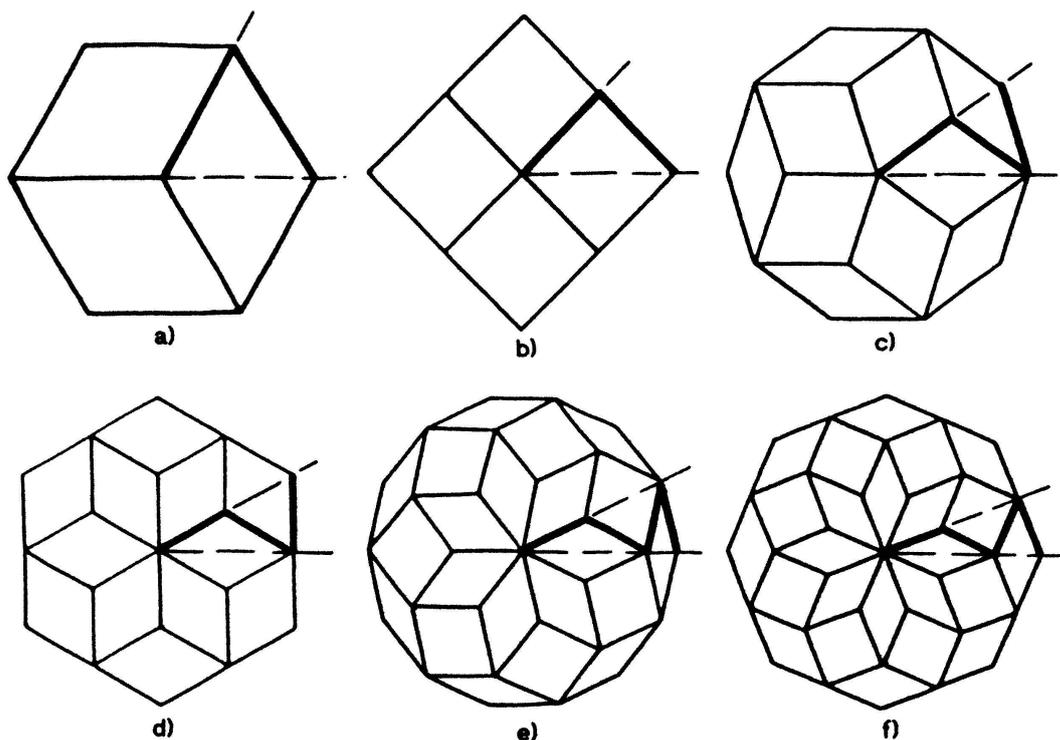


Figur 2. Sieben gleich lange Strecken in einem Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{7}$ .



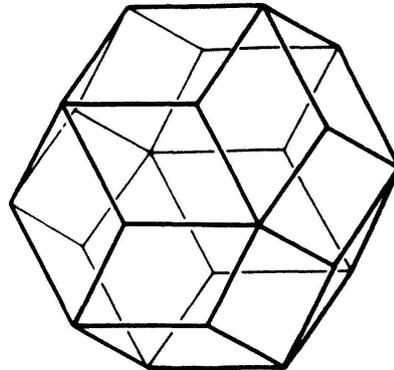
Figur 3. Acht gleich lange Strecken in einem Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .

**Bemerkung:** Zeichnet man, unabhängig von der Parität von  $n$ , nur die erste Hälfte, d. h. nur den Hinweg des Steckenzuges, und spiegelt dann die Figur sukzessive an den Schenkeln des Ausgangswinkels, so erhält man Figuren, die aus Rhomben konstanter Seitenlänge  $a$  bestehen (Fig. 4).



Figur 4. Rhombenfiguren.

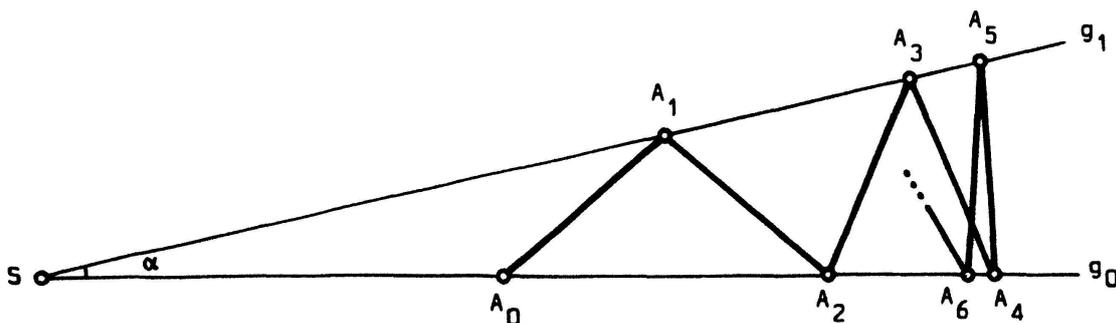
Die Rhombenfiguren der Fig. 4 können als Frontalansichten *rhombischer Zonoeder* interpretiert werden. Zonoeder sind konvexe Körper mit zentralsymmetrischen Seitenflächen (vgl. [1], S. 28). So gehört zum Beispiel zur Fig. 4c das *Rhombenikosaeder* (Fig. 5).



Figur 5. Rhombenikosaeder.

### 3. Der Schliessungssatz

Die Beispiele des Abschnittes 2 sind Sonderfälle eines allgemeineren Sachverhaltes. Wir gehen von zwei Geraden  $g_0$  und  $g_1$  aus, die sich in  $S$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden. Auf  $g_0$  wählen wir einen Startpunkt  $A_0$ . Seine Lage ist beliebig, aber höchstens  $d = \frac{a}{\sin(\alpha)}$  vom Schnittpunkt  $S$  entfernt. (Diese Einschränkung stellt sicher, dass wir mit dem Abtragen der Strecke der Länge  $a$  die Gerade  $g_1$  noch erreichen.) Nun tragen wir von  $A_0$  aus die Strecke der Länge  $a$  sukzessive ab, so dass die Endpunkte  $A_1, A_2, A_3, \dots$  abwechselungsweise auf  $g_1$  und  $g_0$  liegen (Fig. 6).



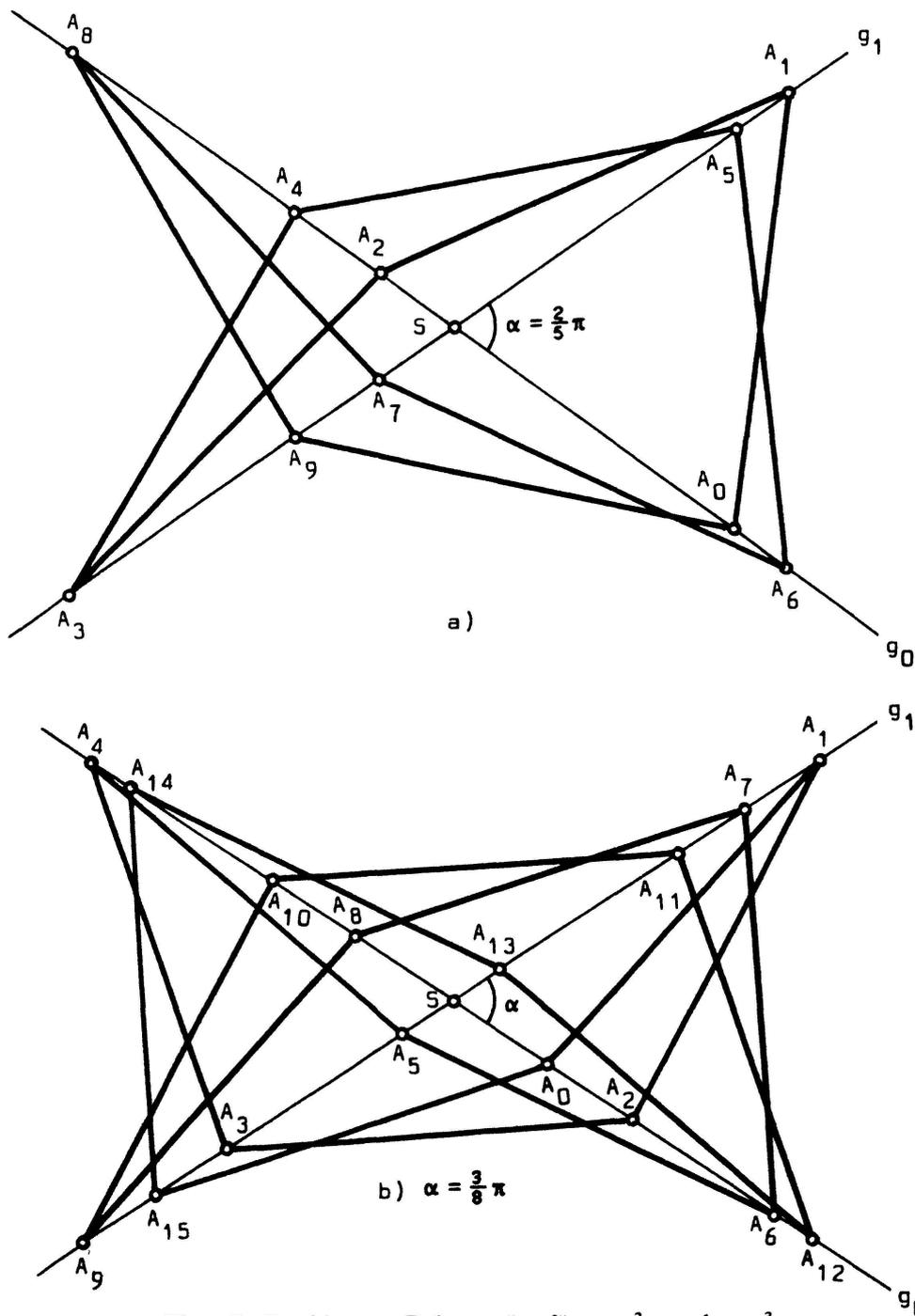
Figur 6. Abtragen der Strecke der Länge  $a$ .

Dann gilt folgender

**Schliessungssatz:** Der Polygonzug  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$  ist genau dann geschlossen, wenn  $\alpha$  ein rationaler Teil von  $\pi$  ist.

Die Fig. 7 zeigt Beispiele für  $\alpha = \frac{2}{5} \pi$  und  $\alpha = \frac{3}{8} \pi$ .

**Beweis:** Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ist der Satz trivial, der geschlossene Polygonzug ist ein Rhombus mit den Geraden  $g_0$  und  $g_1$  als Diagonalen. Im folgenden sei  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Als Vorbereitung untersuchen wir einen Polygonzug  $[B_i B_{i+1} C]$  mit zwei Strecken gleicher Länge  $a$  gemäss Fig. 8.



Figur 7. Geschlossene Polygonzüge für  $\alpha = \frac{2}{5}\pi$  und  $\alpha = \frac{3}{8}\pi$ .

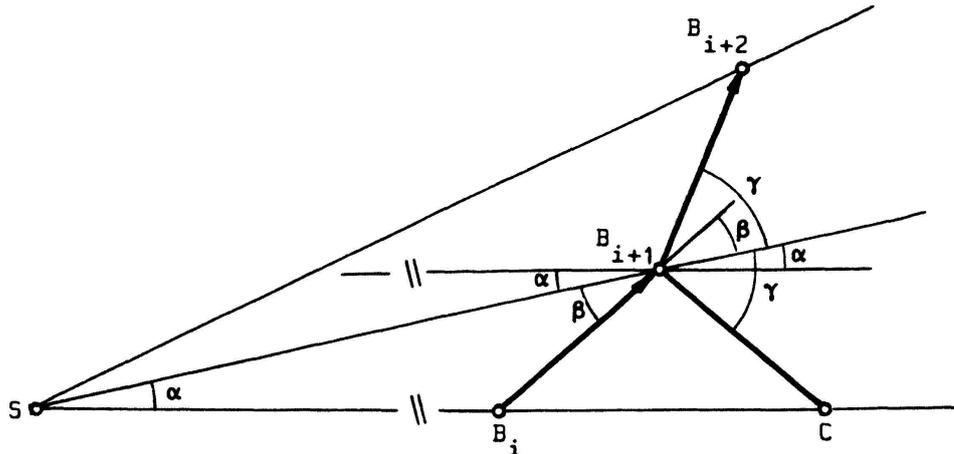
Dieser Figur entnimmt man, dass

$$\beta + \alpha = \gamma - \alpha$$

also

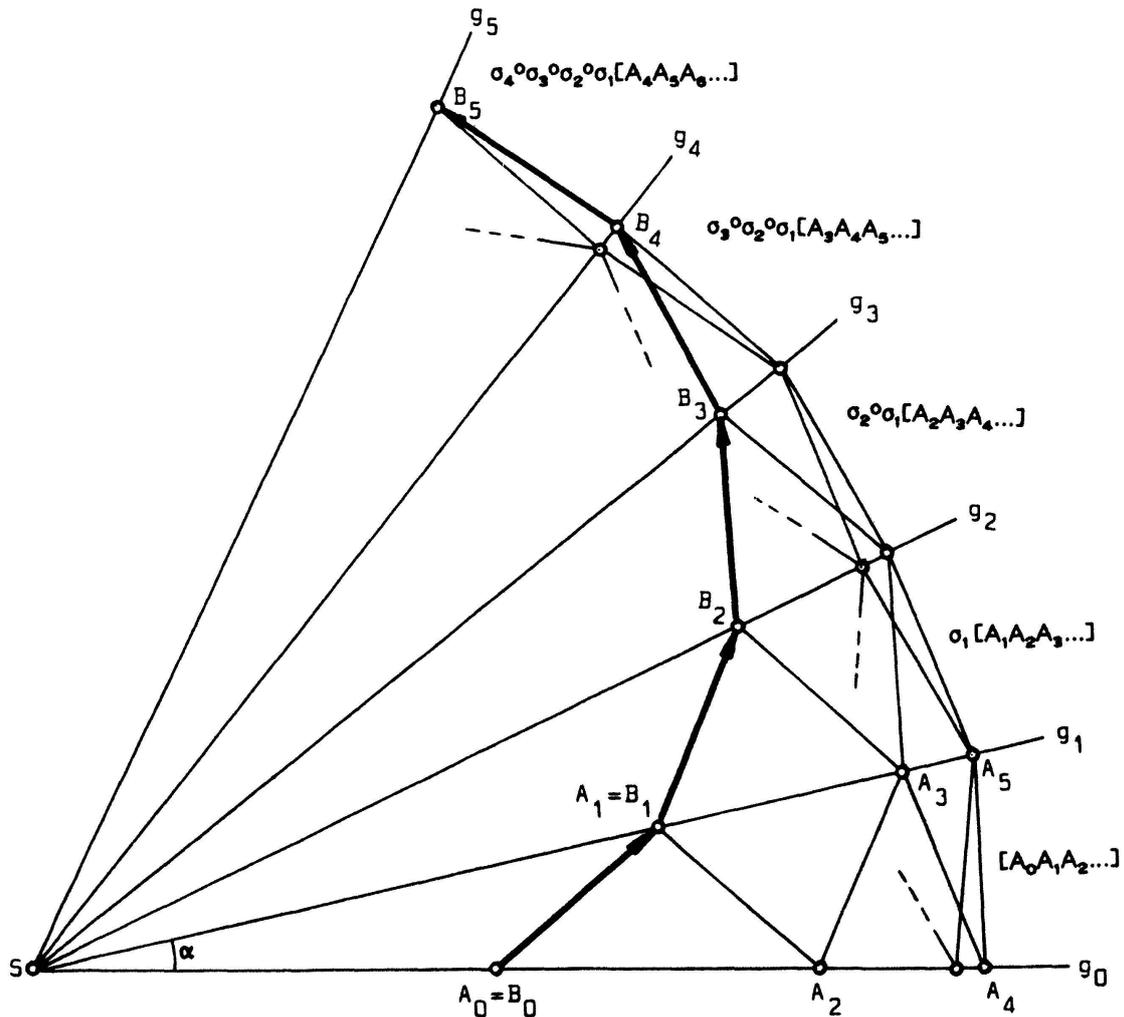
$$\gamma - \beta = 2\alpha.$$

Wir spiegeln nun den Punkt  $C$  an der Geraden  $SB_{i+1}$ , der Spiegelpunkt heisse  $B_{i+2}$ . Aus der Fig. 8 ist nun ersichtlich, dass sich die Richtungen der beiden Vektoren  $\overrightarrow{B_i B_{i+1}}$  und  $\overrightarrow{B_{i+1} B_{i+2}}$  um die Differenz  $\gamma - \beta$ , also um  $2\alpha$  unterscheiden.



Figur 8. Die Richtungen der beiden Vektoren  $\vec{B_i B_{i+1}}$  und  $\vec{B_{i+1} B_{i+2}}$  unterscheiden sich um  $2\alpha$ .

Wir werden im folgenden wiederholt diesen Spiegelungsprozess anwenden und auf diese Weise Vektoren der Länge  $a$  erhalten, deren Richtungen sich um  $2\alpha$  unterscheiden. Die Fig. 9 zeigt zwischen den Geraden  $g_0$  und  $g_1$  den Polygonzug  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$ . Es sei nun  $\sigma_1$  die Spiegelung an  $g_1$ , und  $g_2 = \sigma_1(g_0)$ . Weiter sei  $\sigma_i, i = 2, 3, \dots$ , die Spiegelung an  $g_i$  mit  $g_i = \sigma_{i-1}(g_{i-2})$ . Wir spiegeln nun den Polygonzug  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$  sukzessive an



Figur 9. Spiegeln des Polygonzuges.

$g_1, g_2, g_3, \dots$ , wobei wir aber bei jeder Spiegelung die jeweils vorderste Strecke des Polygonzuges weglassen. Zwischen den Geraden  $g_i$  und  $g_{i+1}$  liegt dann der Polygonzug  $\sigma_i \circ \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1 [A_i A_{i+1} A_{i+2} \dots]$ . Wir bezeichnen den Anfangspunkt dieses Polygonzuges mit  $B_i$ , es ist also

$$B_i = \sigma_i \circ \sigma_{i-1} \circ \dots \circ \sigma_1 (A_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_0 = A_0.$$

Nach einem elementaren Satz der Abbildungsgeometrie (vgl. [3], S. 50) ist die Zusammensetzung zweier aufeinanderfolgender Spiegelungen  $\sigma_k$  und  $\sigma_{k+1}$  eine Rotation  $\varrho$  mit dem Drehzentrum  $S$  und dem Drehwinkel  $2\alpha$ , also

$$\sigma_{k+1} \circ \sigma_k = \varrho.$$

Für gerades  $i$  ist somit

$$B_i = (\sigma_i \circ \sigma_{i-1}) \circ (\sigma_{i-2} \circ \sigma_{i-3}) \circ \dots \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)(A_i) = \varrho^{\frac{i}{2}}(A_i).$$

Für ungerades  $i$  beachten wir, dass  $\sigma_1(A_i) = A_i$ , d. h. die erste Spiegelung  $\sigma_1$  kann weggelassen werden. Dann ist aber

$$B_i = (\sigma_i \circ \sigma_{i-1}) \circ \dots \circ (\sigma_3 \circ \sigma_2)(A_i) = \varrho^{\frac{i-1}{2}}(A_i).$$

Diese beiden Fälle lassen sich zusammenfassen zu

$$B_i = \varrho^{\left[\frac{i}{2}\right]}(A_i) \tag{1}$$

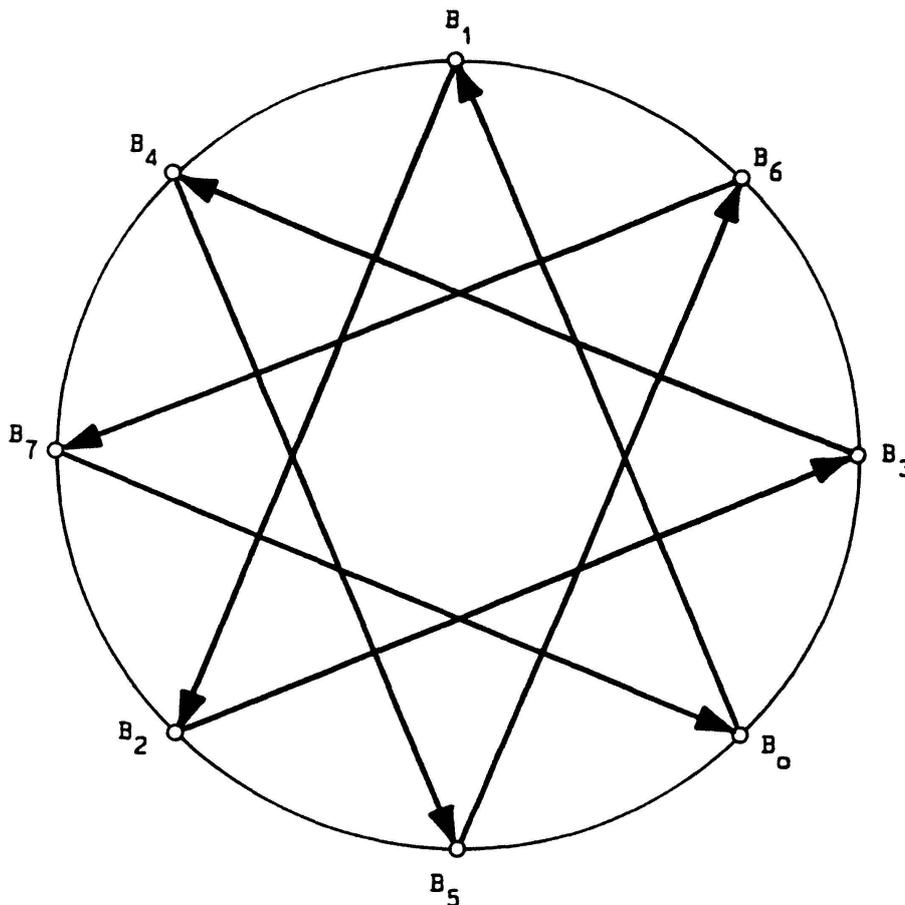
Nach den Überlegungen bei der Fig. 8 erhalten wir somit eine Folge von Vektoren  $\overrightarrow{B_0 B_1}, \overrightarrow{B_1 B_2}, \overrightarrow{B_2 B_3}, \dots$  der Länge  $a$ , deren Richtungen sich um je  $2\alpha$  unterscheiden. Die Addition von Vektoren der konstanten Länge  $a$ , deren Richtungen sich jeweils um  $2\alpha$  unterscheiden, ergibt einen Polygonzug, dessen Ecken auf einem Kreis liegen. Falls der Polygonzug geschlossen ist, muss die Summe der Aussenwinkel ein Vielfaches von  $2\pi$  ergeben, d. h. mit der Eckenzahl  $q$  und der Umlaufzahl  $p$  muss gelten

$$2\alpha q = 2\pi p$$

also

$$\alpha = \frac{p}{q} \pi.$$

Diese notwendige Bedingung für die Geschlossenheit des Polygonzuges ist aber auch hinreichend, denn damit erhält man das (geschlossene) reguläre Sternpolygon  $\left\{\frac{q}{p}\right\}$  (Bezeichnung nach Schläfli. Vgl. [1], S. 93, sowie [4]). Die Fig. 10 zeigt das Beispiel  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ .



Figur 10. Das reguläre Sternpolygon  $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ .

Wenn nun  $\alpha$  in einem irrationalen Verhältnis zu  $\pi$  steht, erhalten wir einen unendlichen Polygonzug  $[B_0 B_1 B_2 \dots]$ , dessen Ecken dicht auf dem Umkreis liegen. Dann enthält aber auch der ursprüngliche Polygonzug  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$  unendlich viele verschiedene Ecken, ist also nicht geschlossen.

Im folgenden sei nun  $\alpha = \frac{p}{q} \pi$  ( $p, q \in \mathbb{Z}, p$  und  $q$  teilerfremd). Wir untersuchen die Anzahl der Ecken des Polygonzuges  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$ . Der durch den Spiegelungsprozess erhaltene Polygonzug  $[B_0 B_1 B_2 \dots B_q]$  ist das geschlossene reguläre Sternpolygon  $\left\{\frac{q}{p}\right\}$ , somit gilt

$$B_{q+i} = B_i \tag{2}$$

und insbesondere

$$B_{2q} = B_q = B_0. \tag{3}$$

Das heisst nun aber *nicht*, dass auch  $A_q = A_0$  ist (vgl. Fig. 7).  
Wir treffen eine **Fallunterscheidung**:

Fall 1.  $S \in \{A_0, A_1, \dots, A_{q-1}\}$ .

Es sei  $S = A_j$ . Dann fallen wegen (1) und (2) die Punkte  $A_j, B_j, B_{q+j}$  und  $A_{q+j}$  mit  $S$  zusammen, der Polygonzug  $[A_0 A_1 A_2 \dots]$  ist identisch mit dem geschlossenen Polygonzug  $[A_j A_{j+1} \dots A_{j+q-1}]$ , welcher  $q$  Strecken enthält.

Fall 2:  $S \notin \{A_0, A_1, \dots, A_{q-1}\}$ .

Aus (1) folgt zunächst

$$A_q = \varrho^{-\left[\frac{q}{2}\right]}(B_q)$$

und wegen (3) und  $A_0 = B_0$  weiter

$$A_q = \varrho^{-\left[\frac{q}{2}\right]}(A_0).$$

Die Rotation  $\varrho^{-\left[\frac{q}{2}\right]}$  hat den Drehwinkel  $\delta = -\left[\frac{q}{2}\right] 2\alpha = -\left[\frac{q}{2}\right] \frac{p}{q} 2\pi$ .

Für ungerades  $q$  ist  $\delta = -p\pi + \frac{p}{q} 2\pi = -p\pi + \alpha$ .

Somit ist für ungerades  $q$  der Punkt  $A_q$  von  $A_0$  verschieden.

Für gerades  $q$  erhält man  $\delta = -p\pi$ . Da  $p$  und  $q$  teilerfremd sind, ist bei geradem  $q$  die Zahl  $p$  ungerade, die Drehung um  $-p\pi$  also eine Punktspiegelung am Drehzentrum  $S$  und somit ist auch hier  $A_q \neq A_0$ .

Für den Punkt  $A_{2q}$  erhält man analog

$$A_{2q} = \varrho^{-\left[\frac{2q}{2}\right]}(A_0).$$

Die Rotation  $\varrho^{-\left[\frac{2q}{2}\right]}$  hat den Drehwinkel  $\delta = -2p\pi$ , ist also die identische Abbildung.

Somit ist  $A_{2q} = A_0$ , der Polygonzug ist geschlossen und enthält  $2q$  Strecken.

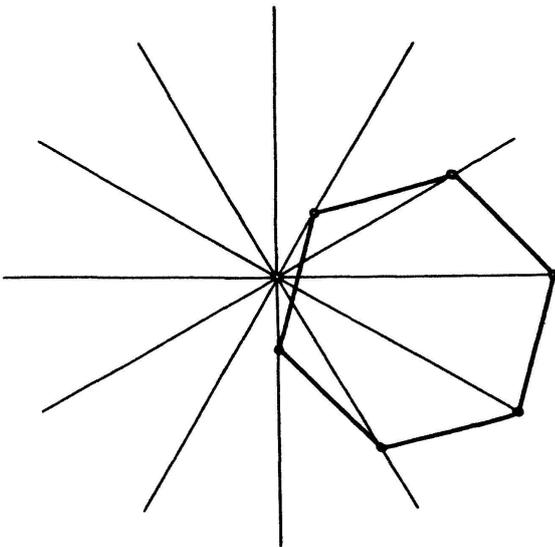
Damit ist der Schliessungssatz bewiesen.

#### 4. Böschungslinien auf Wendelflächen

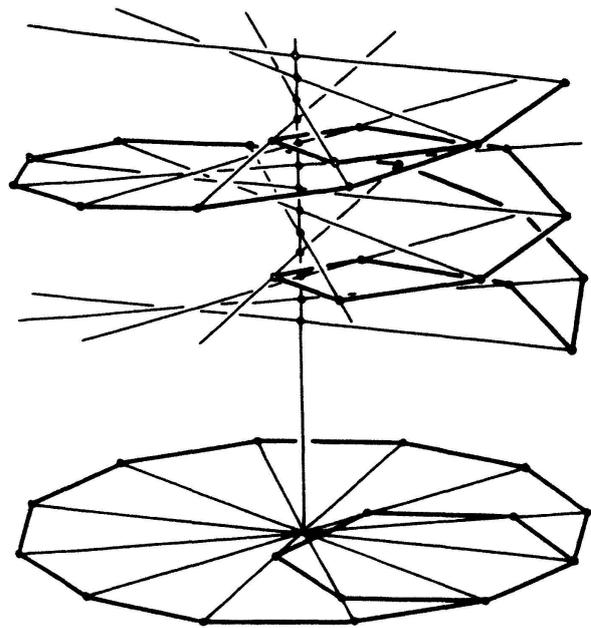
Die Geraden eines Büschels mit dem konstanten Schnittwinkel  $\alpha$  können als aequidistante Niveaulinien einer *Wendelfläche* interpretiert werden. Gemäss Abschnitt 3 können wir aber in einem Büschel mit  $\alpha = \frac{\pi}{q}$  eine Strecke konstanter Länge so abtragen, dass ein

regelmässiges  $q$ -Eck  $\{q\}$  entsteht (Fig. 11 mit  $q = 6$ ).

Bei Interpretation der Büschelgeraden als Niveaulinien einer Wendelfläche stellt das regelmässige  $q$ -Eck  $\{q\}$  eine Diskretisation einer Böschungslinie mit kreisförmigem Grundriss dar. Ein Böschungslinie, d. h. eine Kurve mit konstanter Steigung, mit kreisförmigem Grundriss ist aber eine *Schraubenlinie*. Es gibt also auf einer Wendelfläche



Figur 11. Regelmässiges Sechseck im Geradenbüschel mit  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .



Figur 12. Schraubenlinien auf einer Wendelfläche.

neben den üblichen Schraubenlinien (Orthogonaltrajektorien der Niveaulinien) auch *desaxierte Schraubenlinien* (Fig. 12).

Eine desaxierte Schraubenlinie hat im Vergleich mit der axialen Schraubenlinie gleicher Steigung den halben Radius und die halbe Ganghöhe. Ihr Trägerzylinder enthält die Achse der Wendelfläche als Mantellinie.

**Bemerkung:** Dieses auf differenzengeometrischem Weg gefundene Resultat lässt sich auch direkt verifizieren. Aus der Parametrisierung der Wendelfläche

$$\vec{r}(u, v) = u(\cos v, \sin v, 0) + v(0, 0, p)$$

erhält man durch die Bedingung  $u = r$  die koaxiale Schraubenlinie mit dem Radius  $r$ :

$$\vec{r}(v) = r(\cos v, \sin v, 0) + v(0, 0, p).$$

Die Bedingung  $u = r \cos v$  liefert die *desaxierte* Schraubenlinie (Parameter  $t = 2v$ ):

$$\vec{r}(t) = \frac{r}{2}(1 + \cos t, \sin t, 0) + \frac{t}{2}(0, 0, p)$$

Hans Walser  
Kantonsschule Frauenfeld und ETH-Zürich

LITERATUR

- 1 Coxeter H. S. M.: Regular Polytopes. Third Edition. New York: Dover 1973.
- 2 Sauer R.: Differenzengeometrie. Berlin: Springer 1970.
- 3 Yaglom I. M.: Geometric Transformations I. New York: Random House 1962.
- 4 Zeitler H.: Reguläre Polygone. Didaktik der Mathematik 15, 18–33 (1987).