

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Beweis:

In dem bei  $D$  rechtwinkligen Dreieck  $SDA$  ist  $|SD| = r \cos(\alpha + \varphi)$ ; in dem bei  $D$  rechtwinkligen Dreieck  $SDC$  ist  $|SC| = |SD| \cos \alpha$ . Somit ist  $|SC| = r \cos(\alpha + \varphi) \cos \alpha$ .

In dem bei  $A$  rechtwinkligen Dreieck  $SPA$  ist  $|SP| = |SA| \cos \alpha$ . Die Projektion von  $|SP|$  auf  $c$  ist  $|SP| \cos(\alpha + \varphi)$ ; also ist diese Projektion  $r \cos(\alpha + \varphi) \cos \alpha = |SC|$ . Deshalb ist der Schnittpunkt  $C$  von  $AE$  mit  $c$  der Fußpunkt des von  $P$  auf  $c$  gefällten Lotes, somit steht  $PC$  senkrecht auf  $c$ .

*Anmerkung:* Weil  $\sphericalangle(SCP) = 90^\circ$  ist, kann man  $C$  auch als Schnittpunkt des Thales-Kreises über  $|SP|$  mit  $c$  konstruieren. Das Viereck  $SCPA$  ist ein Sehnenviereck mit zwei gegenüberliegenden rechten Winkeln bei  $A$  und bei  $C$ .

Helmut Sieber, Böblingen

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Bachmann F.: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1974.

© 1988 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/88/030086-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 961.** Für positive Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  sei

$$p_1 := (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad p_2 := (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)/3, \quad p_3 := x_1 x_2 x_3.$$

Dann gilt

$$p_3^2 + 5p_2^3 \geq 6p_1 p_2 p_3$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = x_3$ . Dies ist zu zeigen.

V. D. Mascioni, Origlio

*Lösung:* Setzt man

$$f(x_1, x_2, x_3) = p_3^2 + 5p_2^3 - 6p_1 p_2 p_3,$$

dann ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^6 f(x_1, x_2, x_3).$$

$f$  ist also homogen in  $x_1, x_2, x_3$  vom Grade 6 und man kann oBdA normieren:

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = 1 + a, \quad x_2 x_3 = 1 + b, \quad 0 \leq a \leq b.$$

Wegen

$$p_3^2 = (1 + a)(1 + b), \quad p_2 = (3 + a + b)/3, \quad p_1 p_3 = ((1 + a) + (1 + b) + (1 + a)(1 + b))/3$$

erhält man nach Umformen

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}((a - b)^2 + ab) + \frac{a + b}{27}(5(a - b)^2 + 2ab) \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $a = b = 0$ , d. h.  $x_1 = x_2 = x_3$  gilt.

M. Vowe, Therwil

*Bemerkung der Redaktion.* O. P. Lossers zeigt allgemeiner:

$$p_3^2 + \beta p_2^3 \geq (\beta + 1)p_1 p_2 p_3 \quad \text{für } \beta \geq 3$$

mit Gleichheit genau für  $x_1 = x_2 = x_3$ .

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Tsen-Pao Shen (München, BRD), I. Paasche (Stockdorf, BRD; 2 Lösungen), A. Voigt (Karlsruhe, BRD), H. Wellstein (Flensburg, BRD).

**Aufgabe 962.** Let  $f, g$  be nonzero orthogonal elements of  $L_2(0, 1)$ . Show that

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2}{\int_0^1 (f(x))^2 dx} + \frac{\left(\int_0^1 g(x) dx\right)^2}{\int_0^1 (g(x))^2 dx} \leq 1.$$

I. Mereny, Cluj, Rumänien

*Solution:* This is a special case of Bessel's inequality: Since  $\tilde{f} := f/\|f\|$  and  $\tilde{g} := g/\|g\|$  form an orthonormal system and  $\int_0^1 e(x)^2 dx = 1$  for the unit function  $e(x) := 1$  we have

$$1 = \|e\|^2 \geq |(e, \tilde{f})|^2 + |(e, \tilde{g})|^2.$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

*Bemerkung der Redaktion.* R. Wyss beweist allgemeiner:

$$\frac{\left(\int_a^{a+T} f(x) dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (f(x))^2 dx} + \frac{\left(\int_a^{a+T} g(x) dx\right)^2}{\int_a^{a+T} (g(x))^2 dx} \leq \frac{1}{2 - T}, \quad 0 < T < 2.$$

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), M. Hübner (Leipzig, DDR), A. A. Jagers (Enschede, NL), Kee-wai Lau (Hong Kong), S. Nanba (Okayama, Japan), H.-J. Seiffert (Berlin), L. Siccha (Berlin), R. Wyss (Flumenthal).

### Aufgabe 963.

- a) Von  $n$  linear angeordneten weissen Kugeln sollen  $k$  rot bemalt werden, und zwar derart, dass die roten Kugeln  $m$  Blöcke mit je mindestens  $s$  Kugeln bilden und dass die roten Blöcke durch Blöcke mit je mindestens  $t$  weissen Kugeln getrennt sind. Bestimme die Anzahl solcher Färbungen.
- b) Wie a), aber für den Fall, dass die  $n$  weissen Kugeln im Kreis angeordnet sind.

J. Binz, Bollingen

*Lösung des Aufgabenstellers.* Wir benötigen eine einzige Hilfsaussage aus der Schulkombinatorik, nämlich

$$\text{Die Gleichung } x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \text{ (} x_i \in \mathbb{N} \text{) hat } \binom{n-1}{k-1} \text{ Lösungen.} \quad (1)$$

- a)  $y_i$  sei die Anzahl der Kugeln im  $i$ -ten roten Block ( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $x_0$  weisse Kugeln liegen vor dem ersten roten Block,  $x_i$  weisse Kugeln zwischen dem  $i$ -ten und  $(i+1)$ -ten roten Block ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ), und  $x_m$  weisse Kugeln folgen auf den letzten roten Block. Bei einer korrekten Färbung müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_m = n - k, \quad x_0 \geq 0, \quad x_1 \geq t, \dots, x_{m-1} \geq t, \quad x_m \geq 0, \quad (2)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_m = k, \quad y_i \geq s. \quad (3)$$

Umgekehrt lässt sich aus jeder Lösung  $(x_0, y_1, x_1, y_2, \dots, x_{m-1}, y_m, x_m)$  des Systems (2), (3) eindeutig eine korrekte Färbung konstruieren. Die Gesuchte Anzahl ist somit gleich der Anzahl Lösungen dieses Systems. Mit den Substitutionen  $x'_0 = x_0 + 1$ ,  $x'_m = x_m + 1$ ,  $x'_i = x_i - t + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ),  $y'_i = y_i - s + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) führt man (2) und (3) je auf (1) zurück und erhält so die gesuchte Anzahl

$$x = \binom{n-k-(m-1)(t-1)+1}{m} \binom{k-m(s-1)-1}{m-1}.$$

### Bemerkungen:

- Für  $t = s = 1$  kommt ein bekannter Fall heraus:  $\binom{n-k+1}{m} \binom{k-1}{m-1}$  ist die Anzahl derjenigen  $k$ -Auswahlen aus  $n$  Objekten, die aus genau  $m$  Blöcken von Objekten mit aufeinanderfolgenden Nummern bestehen (Einerblöcke zugelassen).
- Ist zusätzlich  $m = k$ , so entsteht  $\binom{n-k+1}{k}$ , die Anzahl der  $k$ -Auswahlen aus  $n$  nummerierten Objekten, die keine benachbarten Objekte enthalten.

b) Die erste und die letzte Kugel dürfen jetzt im gleichen Block liegen. Die verschiedenen Unterfälle lassen sich auf den linearen Fall zurückführen.

b1) Die Kugeln 1 und  $n$  sind verschiedenfarbig, z. B.  $n$  weiss und 1 rot. Solchen Färbungen entsprechen lineare Färbungen mit  $x_0 = 0, x_m \geq t$ . Ihre Anzahl beträgt demnach

$$z_1 = 2 \binom{n - k - m(t - 1) - 1}{m - 1} \binom{k - m(s - 1) - 1}{m - 1}.$$

b2) Die Kugeln 1 und  $n$  sind beide rot. Die entsprechenden linearen Färbungen bestehen jetzt aus  $m + 1$  roten Blöcken mit  $m$  weissen Zwischenblöcken, ohne weisse Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl der roten Anfangs- und Endkugeln  $\geq s$  ist. Aus (3) wird jetzt

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{m+1} = k \quad \text{mit} \quad y_1 \geq 1, \quad y_{m+1} \geq 1, \quad y_1 + y_{m+1} \geq s$$

und  $y_i \geq s, \quad (i = 2, 3, \dots, m).$  (3')

Die Fälle  $y_1 = 1, 2, \dots, s - 2$  und  $y_1 \geq s - 1$  sind getrennt zu behandeln. Wir erhalten

$$z_2 = \binom{n - k - m(t - 1) - 1}{m - 1} \left[ (s - 2) \binom{k - s - (m - 1)(s - 1)}{m - 1} + \binom{k - s - (m - 1)(s - 1) + 1}{m} \right].$$

Diese Formel liefert auch für  $s = 1$  das korrekte Ergebnis.

b3) Die Kugeln 1 und  $n$  sind beide weiss. Die entsprechende lineare Färbung hat  $m$  rote Blöcke mit je mindestens einer weissen Kugel am Anfang und am Ende, aber so, dass die Anzahl dieser Anfangs- und Endkugeln  $\geq t$  ist. Aus (2) wird jetzt

$$x_0 + x_1 + \dots + x_m = n - k \quad \text{mit} \quad x_0 \geq 1, \quad x_m \geq 1, \quad x_0 + x_m \geq t$$

und  $x_i \geq t, \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1).$  (2')

Diesmal sind  $x_0 = 1, 2, \dots, t - 2$  und  $x_0 \geq t - 1$  getrennt zu behandeln:

$$z_3 = \binom{k - m(s - 1) - 1}{m - 1} \left[ (t - 2) \binom{n - k - t - (m - 1)(t - 1)}{m - 1} + \binom{n - k - t - (m - 1)(t - 1) + 1}{m} \right].$$

Schliesslich ist die gesuchte Anzahl  $z = z_1 + z_2 + z_3$ .

*Bemerkungen:*

– Für  $t = s = 1$  kommt  $z = \frac{n}{n - k} \binom{k - 1}{m - 1} \binom{n - k}{m}$  heraus, die bekannte Anzahl derjenigen  $k$ -Auswahlen aus  $n$  numerierten im Kreis angeordneten Objekten, die aus genau

$m$  Blöcken von Objekten mit aufeinanderfolgenden Nummern bestehen (Einerblöcke zugelassen).

- Ist zusätzlich  $m = k$ , so entsteht  $\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$ , die Anzahl der  $k$ -Auswahlen aus  $n$  nummerierten im Kreis angeordneten Objekte, die keine benachbarten Objekte enthalten.

**Aufgabe 964.** Man bestimme alle Paare  $(a, b)$  von reellen Zahlen  $a, b$  derart, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:

$$a[b n] = b[a n].$$

( $[x]$  bezeichnet die grösste ganze Zahl  $\leq x$ .)

W. Janous, Innsbruck, A

*Solution:* It is clear that  $a[b n] = b[a n]$  for all natural numbers  $n$  if either  $ab = 0$ , or if  $a = b$ , or if  $a$  and  $b$  are both integers. We show that this condition is also necessary. Thus we suppose  $a[b n] = b[a n]$  for all  $n$ ,  $ab \neq 0$ , and  $a \neq b$ . Then, taking  $n = 1$ , we have  $bm = ak$ , where  $m = [a]$  and  $k = [b]$ . Thus  $2m \leq 2a < 2m + 2$ , so that either  $2m \leq 2a < 2m + 1$  or  $2m + 1 \leq 2a < 2m + 2$ . Similarly, either  $2k \leq 2b < 2k + 1$  or  $2k + 1 \leq 2b < 2k + 2$ . Taking  $n = 2$  we conclude that in fact  $[2a] = 2m$  and  $[2b] = 2k$ . (Each of the other possibilities contradicts one of our hypotheses.) Repeating this argument we inductively establish that  $[2^r a] = 2^r m$  and  $[2^r b] = 2^r k$ , so that  $m \leq a < m + 1/2^r$  and  $k \leq b < k + 1/2^r$  for all natural numbers  $r$ . Thus  $a = m$  and  $b = k$ , and our assertion is proven.

J. L. Brenner, Palo Alto, USA  
L. L. Foster, Northridge, USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Chr. A. Meyer (Bern), H. Müller (Hamburg, BRD), L. Sicha (Berlin), R. Wyss (Flumenthal).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinschrift erbeten bis 10. Dezember 1988 an Dr. H. Kappus. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit Problem ... A, B bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68), Problem 872 A (Band 36, S. 175), Aufgabe 880 (Band 37, S. 93).

**Aufgabe 985.** Welche Normale eines Kegelschnittes begrenzt zusammen mit dem Kegelschnitt ein Segment minimaler Fläche?

H. Widmer, Rieden

**Aufgabe 986.** Die Folge  $(a_n)$  sei definiert durch

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man berechne den Wert der Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(a_n + 1) - \ln(a_n - 1)).$$

M. Vowe, Therwil

**Aufgabe 987.** Man bestimme die kleinste reelle Zahl  $r$  und die grösste reelle Zahl  $s$  derart, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  gilt:

$$\left(\frac{a+b}{r}\right)^{b-a} < \left(\frac{e}{a}\right)^a \left(\frac{b}{e}\right)^b < \left(\frac{a+b}{s}\right)^{b-a}$$

H. Alzer, Waldbröl, BRD

**Aufgabe 988.** For  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n > 0$ , let  $f(t) = I_m(t)/I_n(t)$ , where

$$I_p(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!}$$

is the modified Bessel function of the first kind and order  $p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ). Prove that  $f$  is increasing on  $(0, \infty)$  with limit 0, if  $t \downarrow 0$  and limit 1, if  $t \rightarrow \infty$ .

A. A. Jagers, Enschede, NL

## Literaturüberschau

A. T. Fomenko, D. B. Fuchs und V. L. Gutenmacher: Homotopic Topology. 310 Seiten, verschiedene Figuren und Abbildungen, US-\$ 33.00. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1986.

Dieses Buch unterscheidet sich von den üblichen Einführungen in die algebraische Topologie, sowohl im Stil wie auch in der Anlage. Aufbauend auf dem Homotopiebegriff werden Überlagerungen und Faserungen studiert, mit vielen geometrischen Beispielen zur Motivation. Anschließend werden singuläre und zelluläre Homologie definiert, mit Anwendungen bis zur Obstruktionstheorie. Dann werden ausführlich Spektralsequenzen und Kohomologieoperationen diskutiert. Der letzte Teil ist ganz der Adams-Spektralreihe gewidmet.

Der Leser wird also von Anfang an mit technisch recht anspruchsvollem Material konfrontiert. Entsprechend tief und schön sind dann auch die Anwendungen. Neben vielen Diagrammen, die den Text ergänzen, ist das Buch mit Graphiken von Fomenko illustriert, der sich auch als Künstler einen Namen gemacht hat. G. Mislin