Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 2

PDF erstellt am: **27.04.2024**

REFERENCES

1 E. E. Kummer: Über die hypergeometrische Reihe.... J. Reine Angew. Math. *15*, 39–83 and 127–172 (1836).
2 H. M. Srivastava, P. W. Karlsson: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto 1985.
3 M. Vowe, H.-J. Seiffert: Aufgabe 946. Elem. Math. *42*, 111–112 (1987).

 0013-6018/88/020054-05 $ 1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 957. Man beweise die Ungleichung

$$\sin(x/2) + \cos x < (\pi - x)/2; \quad 0 < x < \pi .$$

P. Ivady, Budapest, Ungarn

Lösung. Für $0 < x < \pi$ gilt nach einer bekannten Identität

$$\begin{aligned} \sin(x/2) + \cos x &= 2\sin((\pi - x)/4)\cos((3x - \pi)/4) \\ &< 2\sin((\pi - x)/4) \\ &< (\pi - x)/2 . \end{aligned}$$

A. A. Jagers, Enschede, NL

Weitere Lösungen sandten S. Arslanagic (Trebinje, YU), A. Bender (Zürich), H. Bopp (Illingen), E. Braune (Linz, A), P. Bracken (Toronto, CD), P. Bundschuh (Köln, BRD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), I. Merenyi (Berveni, RU), A. Müller (Zürich), P. Müller (Nürnberg, BRD), H.-J. Seiffert (Berlin), Tsen-Pao Shen (München, BRD), H. M. Smid (Amsterdam, NL), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 958. Es seien

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k} \quad \text{und} \quad y_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1} .$$

Man berechne: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + \log y_n)$.

H. Alzer, Waldbröl, BRD

Lösung. Mit dem binomischen Lehrsatz bestätigt man sofort die Darstellungen

$$x_n = \int_0^1 \{1-(1-t)^n\}/t\,dt = \int_0^1 (1-s^n)/(1-s)\,ds = \int_0^1 (1+s+\ldots+s^{n-1})\,ds =$$
$$= 1 + 1/2 + \ldots + 1/n \quad \text{und}$$
$$y_n = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = 1/n, \quad \text{also } \log y_n = -\log n\,.$$

Der gesuchte Grenzwert ist daher die Eulersche Konstante C.

W. Janous, Innsbruck, A.

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bollingen), P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Dilcher (Halifax, CD), F. Götze (Jena, DDR), M. Hübner (Leipzig, DDR), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), Chr. A. Meyer (Bern), A. Müller (Zürich), P. Müller (Nürnberg, BRD), S. Nanba (Okayama, Japan), P. Sakmann (Wangen), H.-J. Seiffert (Berlin), H. M. Smid (Amsterdam, NL), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal), M. Vowe (Therwil).

Aufgabe 959. Es seien $p, q_1, \ldots, q_n$ paarweise verschiedene ungerade Primzahlen mit $p < q_i\,(i = 1, \ldots, n)$ und mit der Eigenschaft, dass $-q_i$ quadratischer Rest mod p ist $(i = 1, \ldots, n)$. Man beweise oder widerlege: Jede natürliche Zahl m der Art

$$m = q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} \ldots q_n^{\nu_n}; \quad \nu_i \in \mathbb{N}_0 (i = 1, \ldots, n)$$

lässt sich in der Form

$$m = x^2 + py^2; \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

darstellen.

A. Bege, Cluj, Rumänien

Lösung. Die Aussage wird wie folgt widerlegt. Man wähle eine beliebige Primzahl $p \equiv 3 \pmod 4$ und dann $q_1, \ldots, q_n$ als paarweise verschiedene Primzahlen der Form $kp - 1$ mit $k \in \{2, 3, \ldots\}$; nach dem Dirichletschen Satz ist dies möglich. Offenbar ist $p < q_i$ und $-q_i \equiv 1 \pmod p$, also $-q_i$ quadratischer Rest modulo p, jeweils für $i = 1, \ldots, n$. Somit sind die generellen Voraussetzungen der Aufgabenstellung erfüllt. Dennoch ist kein natürliches m der Form $q_1^{\nu_1} \ldots q_n^{\nu_n}$ mit ungerader Exponentensumme $\nu_1 + \ldots + \nu_n$ in der Gestalt $x^2 + py^2$ darstellbar: Andernfalls wäre nämlich

$$-1 = (-1)^{\nu_1 + \ldots + \nu_n} \equiv q_1^{\nu_1} \ldots q_n^{\nu_n} = x^2 + py^2 \equiv x^2 \pmod p\,,$$

d.h. -1 wäre quadratischer Rest modulo p, was jedoch der Wahl $p \equiv 3 \pmod 4$ widerspricht.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte W. Janous (Innsbruck, A).

Aufgabe 960. Man bestimme den Ort des Punktes, in welchem sich zwei Kreise, die der Parabel $y^2 = 2px$ einbeschrieben sind, unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung. Die Normale der Parabel $y^2 = 2px$ hat im Punkte $(x, \sqrt{2px})$ die Steigung $-\sqrt{2px}/p$, der Mittelpunkt eines dort berührenden, symmetrisch zur x-Achse liegenden Kreises hat daher die x-Koordinate $x + p$ und den Radius $\sqrt{p^2 + 2px}$.
Seien x_1, x_2 die x-Koordinaten zweier einbeschriebener Kreise, die sich im Punkte (x, y) orthogonal schneiden. Sie haben die Radien $r_i = \sqrt{p^2 + 2p(x_i - p)} = \sqrt{2px_i - p^2}$ für $i = 1, 2$. Der Satz des Pythagoras in den Dreiecken $\Delta((x_i, 0), (x, 0), (x, y))$ lehrt nun

$$\begin{aligned} & r_i^2 = 2px_i - p^2 = (x - x_i)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x_i^2 - 2(x + p)x_i + p^2 + y^2 + x^2 = 0, \end{aligned}$$

also sind die x_i Nullstellen des Polynoms $z^2 - 2(x + p)z + p^2 + y^2 + x^2 = (z - x_1) \cdot (z - x_2)$. Zum Schluss verwenden wir den Höhensatz im Dreieck $\Delta((x_1, 0), (x_2, 0), (x, y))$ und finden

$$\begin{aligned} & y^2 = (x - x_1)(x_2 - x) = -(x - x_1)(x - x_2) \\ & \quad = -x^2 + 2(x + p)x - p^2 - y^2 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2y^2 = 2px - p^2 \\ \Leftrightarrow\ & y^2 = 2\left(\frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

d. h. eine um $p/2$ verschobene Parabel mit Parameter $p/2$.
Nun muss aber $x_1 \geqq p$ sein. Indem wir die gefundene Parabel mit dem Kreis $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ schneiden, finden wir die zulässigen x-Werte als Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} & p\left(x - \frac{p}{2}\right) = p^2 - (x - p)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - px - \frac{p^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir die beiden Parabelbogen

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, x \geqq x_{\min} := \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\, p \doteq 1.366 \cdot p \quad \text{und} \quad y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)\right\}.$$

Bemerkung: Diese Parabel wird durch Streckung der gegebenen für x-Werte $\geqq \sqrt{3}$ um den Faktor $\frac{1}{2}$ mit Streckenzentrum $(p, 0)$ erhalten:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2\frac{p}{2}\left(p + \Delta x - \frac{p}{2}\right) &= 4p\left(\frac{p}{2} + \Delta x\right) \\ &= 2p(p + 2\Delta x). \end{aligned}$$

A. Müller, Zürich

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), G. Seltmann (Dresden, DDR), Tsen-Pao Shen (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), G. Unger (Dornach), M. Vowe (Therwil), H. Widmer (Rieden), R. Wyss (Flumenthal).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzigen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1988* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu dem mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44), Problem 862 A (Band 36, S. 68).

Aufgabe 981. Man beweise oder widerlege folgende Aussage:
Das Polynom

$$f(x) = x^5 + x - t$$

ist über $\mathbb{Z}$ irreduzibel, wenn $t = \pm p^n$, p Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $p^n > 2$.

O. Buggisch, Darmstadt, BRD

Aufgabe 982. Es seien s, n, m feste natürliche Zahlen und P die Menge aller Partitionen

$$s = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

von s mit nichtnegativen ganzen Summanden k_i. Man bestimme

$$S(s, n, m) := \operatorname*{Min}_{P} \sum_{i=1}^{n} \binom{k_i}{m}.$$

J. Binz, Bollingen

Aufgabe 983. Für $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \geqq n$ ist die Summe

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (z - m)^n$$

geschlossen auszuwerten.

W. Koepf, Berlin

Aufgabe 984. Es seien α, β, γ die Innenwinkel, r der Inkreisradius und R der Umkreisradius eines ebenen Dreiecks. Man zeige, dass

$$\frac{2R^2 - 2Rr - r^2}{4R^2} \leqq \sin^4(\alpha/2) + \sin^4(\beta/2) + \sin^4(\gamma/2) \leqq \frac{4R^2 - 8Rr + 3r^2}{4R^2},$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Fall.

D. M. Milosevic, Pranjani, YU