Über Lehmers Mittelwertfamilie

Autor(en): **Alzer, Horst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **43 (1988)**

Heft 2

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40801

REFERENCES

1 G. Birman and K. Nomizu: Trigonometry in Lorentzian geometry. Amer. Math. Monthly, vol. 91, No. 9, Nov. 1984.
2 L. K. Graves: Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. Transaction of the A.M.S., vol. 252, 1979.
3 R. K. Sach and H. Wu: General relativity for mathematicians. Springer, New York, 1977.

 0013-6018/88/020046-05$1.50+0.20/0

Über Lehmers Mittelwertfamilie

Gegenstand dieser Note ist die für positive x und y sowie für reelle Parameter r definierte Mittelwertfamilie

$$L_r(x,y)=\frac{x^{r+1}+y^{r+1}}{x^r+y^r},$$

die die drei klassischen Mittelwerte:

das arithmetische Mittel: $L_0(x,y)=\frac{x+y}{2}$,

das geometrische Mittel: $L_{-1/2}(x,y)=\sqrt{xy}$ und

das harmonische Mittel: $L_{-1}(x,y)=\frac{2xy}{x+y}$

enthält. Von H. W. Gould und M. E. Mays [4] ist für L_r die Bezeichnung Lehmer Mittel gewählt worden. Zahlreiche interessante Eigenschaften von L_r findet man in [1–4], [8]. Die einparametrige Funktionenschar $L_r(x,y)$ ist ein Spezialfall der im Jahre 1938 von C. Gini [3] für positive $x_1,\dots,x_n$ sowie für reelle Parameter r und s eingeführten Mittelwertfamilie

$$G(r,s;x_1,\dots,x_n)=\left[\sum_{i=1}^n x_i^r\Big/\sum_{i=1}^n x_i^s\right]^{1/(r-s)}\quad \text{für}\quad r\neq s,$$

$$G(r,r;x_1,\dots,x_n)=\exp\left[\sum_{i=1}^n x_i^r\log(x_i)\Big/\sum_{i=1}^n x_i^r\right].$$

Bemerkenswert ist eine vor kurzem von D. Farnsworth und R. Orr [2] veröffentlichte Note über Gini Mittel, in der unter anderem gezeigt wird, wie sich das Lehmer Mittel

$L_r(x, y) = G(r+1, r; x, y)$ für ganzzahlige Parameter r geometrisch interpretieren lässt.
Unser Ziel ist es, einige neue Ungleichungen für L_r zu beweisen. Wir beginnen mit dem Beweis zweier Hilfssätze. Zunächst zeigen wir, in welchen Intervallen die Funktionen $L_r(x, y)$ und $\log L_r(x, y)$ bezüglich r konvex bzw. konkav sind.

Lemma 1. Wenn x und y positive Zahlen sind mit $x \neq y$, dann ist die Funktion $L(r) = L_r(x, y)$ in $\mathbb{R}_0^-$ streng konvex und in $\mathbb{R}_0^+$ streng konkav sowie in $(-\infty, -1/2]$ logarithmisch streng konvex und in $[-1/2, \infty)$ logarithmisch streng konkav.

Beweis. 1. Zweimalige Differentiation von L ergibt:

$$L''(r) = \frac{(x\,y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^3} (y - x)(x^r - y^r).$$

Hieraus folgt:

$$L''(r) > 0 \quad \text{für} \quad r < 0 \qquad\qquad \text{und}$$

$$L''(r) < 0 \quad \text{für} \quad r > 0.$$

2. Wir bezeichnen mit f die Funktion

$$f(r) = \log L_r(x, y).$$

Dann folgt nach einigen einfachen Rechnungen:

$$f''(r) = \frac{(x\,y)^r (\log x/y)^2}{(x^r + y^r)^2 (x^{r+1} + y^{r+1})^2} (y - x)(x^{2r+1} - y^{2r+1});$$

somit erhalten wir:

$$f''(r) > 0 \quad \text{für} \quad r < -1/2$$

und

$$f''(r) < 0 \quad \text{für} \quad r > -1/2. \quad \square$$

Weiter benötigen wir folgenden (bekannten) Satz über konvexe Funktionen (vgl. [9, p. 16]):

Lemma 2. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine streng konvexe Funktion ist, dann gilt für alle $r, s, t \in I$ mit $r < s < t$:

$$(t - s) f(r) + (r - t) f(s) + (s - r) f(t) > 0. \tag{1}$$

Beweis. Da f in I streng konvex ist, gilt für alle reellen $a \in (0, 1)$:

$$f(ar + (1-a)\,t) < af(r) + (1-a)\,f(t). \tag{2}$$

Wenn wir in (2) $s = ar + (1-a)\,t$ einsetzen und anschliessend beide Seiten von (2) mit $t - r$ multiplizieren, dann folgt (1). □

Wir setzen nun $x \neq y$ voraus; nach Lemma 1 erfüllen die vier Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(r) &= L_r(x, y) && \text{in } \mathbb{R}_0^-, \\ f_2(r) &= -L_r(x, y) && \text{in } \mathbb{R}_0^+, \\ g_1(r) &= \log L_r(x, y) && \text{in } (-\infty, -1/2] \quad \text{und} \\ g_2(r) &= -\log L_r(x, y) && \text{in } [-1/2, \infty) \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Lemma 2. Somit gilt:

Satz 1. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive Zahlen. Wenn $r < s < t \leqq 0$, dann gilt:

$$(t-s)\,L_r(x, y) + (r-t)\,L_s(x, y) + (s-r)\,L_t(x, y) \geqq 0. \tag{3}$$

Falls $0 \leqq r < s < t$, dann muß in (3) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden.
Wenn $r < s < t \leqq -1/2$, dann gilt:

$$[L_r(x, y)]^{t-s}\,[L_s(x, y)]^{r-t}\,[L_t(x, y)]^{s-r} \geqq 1. \tag{4}$$

Falls $-1/2 \leqq r < s < t$, dann muß in (4) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden.
In allen Fällen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = y$.

Abschließend wollen wir ein Gegenstück zu Satz 1 beweisen. Hierzu benötigen wir eine Ungleichung, die von E. M. Wright [11] im Jahre 1956 veröffentlicht wurde:

Lemma 3. Wenn $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ eine monotone oder konvexe Funktion ist, dann gilt für alle Zahlen $r, s, t \in I$ die Ungleichung

$$(r-s)(r-t)\,f(r) + (s-r)(s-t)\,f(s) + (t-r)(t-s)\,f(t) \geqq 0. \tag{5}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (5) genau dann, wenn $r = s = t$.

Auf Grund von

$$\frac{d}{dr} L_r(x, y) = \frac{(x\,y)^r \log(x/y)\,(x-y)}{(x^r + y^r)^2} \geqq 0$$

ist $L_r(x, y)$ und folglich auch $\log L_r(x, y)$ bezüglich r in $\mathbb{R}$ monoton steigend. Vgl. [1].

Weiter gilt:
Wenn $x, y \geqq 1, x \neq y$ (bzw. $0 < x, y \leqq 1, x \neq y$), dann $L_r(x, y) > 1$ (bzw. $L_r(x, y) < 1$); wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann

$$L_r(x, y) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad r > \log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}.$$

Somit erfüllen die Funktionen

$$f(r) = L_r(x, y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, r) \quad (\text{mit } x, y \geqq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R},$$

$$g_1(r) = \log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < y < 1 < x \text{ oder } 0 < x < 1 < y)$$

$$\text{im Intervall} \left(\log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}, \infty\right)$$

und

$$g_2(r) = -\log L_r(x, y) \quad (\text{mit } 0 < x, y \leqq 1, x \neq y) \quad \text{in } \mathbb{R}$$

die Voraussetzungen von Lemma 3 und wir erhalten:

Satz 2. Es seien r, s und t reelle Zahlen sowie x und y positive reelle Zahlen. Dann gilt:

$$(r-s)(r-t) L_r(x, y) + (s-r)(s-t) L_s(x, y) + (t-r)(t-s) L_t(x, y) \geqq 0.$$

Wenn $x, y \geqq 1, x \neq y$, dann gilt:

$$[L_r(x, y)]^{(r-s)(r-t)} [L_s(x, y)]^{(s-r)(s-t)} [L_t(x, y)]^{(t-r)(t-s)} \geqq 1. \tag{6}$$

Wenn $0 < y < 1 < x$ oder $0 < x < 1 < y$, dann gilt (6), falls

$$\min(r, s, t) > \log \frac{1-y}{x-1} \Big/ \log \frac{x}{y}.$$

Wenn $0 < x, y \leqq 1, x \neq y$, dann muß in (6) das Zeichen „$\geqq$" durch „$\leqq$" ersetzt werden.

Das Gleichheitszeichen gilt in allen Fällen genau dann, wenn $r = s = t$.

Bemerkung. Die von K. B. Stolarsky [10] für positive x und y (mit $x \neq y$) und für reelle Parameter r und s (mit $r \neq s$, $rs \neq 0$) definierte Mittelwertfamilie

$$E(r, s; x, y) = \left[\frac{r}{s} \frac{x^s - y^s}{x^r - y^r}\right]^{1/(s-r)}$$

steht auf Grund von

$$G(r, s; x, y) = [E(2r, 2s; x, y)]^2 / E(r, s; x, y)$$

in Beziehung zu Ginis Mittelwertfamilie G.

Zahlreiche Eigenschaften von E findet man in [5–7], [10] und in der dort zitierten Literatur.
Gould und Mays [4] haben gezeigt, dass die einzigen Mittelwerte, die sowohl $E(r, s; x, y)$ als auch $L_r(x, y)$ angehören, das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel von x und y sind.

Der Redaktion möchte ich für Verbesserungsvorschläge herzlich danken.

Horst Alzer, Waldbröl

LITERATUR

1 E. F. Beckenbach: A class of mean value functions. Amer. Math. Monthly *57*, 1–6 (1950).
2 D. Farnsworth and R. Orr: Gini means. Amer. Math. Monthly *93*, 603–607 (1986).
3 C. Gini: Di una formula comprensiva delle medie. Metron *13*, 3–22 (1938).
4 H. W. Gould and M. E. Mays: Series expansions of means. J. Math. Anal. Appl. *101*, 611–621 (1984).
5 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values. Amer. Math. Monthly *85*, 84–90 (1978).
6 E. B. Leach and M. C. Sholander: Extended mean values II. J. Math. Anal. Appl. *92*, 207–223 (1983).
7 E. B. Leach and M. C. Sholander: Multi-variable extended mean values. J. Math. Anal. Appl. *104*, 390–407 (1984).
8 D. H. Lehmer: On the compounding of certain means. J. Math. Anal. Appl. *36*, 183–200 (1971).
9 D. S. Mitrinović: Analytic Inequalitites. Springer Verlag. Berlin 1970.
10 K. B. Stolarsky: Generalizations of the logarithmic mean. Math. Mag. *48*, 87–92 (1975).
11 E. M. Wright: A generalization of Schur's inequality. Math. Gaz. *40*, 217 (1956).

 0013-6018/88/020050-05 \$ 1.50+0.20/0

Kleine Mitteilung

Sums of a certain family of series

By identifying the sum

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{1}{2^k (n+k+1)} \quad (n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \tag{1}$$

with the integral

$$S_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} t^n \, dt, \tag{2}$$

and evaluating this Eulerian integral, M. Vowe and H.-J. Seiffert [3] have recently shown that

$$S_n = \frac{2^n (n-1)!\, n!}{(2n)!} - \frac{2^{-n}}{n} \quad (n \in \mathcal{N}). \tag{3}$$