Ein kleines Seitenstück zur Artinischen Vermutung

Autor(en): **Bergmann, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 5

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40038

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Vol. 42 Nr. 5 Seiten 115–146 Basel, September 1987

Ein kleines Seitenstück zur Artinschen Vermutung

1. Einleitung

Von E. Artin stammt die Vermutung, daß es zu jeder natürlichen Nichtquadratzahl a stets unendlich viele Primzahlen p von der Eigenschaft [1*]

$$\Omega^* (a \,(\mathrm{mod}\, p)) = 1$$

gibt, wobei mit $\Omega^* (a \,(\mathrm{mod}\, p)) := \Omega\, (a \,(\mathrm{mod}\, p))/(p-1)$ die relative Ordnung und mit $\Omega\, (a \,(\mathrm{mod}\, p))$ die Ordnung der primen Restklasse $a \,(\mathrm{mod}\, p)$ bezeichnet sei.
Es stellt sich dazu die Frage, ob die relative Ordnung [2*] $\Omega^* (a \,(\mathrm{mod}\, p))$ bei vorgegebener natürlicher Zahl a für geeignete Primzahlen p auch beliebig kleiner Werte fähig ist.
In der vorliegenden Note soll gezeigt werden:

Theorem. *Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl* $\varepsilon > 0$ *stets mindestens eine Primzahl p mit*

$$\Omega^* (a \,(\mathrm{mod}\, p)) < \varepsilon\,.$$

2. Ein Lemma

Der Beweis des Theorems stützt sich auf das nachfolgende Lemma. Zur geeigneten Formulierung desselben werden zunächst zwei zahlentheoretische Funktionen eingeführt.
Für ganze Zahlen $a \neq 0$ und nicht in a aufgehende Primzahlen p sei mit $\omega_a(p)$ die Ordnung $\Omega\,(a \,(\mathrm{mod}\, p))$ der primen Restklasse $a \,(\mathrm{mod}\, p)$ bei vorgegebenem a als Funktion von p bezeichnet. Weiter sei $\omega_a^*(p)$ die größte natürliche Zahl mit

$$p^{\omega_a^*(p)} \mid a^{\omega_a(p)} - 1\,.$$

Lemma. *Für natürliche Zahlen a, n > 1 gilt*

$$\prod_{i=1}^{n} (a^i - 1) = 2^{\delta} \prod_{\substack{p \nmid a \\ p > 2}} p^{\varepsilon_p} \tag{1}$$

mit [3*]

$$\varepsilon_p = \omega_a^*(p)\left[\frac{n}{\omega_a(p)}\right] + \sum_{i \geqq 1}\left[\frac{n}{p^i\,\omega_a(p)}\right] \tag{2}$$

und

$$\delta = 0\,(n\log n)\,. \tag{3}$$

Zum Beweis des Lemmas vergleiche man [1]. Dort findet man auch die genaue Bestimmung [4*] von δ, aus welcher man (3) gewinnt.

3. Ein Hilfssatz

Unter Heranziehung des Lemmas soll jetzt ein Hilfssatz hergeleitet werden, welcher zum Beweis des Theorems im nächsten Abschnitt benötigt wird.

Hilfssatz. *Für natürliche Zahlen* $a, n > 1$ *gilt*

$$\sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p)\left[\frac{n}{\omega_a(p)}\right]\log p = \tfrac{1}{2}n^2\log a + 0\,(n\log^2 n)\,.$$

Beweis. Durch Logarithmieren von (1) erhält man

$$A = \log\prod_{i=1}^{n}(a^i - 1) = \tfrac{1}{2}n^2\log a + 0\,(n) \tag{4}$$

mit

$$A = \sum_{p \nmid a}\varepsilon_p\log p + 0\,(n\log n)\,,$$

wenn man $\varepsilon_2 = 0\,(n\log n)$ und (3) beachtet. Ersetzt man ε_p in der letzteren Formel gemäß (2), so hat man

$$A = \sum_{p \nmid a}\omega_a^*(p)\left[\frac{n}{\omega_a(p)}\right]\log p + R + 0\,(n\log n) \tag{5}$$

mit

$$R = \sum_{p \nmid a}\sum_{i \geqq 1}\left[\frac{n}{p^i\,\omega_a(p)}\right]\log p\,.$$

Die Doppelsumme R soll jetzt nach oben abgeschätzt werden. Da die innere Summe von R für Primzahlen $p > n$ abbricht und $\omega_a(p) \geqq 1$ ist, folgt

$$R \leqq \sum_{p \leqq n}\log p\sum_{i \geqq 1}\left[\frac{n}{p^i}\right].$$

Wegen [5*]

$$\sum_{i \geqq 1} \left[\frac{n}{p^i}\right] \leqq \frac{\log n}{\log p} \cdot \frac{n}{p}$$

gilt

$$R \leqq n \log n \sum_{p \leqq n} \frac{1}{p}$$

und damit

$$R = 0\,(n \log^2 n)\,. \tag{6}$$

Aus (4), (5) und (6) folgt schließlich die Behauptung des Hilfssatzes.

4. Beweis des Theorems

Es sei $a > 1$ eine beliebige und n eine genügend große natürliche Zahl. Zum Beweis des Theorems betrachtet man die (im Hilfssatz abgeschätzte) Summe

$$S := \sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[\frac{n}{\omega_a(p)}\right] \log p\,.$$

Annahme: Es gibt zu a eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß für jede Primzahl $p \nmid a$ die Ungleichung $\omega_a(p) \geqq \varepsilon p$ besteht. Dann gilt für jede Primzahl $p \nmid a$ auch $[n/\omega_a(p)] \leqq [n/\varepsilon p]$, so daß

$$S \leqq \sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[\frac{n}{\varepsilon p}\right] \log p\,.$$

Aus der Definition von $\omega_a^*(p)$ folgt wegen $\omega_a(p) < p$ die Ungleichung

$$\omega_a^*(p) < \frac{p}{\log p} \log a\,.$$

Man hat somit

$$S \leqq \log a \sum_{p} \left[\frac{n}{\varepsilon p}\right] p\,. \tag{7}$$

Da die rechte Summe von (7) für Primzahlen p mit $\varepsilon p > n$ abbricht und $[x] \leqq x$ ist, gilt

$$S \leqq \frac{n}{\varepsilon} \log a \sum_{p \leqq n/\varepsilon} 1$$

und damit ([2], Seite 19, Satz 3.2)

$$S = 0\,(n^2/\log(n/\varepsilon)) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund des Hilfssatzes entspringt daraus aber der Widerspruch

$$n^2 = 0\,(n^2/\log(n/\varepsilon)) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aus der Widerlegung der obigen Annahme folgt die Behauptung des Theorems.

H. Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

1 H. Bergmann: Aufgabe 906. Lösung von P. Bundschuh. El. Math. *40*, 52–53 (1985).
2 K. Pracher: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

ANMERKUNGEN

[1*] Äquivalente Eigenschaft: «a ist Primitivwurzel mod p».
[2*] Es gilt stets: $0 < \Omega^*(a \pmod p)) \leqq 1$.
[3*] Für reelle Zahlen x sei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$.
[4*] Außer $\delta = 0$ für $a \equiv 0 \pmod 2$ gibt es zwei verschiedene Formeln für δ, je nachdem $a \equiv \pm 1 \pmod 4$.
[5*] Die Summe bricht ab, wenn $i > \log n/\log p$, und es ist $[n/p^i] \leqq n/p$.

 0013-6018/87/050115-00$1.50+0.20/0

Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper

Herrn Professor Dr. Jörg M. Wills zu seinem fünfzigsten Geburtstag

Die fünf platonischen Körper sind seit mehr als zweitausend Jahren bekannt. Trotzdem bleiben auch heute noch immer wieder interessante ihrer Eigenschaften zu untersuchen (siehe zum Beispiel [2], [3], [4] und für historische Anmerkungen [6]).
In dieser Note werden die Graphen der platonischen Körper diskutiert. Diese Graphen sind planar, das heisst, sie lassen sich in der Ebene ohne Überkreuzungen der Kanten zeichnen.
Es ist bekannt ([5]), dass sich alle planaren Graphen sogar derart in der Ebene zeichnen lassen, dass alle Kanten geradlinig sind. Darüber hinaus soll nun auch die weitergehende Frage gestellt werden:

Lässt sich jeder planare Graph in der Ebene so darstellen, dass alle Kanten geradlinig und von ganzzahliger Länge sind?