

# Ein kleines Seitenstück zur Artinischen Vermutung

Autor(en): **Bergmann, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 5

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40038>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Vol. 42

Nr. 5

Seiten 115–146

Basel, September 1987

## Ein kleines Seitenstück zur Artinschen Vermutung

### 1. Einleitung

Von E. Artin stammt die Vermutung, daß es zu jeder natürlichen Nichtquadratzahl  $a$  stets unendlich viele Primzahlen  $p$  von der Eigenschaft [1\*]

$$\Omega^*(a \pmod{p}) = 1$$

gibt, wobei mit  $\Omega^*(a \pmod{p}) := \Omega(a \pmod{p}) / (p-1)$  die relative Ordnung und mit  $\Omega(a \pmod{p})$  die Ordnung der primen Restklasse  $a \pmod{p}$  bezeichnet sei.

Es stellt sich dazu die Frage, ob die relative Ordnung [2\*]  $\Omega^*(a \pmod{p})$  bei vorgegebener natürlicher Zahl  $a$  für geeignete Primzahlen  $p$  auch beliebig kleiner Werte fähig ist.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden:

**Theorem.** *Es sei  $a$  eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl  $\varepsilon > 0$  stets mindestens eine Primzahl  $p$  mit*

$$\Omega^*(a \pmod{p}) < \varepsilon.$$

### 2. Ein Lemma

Der Beweis des Theorems stützt sich auf das nachfolgende Lemma. Zur geeigneten Formulierung desselben werden zunächst zwei zahlentheoretische Funktionen eingeführt.

Für ganze Zahlen  $a \neq 0$  und nicht in  $a$  aufgehende Primzahlen  $p$  sei mit  $\omega_a(p)$  die Ordnung  $\Omega(a \pmod{p})$  der primen Restklasse  $a \pmod{p}$  bei vorgegebenem  $a$  als Funktion von  $p$  bezeichnet. Weiter sei  $\omega_a^*(p)$  die größte natürliche Zahl mit

$$p^{\omega_a^*(p)} \mid a^{\omega_a(p)} - 1.$$

**Lemma.** *Für natürliche Zahlen  $a, n > 1$  gilt*

$$\prod_{i=1}^n (a^i - 1) = 2^\delta \prod_{\substack{p \nmid a \\ p > 2}} p^{\varepsilon_p} \tag{1}$$

mit [3\*]

$$\varepsilon_p = \omega_a^*(p) \left[ \frac{n}{\omega_a(p)} \right] + \sum_{i \geq 1} \left[ \frac{n}{p^i \omega_a(p)} \right] \quad (2)$$

und

$$\delta = 0 (n \log n) . \quad (3)$$

Zum Beweis des Lemmas vergleiche man [1]. Dort findet man auch die genaue Bestimmung [4\*] von  $\delta$ , aus welcher man (3) gewinnt.

### 3. Ein Hilfssatz

Unter Heranziehung des Lemmas soll jetzt ein Hilfssatz hergeleitet werden, welcher zum Beweis des Theorems im nächsten Abschnitt benötigt wird.

**Hilfssatz.** Für natürliche Zahlen  $a, n > 1$  gilt

$$\sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[ \frac{n}{\omega_a(p)} \right] \log p = \frac{1}{2} n^2 \log a + 0 (n \log^2 n) .$$

**Beweis.** Durch Logarithmieren von (1) erhält man

$$A = \log \prod_{i=1}^n (a^i - 1) = \frac{1}{2} n^2 \log a + 0 (n) \quad (4)$$

mit

$$A = \sum_{p \nmid a} \varepsilon_p \log p + 0 (n \log n) ,$$

wenn man  $\varepsilon_2 = 0 (n \log n)$  und (3) beachtet. Ersetzt man  $\varepsilon_p$  in der letzteren Formel gemäß (2), so hat man

$$A = \sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[ \frac{n}{\omega_a(p)} \right] \log p + R + 0 (n \log n) \quad (5)$$

mit

$$R = \sum_{p \nmid a} \sum_{i \geq 1} \left[ \frac{n}{p^i \omega_a(p)} \right] \log p .$$

Die Doppelsumme  $R$  soll jetzt nach oben abgeschätzt werden. Da die innere Summe von  $R$  für Primzahlen  $p > n$  abbricht und  $\omega_a(p) \geq 1$  ist, folgt

$$R \leq \sum_{p \leq n} \log p \sum_{i \geq 1} \left[ \frac{n}{p^i} \right] .$$

Wegen [5\*]

$$\sum_{i \geq 1} \left[ \frac{n}{p^i} \right] \leq \frac{\log n}{\log p} \cdot \frac{n}{p}$$

gilt

$$R \leq n \log n \sum_{p \leq n} \frac{1}{p}$$

und damit

$$R = O(n \log^2 n). \tag{6}$$

Aus (4), (5) und (6) folgt schließlich die Behauptung des Hilfssatzes.

#### 4. Beweis des Theorems

Es sei  $a > 1$  eine beliebige und  $n$  eine genügend große natürliche Zahl. Zum Beweis des Theorems betrachtet man die (im Hilfssatz abgeschätzte) Summe

$$S := \sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[ \frac{n}{\omega_a(p)} \right] \log p.$$

*Annahme:* Es gibt zu  $a$  eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  derart, daß für jede Primzahl  $p \nmid a$  die Ungleichung  $\omega_a(p) \geq \varepsilon p$  besteht. Dann gilt für jede Primzahl  $p \nmid a$  auch  $[n/\omega_a(p)] \leq [n/\varepsilon p]$ , so daß

$$S \leq \sum_{p \nmid a} \omega_a^*(p) \left[ \frac{n}{\varepsilon p} \right] \log p.$$

Aus der Definition von  $\omega_a^*(p)$  folgt wegen  $\omega_a(p) < p$  die Ungleichung

$$\omega_a^*(p) < \frac{p}{\log p} \log a.$$

Man hat somit

$$S \leq \log a \sum_p \left[ \frac{n}{\varepsilon p} \right] p. \tag{7}$$

Da die rechte Summe von (7) für Primzahlen  $p$  mit  $\varepsilon p > n$  abbricht und  $[x] \leq x$  ist, gilt

$$S \leq \frac{n}{\varepsilon} \log a \sum_{p \leq n/\varepsilon} 1$$

und damit ([2], Seite 19, Satz 3.2)

$$S = 0 \left( \frac{n^2}{\log(n/\varepsilon)} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgrund des Hilfssatzes entspringt daraus aber der Widerspruch

$$n^2 = 0 \left( \frac{n^2}{\log(n/\varepsilon)} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aus der Widerlegung der obigen Annahme folgt die Behauptung des Theorems.

H. Bergmann, Hamburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Bergmann: Aufgabe 906. Lösung von P. Bundschuh. El. Math. 40, 52–53 (1985).
- 2 K. Pracher: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

#### ANMERKUNGEN

[1\*] Äquivalente Eigenschaft: « $a$  ist Primitivwurzel mod  $p$ ».

[2\*] Es gilt stets:  $0 < \Omega^*(a \pmod{p}) \leq 1$ .

[3\*] Für reelle Zahlen  $x$  sei  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ .

[4\*] Außer  $\delta = 0$  für  $a \equiv 0 \pmod{2}$  gibt es zwei verschiedene Formeln für  $\delta$ , je nachdem  $a \equiv \pm 1 \pmod{4}$ .

[5\*] Die Summe bricht ab, wenn  $i > \log n / \log p$ , und es ist  $[n/p^i] \leq n/p$ .

© 1987 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/87/050115-00\$1.50+0.20/0

## Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper

*Herrn Professor Dr. Jörg M. Wills zu seinem fünfzigsten Geburtstag*

Die fünf platonischen Körper sind seit mehr als zweitausend Jahren bekannt. Trotzdem bleiben auch heute noch immer wieder interessante ihrer Eigenschaften zu untersuchen (siehe zum Beispiel [2], [3], [4] und für historische Anmerkungen [6]).

In dieser Note werden die Graphen der platonischen Körper diskutiert. Diese Graphen sind planar, das heisst, sie lassen sich in der Ebene ohne Überkreuzungen der Kanten zeichnen.

Es ist bekannt ([5]), dass sich alle planaren Graphen sogar derart in der Ebene zeichnen lassen, dass alle Kanten geradlinig sind. Darüber hinaus soll nun auch die weitergehende Frage gestellt werden:

*Lässt sich jeder planare Graph in der Ebene so darstellen, dass alle Kanten geradlinig und von ganzzahliger Länge sind?*