

Über geschlossene sphärische Kurven

Autor(en): **Pottmann, Helmut**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **42 (1987)**

Heft 3: **Archimedes was right. Part one**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40034>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über geschlossene sphärische Kurven

1. Auf der Einheitskugel Ω' ($\|x\| = 1$) des dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 sei eine C^2 -Kurve c_1 als Bild des Weges

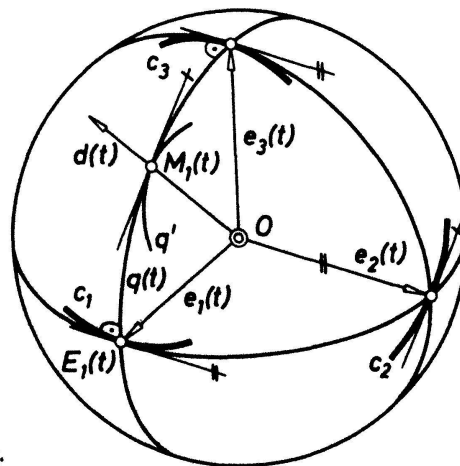
$$e_1: t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto e_1(t) \in \mathbb{R}^3, \quad \|e_1\| = 1, \quad e_1 \in C^2(I), \quad c_1 = e_1(I), \quad (1.1)$$

gegeben. Wir denken uns die Kugel $\Omega = \Omega'$ doppelt überdeckt und stellen uns hierbei Ω' fest und die Kugelschale Ω gegenüber Ω' beweglich vor. Dann definiert die Kurve c_1 eine *sphärische Begleitbewegung* $\mathcal{B}(c_1)$. Bei dieser durchläuft der Punkt $E_1 \in \Omega$, im ruhenden System beschrieben durch den Vektor $e_1(t)$, die Kurve c_1 so, dass sie stets von einem in Ω festen Großkreis in $E_1(t)$ berührt wird (Fig. 1). In einem regulären Ausgangspunkt $E_1(t_0)$ lässt sich also die Lage des Gangsystems durch das orthonormierte Dreibein $(O; e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0))$ mit

$$e_2(t_0) = \dot{e}_1(t_0) / \|\dot{e}_1(t_0)\|, \quad e_3(t_0) = e_1(t_0) \times e_2(t_0) \quad (1.2)$$

beschreiben. Hier stimmt e_2 mit dem normierten Tangentenvektor an die durch wachsende Parameter orientierte Kurve c_1 überein. Gelangt man jedoch im Verlauf von $\mathcal{B}(c_1)$ in eine Spitze $E_1(t_1)$ von c_1 , so lässt sich durch einen Grenzübergang $t \rightarrow t_1$ auch für $t = t_1$ eine Begleitbasis e_1, e_2, e_3 definieren, es ist aber zu beachten, dass nach dem Verlassen der Spitze der Vektor $e_2(t)$ aus Stetigkeitsgründen als $-\dot{e}_1 / \|\dot{e}_1\|$ zu erklären ist. Hieraus erkennen wir, dass die *Begleitbewegung* $\mathcal{B}(c_1)$ längs einer geschlossenen Kurve c_1 nur dann *geschlossen* ist, wenn c_1 genau $2n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Spitzen besitzt. Ist dies nicht der Fall, so schliesst sich $\mathcal{B}(c_1)$ erst nach zweimaliger Durchlaufung von c_1 . Für die Begleitbasis besteht ein schiefes System von Ableitungsgleichungen, das mit (1.2) die Form

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \lambda e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\lambda e_1 + \mu e_3, \\ \dot{e}_3 &= -\mu e_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$



Figur 1. Sphärische Begleitbewegung.

haben muss. Man kann (1.3) unter Benützung des Darboux'schen Drehvektors $d = \mu e_1 + \lambda e_3$ einfach als

$$\dot{e}_i = d \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

schreiben. Der Vektor d legt bei $d \neq 0$ mittels $p_i(t) = \pm d / \|d\|$ ($i = 1, 2$) die beiden bezüglich O symmetrischen, im Augenblick t ruhenden Momentanpole $M_i(t)$ von \mathcal{B} fest. Die Pole M_i liegen im Gangsystem auf dem Grosskreis q in der Ebene $e_1 e_3$. Bei $d = 0$ haben wir einen augenblicklichen Stillstand. Im Laufe von $\mathcal{B}(c_1)$ rollt bekanntlich q auf der sphärischen Evolute q' von c_1 gleitfrei ab. Gelegentlich wollen wir die Bewegung nicht nur auf Ω beschränken und betrachten dann die durch \mathcal{B} definierte, O festhaltende Bewegung des Gangraumes Σ gegenüber dem Rastraum Σ' .

Die sphärischen Begleitbewegungen hängen eng mit der *Kurventheorie* des \mathbb{R}^3 zusammen, da man hier für die Begleitbasis einer Kurve k Ableitungsgleichungen der Form (1.3) hat. Die Vektoren e_1, e_2, e_3 beschreiben der Reihe nach das sphärische Tangentenbild c_1 , das Hauptnormalenbild c_2 und das Binormalenbild c_3 von k . Entsprechendes gilt für die *Theorie der Regelflächen* im \mathbb{R}^3 , wo e_1, e_2, e_3 das Erzeugendenbild, das Zentralnormalenbild und das Zentraltangentenbild erzeugen (vgl. [4], S. 275 ff.).

In der vorliegenden Note wollen wir die orientierten Flächeninhalte der Parallelrisse der Bahnkurven geschlossener sphärischer Begleitbewegungen studieren.

2. Einer geschlossenen orientierten C^1 -Kurve $k \subset \mathbb{R}^3$, die durch den periodischen Weg

$$x: t \in I = [0, L) \subset \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3, \quad x \in C^1(\mathbb{R}), \quad x(t+L) = x(t), \quad k = x(I),$$

beschrieben ist, wird durch

$$f(k) := \int_0^L x(t) \times \dot{x}(t) dt \tag{2.1}$$

der sogenannte *Flächenvektor* $f(k)$ zugewiesen. Die Bedeutung von $f(k)$ liegt darin, dass der (mit der Durchlaufzahl multiplizierte [1*]) orientierte Inhalt $F(k^n)$ des Normalrisses k^n von k bei Projektion in der Richtung n ($\|n\| = 1$) über das Skalarprodukt

$$n \cdot f(k) = 2 F(k^n) \tag{2.2}$$

berechnet werden kann. Hierbei ist die Bildebene durch den Normalvektor n zu orientieren (vgl. [6], S. 52).

Nach diesen Vorbereitungen berechnen wir den Flächenvektor $f(c(X))$ der Bahn $c(X)$ des Punktes $X \in \Sigma$ beim Zwangslauf $\mathcal{B}(c_1)$ längs einer geschlossenen sphärischen Kurve c_1 . Hierbei sei $I = [0, L)$ Periodenintervall des geschlossenen Zwangslaufs $\mathcal{B}(c_1)$, d.h. c_1 werde bei ungerader Spitzenzahl von c_1 zweifach durchlaufen. Mittels (2.1) finden wir für die durch $x(t) = x_1 e_1(t) + x_2 e_2(t) + x_3 e_3(t)$ erfasste Bahn $c(X)$:

$$f(c(X)) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 f(c_i) + 2 \sum_{\substack{i,k=1 \\ i < k}}^3 x_i x_k f(c_i, c_k) \tag{2.3}$$

$$\text{bei } f(c_i) = \int_0^L e_i \times \dot{e}_i dt, \quad f(c_i, c_k) = \frac{1}{2} \int_0^L (e_i \times \dot{e}_k + e_k \times \dot{e}_i) dt.$$

Unter Benützung der Ableitungsgleichungen (1.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(c_1) &= \int_0^L \lambda e_3 dt, & f(c_3) &= \int_0^L \mu e_1 dt, & f(c_2) &= f(c_1) + f(c_3), \\ f(c_1, c_2) &= - \int_0^L \dot{e}_1 \times e_2 dt = 0, & f(c_2, c_3) &= \int_0^L e_2 \times \dot{e}_3 dt = 0, \\ f(c_1, c_3) &= - \int_0^L \mu e_3 dt = - \int_0^L \lambda e_1 dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Damit besteht für $f(c(X))$ die Formel

$$f(c(X)) = 2x_1 x_3 f(c_1, c_3) + (x_1^2 + x_2^2) f(c_1) + (x_2^2 + x_3^2) f(c_3). \quad (2.5)$$

Hierin ist $f(c_1, c_3)$ als «gemischter Flächenvektor» der Ausgangskurve c_1 und ihrer sphärischen Parallelkurve $c_3 := c(E_3)$ (mit $E_3 = (0, 0, 1)$) im sphärischen Abstand $\pi/2$ zu bezeichnen, da

$$F(c_1^n, c_3^n) = n \cdot f(c_1, c_3)/2 \quad (2.6)$$

der *gemischte Flächeninhalt* der Normalrisse dieser durch $\mathcal{B}(c_1)$ punktweise aufeinander bezogenen Kurven im Sinne vom H. R. Müller [7] ist. Eine Deutung des gemischten Flächeninhalts findet man in [8]. Gehen wir bei fester Projektionsrichtung von einem Normalriss zu einem Parallelriss über, so werden hierbei die Flächeninhalte durch den Cosinus des Winkels der beiden Bildebenen dividiert. Somit gilt im Hinblick auf (2.2), (2.5) und (2.6):

Satz 1. *Es seien die geschlossene Begleitbewegung $\mathcal{B}(c_1) = \Sigma/\Sigma'$ längs einer C^2 -Kurve c_1 auf der Einheitskugel $\Omega' \subset \Sigma'$ sowie eine feste Parallelprojektion auf eine Ebene gegeben. Dann berechnet sich der orientierte Inhalt $F(c(X)^p)$ des Parallelrisses der Bahn des Punktes $X \in \Sigma$ mit den im Begleitsystem Σ festen Koordinaten x_1, x_2, x_3 aus den orientierten Inhalten $F(c_1^p)$ und $F(c_3^p)$ der Risse von c_1 bzw. der sphärischen $\pi/2$ -Parallelkurve c_3 von c_1 und aus dem gemischten Flächeninhalt $F(c_1^p, c_3^p)$ der Risse von c_1 und c_3 zu:*

$$F(c(X)^p) = 2x_1 x_3 F(c_1^p, c_3^p) + (x_1^2 + x_2^2) F(c_1^p) + (x_2^2 + x_3^2) F(c_3^p). \quad (2.7)$$

3. Der Satz 1 gestattet verschiedene Anwendungen. Er enthält etwa mit $X = E_1^\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ den

Satz 2. *Bildet man eine geschlossene C^2 -Kurve c_1 auf der Einheitskugel Ω' , deren sphärische $\pi/2$ -Parallelkurve c_3 sowie die geschlossene sphärische Äquitangentialkurve c_1^α von c_1 im sphärischen Abstand α vermöge einer Parallelprojektion in eine Ebene ab, so besteht*

zwischen den orientierten Inhalten der Risse dieser drei Kurven die Gleichung:

$$F(c_1^{\alpha p}) = F(c_1^p) + F(c_3^p) \sin^2 \alpha . \tag{3.1}$$

Für $\alpha = \pi/2$ haben wir diesen Zusammenhang im wesentlichen bereits in (2.4) angeführt. Er erlaubt nach den Bemerkungen im ersten Abschnitt folgende, bislang vielleicht noch nicht vermerkte Anwendung in der globalen Kurventheorie:

Korollar 1. *Unterwirft man die drei sphärischen Bilder einer geschlossenen regulären C^3 -Kurve $k \subset \mathbb{R}^3$ mit genau $2n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) Wendepunkten einer Parallelprojektion, dann ist der orientierte Inhalt des Risses des Hauptnormalenbildes gleich der Summe der orientierten Inhalte der Risse des Tangentenbildes und des Binormalenbildes.*

Analoges gilt für Regelflächen. In beiden Fällen ist nicht die Geschlossenheit der Kurve bzw. der Regelfläche, sondern bloss die Geschlossenheit der sphärischen Bilder wesentlich. Es ist zu beachten, dass zu einem Wendepunkt von k (Punkt mit der Krümmung $\kappa = 0$) eine Spitze des Tangentenbildes c_1 gehört ($\lambda = 0$), bei deren Durchlauf die Stetigkeit von c_2 und c_3 vermöge der Bemerkung in Abschnitt 1 zu wahren ist. Dies stimmt nicht mit den üblichen Vorzeichenfestsetzungen der lokalen Kurventheorie überein, wo man stets $\kappa \geq 0$ hat. Auf die Zulassung von $\kappa < 0$ in der globalen Kurventheorie hat bereits W. Fenchel [5] hingewiesen. Für eine geschlossene Kurve k mit einer ungeraden Anzahl von Wendepunkten sind c_2 und c_3 erst nach zweimaliger Durchlaufung von k und c_1 geschlossen.

Der Projektionsflächeninhalt $F(c_2^p)$ des Hauptnormalenbildes c_2 einer geschlossenen Raumkurve k gestattet folgende Deutung: Wegen (2.4) ist bei Parametrisierung von k nach deren Bogenlänge s mit κ und τ als Krümmung und Torsion von k im Sinne von W. Fenchel:

$$f(c_2) = \int_0^L (\tau e_1 + \kappa e_3) ds = \int_0^L d ds .$$

Die von den Darboux-Vektoren d beschriebene Kurve c_d , welche nach 1 dem Rastpolkegel von $\mathcal{B}(c_1)$ angehört, nennen wir *Darboux-Kurve* von k . Der Schwerpunkt S_d der mit den Massenelementen ds belegten Kurve c_d wird durch den Vektor $s_d = \overrightarrow{OS_d}$ erfasst:

$$s_d = \left(\int_0^L d ds \right) / \int_0^L ds = f(c_2) / L .$$

Somit ist die Fläche $F(c_2^p)$ über (2.2) aus dem Abstand $a_d = \overline{OS_d}$, dem Winkel β zwischen Bildebene und Projektionsrichtung n , dem Winkel $\sigma = \sphericalangle n s_d$ und der Kurvenlänge L berechenbar:

$$F(c_2^p) = L a_d \cos \sigma / 2 \sin \beta . \tag{3.2}$$

Als Folge von (2.2) liegt der Betrag $|F(k^n)|$ des Flächeninhalts eines Normalrisses von k zwischen den Grenzen 0 und $F_M(k) := \|f(k)\|/2$. Mit dem *maximalen Projektionsflächeninhalt* $F_M(k)$ haben wir nun eine einfache globale Kurveninvariante, für die wegen (2.5) und (3.1) folgende Aussage gilt:

Satz 3. Für eine geschlossene sphärische C^2 -Kurve c_1 , deren geschlossene sphärische α -Äquitangentialkurve c_1^α sowie deren sphärische $\pi/2$ -Parallelkurve c_3 ist die aus den maximalen Projektionsflächeninhalten gebildete Grösse

$$[F_M(c_1^\alpha)^2 - F_M(c_1)^2 - F_M(c_3)^2 \sin^4 \alpha] / \sin^2 \alpha, \quad \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi} \quad (3.3)$$

unabhängig von der Auswahl von α .

Bei $\mathcal{B}(c_1)$ beschreibt der Punkt ${}_\alpha E_1 = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ die sphärische α -Parallelkurve ${}_\alpha c_1 := c({}_\alpha E_1)$ von c_1 . Für ${}_\alpha c_1$ können wir vermöge (2.7) ein sphärisches Gegenstück zur bekannten Formel von J. Steiner über die Flächeninhalte der Parallelkurven einer Eilinie (vgl. etwa [3], S. 91) angeben:

$$F({}_\alpha c_1^p) = F(c_1^p, c_3^p) \sin 2\alpha + F(c_1^p) \cos^2 \alpha + F(c_3^p) \sin^2 \alpha. \quad (3.4)$$

Eine reguläre sphärische Kurve c_1 , die mit ihrer β -Parallelkurve ${}_\beta c_1$ zusammenfällt, besitzt ∞^1 sphärische Doppelnormalen der sphärischen Länge β und ist daher eine *Kurve der konstanten sphärischen Breite* β [1]. Ihre sämtlichen sphärischen Parallelkurven besitzen – abgesehen von der nicht notwendigen Regularität – ebenfalls konstante sphärische Breite. Unter ihnen befindet sich eine Kurve mit der konstanten Breite π , also eine bezüglich O zentrisch symmetrische Kurve \bar{c}_1 . Mithin sind die sphärischen Kurven konstanter Breite als Parallelkurven der bezüglich O zentrisch symmetrischen Kurven leicht erzeugbar. Da die Begleitbewegung einer Kurve c_1 mit der Begleitbewegung längs jeder ihrer Parallelkurven übereinstimmt, kann man sich auf die Begleitbewegungen längs der Kurven \bar{c}_1 beschränken. Für eine Kurve \bar{c}_1 stimmt die Parallelkurve im Abstand α mit der Parallelkurve im Abstand $\pi - \alpha$ überein, woraus mit (3.4) $F(\bar{c}_1^p, \bar{c}_3^p) = 0$ resultiert. Somit vereinfacht sich (2.7) zu

$$F(c(X)^p) = (x_1^2 + x_2^2) F(\bar{c}_1^p) + (x_2^2 + x_3^2) F(\bar{c}_3^p). \quad (3.5)$$

Ebenso könnten wir unsere Betrachtungen auf *Kurven der konstanten sphärischen Breite* $\pi/2$ einschränken, wo man $c_1 = c_3$, also $f(c_1) = f(c_3)$ hat. Bei Parametrisierung nach der Bogenlänge s der als regulär vorausgesetzten Kurve c_1 ist $\lambda \equiv 1$:

$$f(c_1, c_3) = - \int_0^L e_1 ds.$$

Für den Schwerpunktvektor s_c der homogen mit Masse belegten Kurve c_1 gilt:

$$s_c = \left(\int_0^L e_1 ds \right) / \int_0^L ds = - f(c_1, c_3) / L.$$

Also haben wir den

Satz 4. Bei der Begleitbewegung $\mathcal{B}(c_1)$ längs einer geschlossenen sphärischen C^2 -Kurve $c_1 \subset \Omega'$ mit der konstanten sphärischen Breite $\pi/2$ und der Länge L erzeugt ein Punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ des Gangsystems eine Bahnkurve $c(X)$, deren Flächenvektor $f(c(X))$ aus dem Flächenvektor $f(c_1)$ und dem Schwerpunktvektor s_c von c_1 über

$$f(c(X)) = -2L x_1 x_3 s_c + (x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2) f(c_1) \tag{3.6}$$

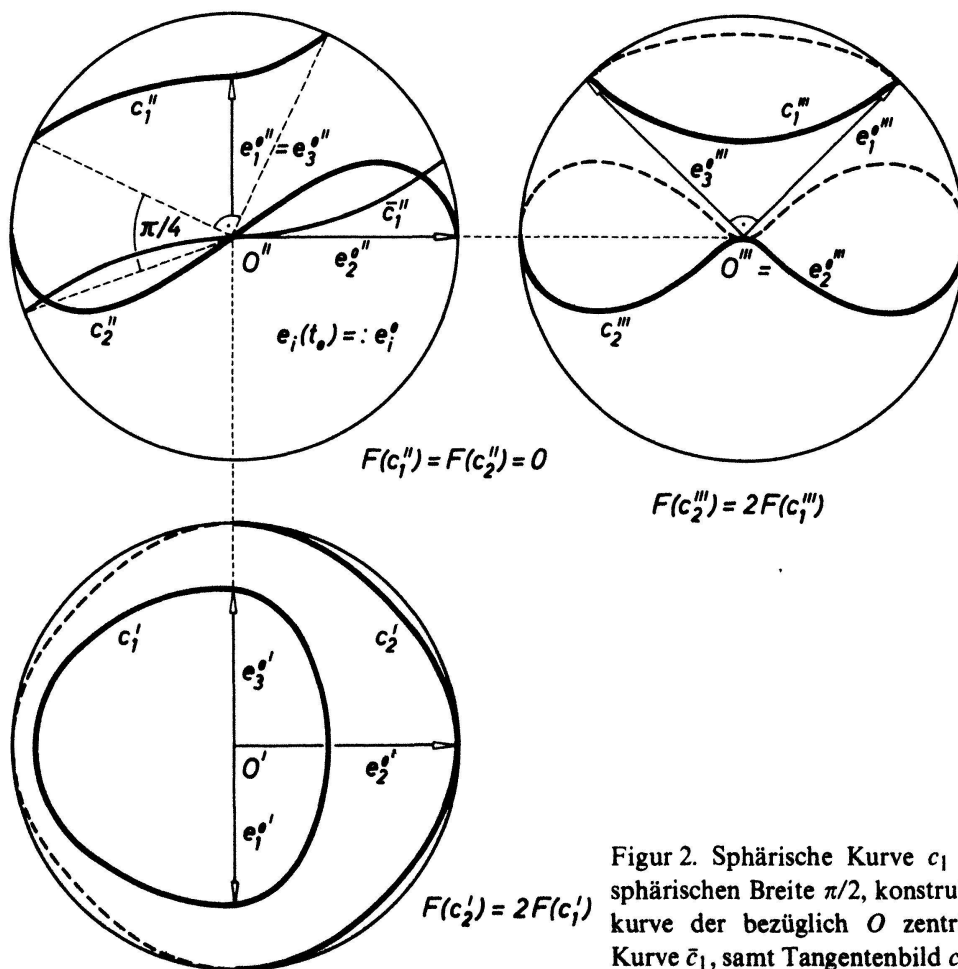
ermittelt werden kann.

Die Gleichung (3.1) lautet nun

$$F(c_1^{\alpha p}) = (1 + \sin^2 \alpha) F(c_1^p). \tag{3.7}$$

Der Fall $\alpha = \pi/2$ kann auch so ausgedrückt werden (Figur 2):

Korollar 2. Für jede Parallelprojektion ist der orientierte Inhalt des Risses einer auf der Einheitskugel liegenden C^2 -Kurve c_1 mit der konstanten sphärischen Breite $\pi/2$ halb so gross wie der orientierte Inhalt des Risses des sphärischen Tangentenbildes von c_1 .



Figur 2. Sphärische Kurve c_1 mit der konstanten sphärischen Breite $\pi/2$, konstruiert als $\pi/4$ -Parallelkurve der bezüglich O zentrisch symmetrischen Kurve \bar{c}_1 , samt Tangentenbild c_2 .

4. Die Flächenvektoren $f(c(X))$ induzieren eine «Flächenvektorabbildung»

$$\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma', \quad X \in \Sigma \mapsto X\varphi = f(c(X)) \in \Sigma'. \quad (4.1)$$

Als erster dürfte sich W. Blaschke [2] mit dieser Abbildung beschäftigt haben. Er bemerkte, dass das φ -Bild der Gangkugel Ω bei einem beliebigen geschlossenen sphärischen Zwangslauf Ω/Ω' eine Steinersche Römerfläche (bzw. ein Ausartungsfall derselben) ist (vgl. auch [6], S. 52 ff.). Das Studium der Abbildung φ für geschlossene räumliche Affinzwangläufe, insbesondere äquiforme und euklidische Zwangläufe, soll einer eigenen Arbeit [9] vorbehalten bleiben.

5. Von den möglichen Erweiterungen auf euklidische Räume beliebiger Dimension n sei hier bloss eine Verallgemeinerung des Korollars 1 angeführt. Zu einer Haupttypkurve $k \subset \mathbb{R}^n$ (vgl. [4], S. 91) lassen sich durch die Vektoren e_1, \dots, e_n der Frenet-Basis n sphärische Bilder c_1, \dots, c_n definieren. Unter Benützung der Ableitungsgleichungen der Kurventheorie ([4], S. 93) zeigt man dann den

Satz 5. *Bildet man die n sphärischen Bilder c_1, \dots, c_n einer geschlossenen Haupttypkurve $k \subset \mathbb{R}^n$ vermöge einer Parallelprojektion in eine Ebene ab, so besitzen die orientierten Inhalte der Risse dieser n Kurven verschwindende alternierende Summe:*

$$F(c_1^p) - F(c_2^p) + F(c_3^p) - + \dots + (-1)^{n-1} F(c_n^p) = 0. \quad (5.1)$$

Dieser Satz gilt übrigens auch für *nichtgeschlossene* Kurven k . Man hat nur $F(c_i^p)$ als orientierten Inhalt jener *Sektorfläche* $S(c_i^p)$ aufzufassen, welche – durch den Riss O^p der Einheitssphärenmitte O und den Riss $c_i^p = \{E_i^p(t) \mid t \in I\}$ der Kurve c_i bestimmt – von den Strecken $O^p E_i^p(t)$ überstrichen wird.

Helmut Pottmann, TU Wien

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Blaschke: Einige Bemerkungen über Kurven und Flächen von konstanter Breite. Ber. Sächs. Akad. Leipzig 67, 290–297 (1915).
- 2 W. Blaschke: Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel. Comm. Math. Helvet. 17, 80–82 (1944).
- 3 W. Blaschke: Kreis und Kugel. Walter de Gruyter, Berlin 1956.
- 4 H. Brauner: Differentialgeometrie. Vieweg, Wiesbaden 1981.
- 5 W. Fenchel: On the differential geometry of closed space curves. Bull. Amer. Math. Soc. 57, 44–54 (1951).
- 6 H. R. Müller: Sphärische Kinematik. VEB D. Vlg. d. Wiss., Berlin 1962.
- 7 H. R. Müller: Verallgemeinerung einer Formel von Steiner. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 29, 107–113 (1978).
- 8 H. Pottmann: Ebene äquiforme Zwangläufe im Grossen I. Resultate d. Math. 9, 131–159 (1986).
- 9 H. Pottmann: Die Flächenvektoren der Bahnkurven geschlossener räumlicher Zwangläufe. In Vorbereitung.

ANMERKUNGEN

[1*] Unter dem orientierten Inhalt einer ebenen Kurve verstehen wir hier stets den mit der Durchlaufzahl der Kurve multiplizierten orientierten Flächeninhalt.