

# Das Kaprekar-Problem in der Sicht der Computer-Mathematik

Autor(en): **Jeger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38838>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 40

Nr. 6

Seiten 129–160

Basel, 10. November 1985

## Das Kaprekar-Problem in der Sicht der Computer-Mathematik

### 1. Das Kaprekar-Problem

Im Jahre 1949 hat der indische Mathematiker D. R. Kaprekar anhand von Beispielen eine interessante zahlentheoretische Entdeckung gemacht. Er betrachtete 4stellige Zahlen, die nicht aus lauter gleichen Ziffern bestanden, und bildete mit einer solchen Zahl  $n_0$  durch Umstellen der Ziffern zwei neue Zahlen, nämlich die grösstmögliche Zahl  $g_0$  und die kleinstmögliche Zahl  $k_0$ . Hernach bildete er die Differenz

$$n_1 = g_0 - k_0.$$

Das Ergebnis unterwarf er wiederum derselben Konstruktion. Es fiel ihm dabei auf, dass bei mehrfacher Iteration die jeweilige Anschlussfolge zu  $n_0$  spätestens nach dem 7. Glied in die Zahl 6174 einmündet und dann stabil bleibt [3]. Die beiden Beispiele in der Figur 1 illustrieren diesen Sachverhalt.

$n_0 = 2749$	$n_0 = 0180$
$g_0 = 9742$	$g_0 = 8100$
$k_0 = 2479$	$k_0 = 0018$
$n_1 = 7263$	$n_1 = 8019$
$g_1 = 7632$	$g_1 = 9810$
$k_1 = 2367$	$k_1 = 0189$
$n_2 = 5265$	$n_2 = 9621$
$g_2 = 6552$	$g_2 = 9621$
$k_2 = 2556$	$k_2 = 1269$
$n_3 = 3996$	$n_3 = 8352$
$g_3 = 9963$	$g_3 = 8532$
$k_3 = 3699$	$k_3 = 2358$
$n_4 = 6264$	$n_4 = 6174$
$g_4 = 6642$	
$k_4 = 2466$	
$n_5 = 4176$	
$g_5 = 7641$	
$k_5 = 1467$	
$n_6 = 6174$	
$g_6 = 7641$	
$k_6 = 1467$	
$n_7 = 6174$	

Figur 1

Es sind offenbar auch 4stellige Zahlen zugelassen, die mit Null beginnen.

Seit dem Erscheinen der Mitteilung von Kaprekar wird 6174 die *Kaprekar-Zahl zu den 4stelligen Zahlen im Positionssystem mit der Basis 10* genannt.

In der Zwischenzeit haben sich Zahlentheoretiker eingehend mit dem Kaprekar-Problem befasst und dieses auch in einen grösseren Rahmen gestellt. Zunächst wurden die Positionssysteme bestimmt, für welche die Kaprekar-Konstruktion bei 4stelligen Zahlen auf Folgen mit derselben Stabilitätseigenschaft führt. Es hat sich gezeigt, dass dies genau für eine Basis von der Form

$$b = 2^k 5, \quad k = 0 \text{ oder ungerade} \quad (1,1)$$

zutrifft [1]. Später sind bei beliebiger Basis  $b \geq 2$  auch noch andere Stellenzahlen  $s$  in die Untersuchungen einbezogen worden [4].

Es gibt total  $10^4 - 10 = 9990$  4stellige oder pseudo-4stellige Dezimalzahlen, die nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen, und jede derartige Zahl ist als Anfangsglied einer Kaprekar-Folge zugelassen. Bei endlich vielen Möglichkeiten sind zur Verifikation der Stabilitätseigenschaft keine aufwendigen zahlentheoretischen Analysen erforderlich; man kann sich – wie Kaprekar dies seinerzeit getan hat – auf eine Durchmusterung aller in Frage kommenden Folgen beschränken. Mit einer Klärung auf dieser Ebene bleiben natürlich die tiefer liegenden zahlentheoretischen Zusammenhänge verborgen. Die Durchmusterung lässt sich aber durchaus so auslegen, dass dabei auch einige Querverbindungen zwischen verschiedenen Klassen von Kaprekar-Folgen in bezug auf die Parameter  $b$  und  $s$  sichtbar werden. Der folgende Computer-Approach zum Kaprekar-Problem bewegt sich auf dieser Ebene. Er lässt zudem noch eine bemerkenswerte algebraische Hintergrundstruktur hervortreten.

## 2. 4stellige Dezimalzahlen

Zum Austesten der möglichen Kaprekar-Folgen würde an sich ein Algorithmus genügen, der für eine zulässige 4stellige Zahl  $n_0$  die Anschlussfolge

$$n_1, n_2, \dots$$

liefert. Es lohnt sich jedoch, vorerst einige theoretische Überlegungen anzustellen. Wie sich gleich zeigen wird, lässt sich nämlich die Testmenge stark reduzieren.

Bei einer 4stelligen Dezimalzahl  $n$  mit den Ziffern  $z_1, z_2, z_3, z_4$  kann die Indizierung stets so gewählt werden, dass

$$0 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4 \leq 9 \quad (2,1)$$

ist. Die grösste und die kleinste Zahl, die aus diesen Ziffern gebildet werden können, sind

$$g = (z_4 z_3 z_2 z_1)_{10} \quad \text{und} \quad k = (z_1 z_2 z_3 z_4)_{10}. \quad (2,2)$$

Der Nachfolger von  $n$  in einer Kaprekar-Folge lautet daher

$$\begin{aligned} \bar{n} = v(n) &= g - k \\ &= (10^3 z_4 + 10^2 z_3 + 10^1 z_2 + 10^0 z_1) - (10^3 z_1 + 10^2 z_2 + 10^1 z_3 + 10^0 z_4) \quad (2,3) \\ &= (10^3 - 10^0)(z_4 - z_1) + (10^2 - 10^1)(z_3 - z_2). \end{aligned}$$

Mit

$$d_1 := z_4 - z_1; \quad d_2 := z_3 - z_2$$

erhält man insbesondere

$$\bar{n} = 999 d_1 + 90 d_2. \quad (2,4)$$

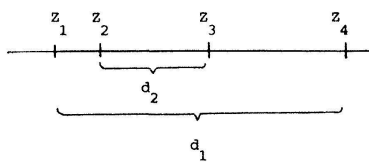
Aus (2,1) folgt, dass

$$0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 9. \quad (2,5)$$

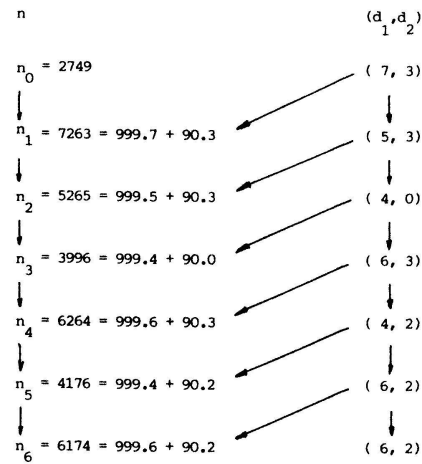
Ist  $n$  eine 4stellige Zahl mit nicht lauter gleichen Ziffern, dann gilt zusätzlich

$$d_1 > 0. \quad (2,6)$$

Die bisherigen Feststellungen lassen darauf schliessen, dass die Anschlussfolge zu einer Zahl  $n_0$  nur von dem zu  $n_0$  gehörenden Differenzenpaar  $(d_1, d_2)$  abhängt. Zudem bewegen sich die möglichen Anschlussfolgen ganz auf der Zahlenmenge, die durch (2,4) und (2,5) gekennzeichnet ist. Dies sei anschliessend noch an unserem früheren Beispiel illustriert.



Figur 2



Figur 3

Zum Differenzenpaar  $(7,3)$  gehören sämtliche Zahlen  $n_0$  in der folgenden Zusammenstellung

9962	8851	7740
9852	8741	7630
9742	8631	7520
9632	8521	7410
9522	8411	7300



und alle weiteren 4stelligen Zahlen, die durch Umstellen der Ziffern daraus hervorgehen. Es liegt nun nahe, bei der Untersuchung von Kaprekar-Folgen die entsprechenden  $(d_1, d_2)$ -Folgen heranzuziehen. Diese Verkürzung trifft offenbar den Kern des vorliegenden mathematischen Problems. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das entscheidende Differenzenpaar (6,2) schon in jenem Glied einer Kaprekar-Folge erscheint, das der charakteristischen Zahl 6174 unmittelbar vorangeht.

Zur Gewinnung der *Nachfolger-Konstruktion auf der Menge der  $(d_1, d_2)$ -Paare* führen wir jetzt noch die Dezimalschreibweise der Zahl  $\bar{n} = v(n)$  ein:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= 999d_1 + 90d_2 \\ &= \begin{cases} 10^3d_1 + 10^2(d_2 - 1) + 10^1(10 - d_2 - 1) + 10^0(10 - d_1), \\ \text{falls } d_2 - 1 \geq 0 \\ 10^3(d_1 - 1) + 10^2(10 + d_2 - 1) + 10^1(10 - d_2 - 1) + 10^0(10 - d_1), \\ \text{falls } d_2 - 1 < 0 \end{cases} \quad (2,7) \\ &= (\bar{z}'_4\bar{z}'_3\bar{z}'_2\bar{z}'_1)_{10}. \end{aligned}$$

$(d_1, d_2)$  ist das Differenzenpaar, das zur Zahl  $n$  gehört.

Sortiert man die anfallenden Ziffern  $\bar{z}'_1, \bar{z}'_2, \bar{z}'_3, \bar{z}'_4$  in aufsteigender Folge, dann gilt nach entsprechender Umbezeichnung

$$0 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{z}_3 \leq \bar{z}_4 \leq 9.$$

Für das Differenzenpaar  $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$  zur Zahl  $\bar{n}$  folgt daraus

$$\bar{d}_1 = \bar{z}_4 - \bar{z}_1; \quad \bar{d}_2 = \bar{z}_3 - \bar{z}_2 \quad (2,8)$$

Es lässt sich jetzt zeigen, dass im Nachfolgerpaar  $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$  zu  $(d_1, d_2)$  stets  $\bar{d}_1 > 0$  ist. Zunächst entnimmt man aus (2.7), dass  $\bar{n}$ , als 4stellige Zahl aufgefasst, niemals aus 4 gleichen Ziffern bestehen kann. Zifferngleichheit impliziert nämlich im ersten Falle  $(d_2 - 1 \geq 0)$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = d_2 - 1 \\ 10 - d_2 - 1 = 10 - d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 - d_2 + 1 = 0 \\ d_1 - d_2 - 1 = 0 \end{array}$$

und im zweiten Falle  $(d_2 - 1 < 0)$

$$\left. \begin{array}{l} d_1 - 1 = 10 + d_2 - 1 \\ 10 - d_2 - 1 = 10 - d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 - d_2 - 10 = 0 \\ d_1 - d_2 - 1 = 0, \end{array}$$

d. h. man kann in beiden Fällen zwei unverträgliche Aussagen folgern. Wenn aber  $\bar{n}$  nicht 4 gleiche Ziffern aufweist, dann ist aufgrund einer früheren Bemerkung  $\bar{d}_1 > 0$ .

Zum Anfangsglied  $n$  einer Kaprekar-Folge gehört stets ein Differenzenpaar  $(d_1, d_2)$  mit  $d_1 > 0$ . Dieselbe Eigenschaft besitzen jetzt offenbar auch alle Bildpaare der Anschlussfolge zu  $n_0$ , d. h. die Sequenz der Differenzenpaare  $(d_1, d_2)$  bewegt sich ganz auf der Menge

$$K_4^{10} = \{(d_1, d_2) / 0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 9, d_1 > 0\}. \quad (2,9)$$

Ihre Mächtigkeit ist

$$|K_4^{10}| = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54,$$

denn mit einem bestimmten zulässigen Wert von  $d_1$  kann  $d_2$  jeweils die Werte

$$d_1, d_1 - 1, d_1 - 2, \dots, 1, 0$$

annehmen.

Die Kaprekar-Konstruktion impliziert auch auf der Menge  $K_4^{10}$  eine 1stellige Verknüpfung, bei der  $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$  der Nachfolger von  $(d_1, d_2)$  ist. Wir wollen dies fortan mit der Schreibweise

$$(\bar{d}_1, \bar{d}_2) = \kappa((d_1, d_2))$$

zum Ausdruck bringen. Bezeichnet  $f$  die Abbildung, die der Zahl  $n$  das Paar  $(d_1, d_2)$  zuordnet, dann gilt offenbar

$$\kappa f(n) = f(v(n)), \tag{2,10}$$

d. h. die Abbildung  $f$  ist ein Homomorphismus.

Man kann sich nun eine vollständige Übersicht über alle möglichen Kaprekar-Folgen verschaffen, indem man das Verknüpfungsgebilde  $[K_4^{10}; \kappa]$  an einem Di-Graphen veranschaulicht. Dazu ist jedem Paar  $(d_1, d_2) \in K_4^{10}$  ein Knoten (Punkt) in der Zeichenebene zuzuordnen, und zwei Knoten sind genau dann mit einer gerichteten Kante zu verbinden, wenn die entsprechenden Paare in der Nachfolgerrelation stehen. Bevor wir die Gewinnung dieses Di-Graphen mit einem Rechner angehen, wollen wir noch eine Verallgemeinerung vornehmen.

### 3. 4stellige Zahlen im Positionssystem mit der Basis $b \geq 2$

Bei einer Basis  $b \geq 2$  sind die Differenzenpaare  $(d_1, d_2)$  mit

$$0 \leq d_2 \leq d_1 \leq b - 1$$

möglich. Für die Klasse der 4stelligen Zahlen zum Differenzenpaar  $(d_1, d_2)$  ist die Zahl

$$n = b^3 d_1 + b^2 d_2 = (d_1 d_2 00)_b$$

der einfachste Repräsentant. Man erhält damit

$$g = (d_1 d_2 00)_b; \quad k = (00 d_1 d_2)_b.$$

Daraus ergibt sich in Verallgemeinerung von (2,7)

$$\begin{aligned} \bar{n} = v(n) &= g - k = b^3 d_1 + b^2 d_2 - b^1 d_2 - b^0 d_1 \\ &= \begin{cases} b^3 d_1 + b^2(d_2 - 1) + b^1(b - d_2 - 1) + b^0(b - d_1), & \text{falls } d_2 - 1 \geq 0 \\ b^3(d_1 - 1) + b^2(b - d_2 - 1) + b^1(b - d_2 - 1) + b^0(b - d_1), & \text{falls } d_2 - 1 < 0 \end{cases} \tag{3,1} \\ &= (\bar{z}'_4 \bar{z}'_3 \bar{z}'_2 \bar{z}'_1)_b, \end{aligned}$$

wobei  $\bar{z}'_i \leq b - 1$  ist.

Nach dem Sortieren der Zahlen  $\bar{z}'_1, \bar{z}'_2, \bar{z}'_3, \bar{z}'_4$  zu einer aufsteigenden Folge und entsprechender Umbezeichnung ist

$$0 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{z}_3 \leq \bar{z}_4 \leq b - 1.$$

Die neuen Differenzen lauten jetzt

$$\bar{d}_1 = \bar{z}_4 - \bar{z}_1; \quad \bar{d}_2 = \bar{z}_3 - \bar{z}_2. \quad (3,2)$$

Die weiteren Überlegungen im Abschnitt 2 können vollständig übernommen werden. Sie führen zum folgenden Ergebnis.

**Satz 1.** *Startet man die Kaprekar-Konstruktion im Positionssystem zur Basis  $b \geq 2$  mit einer Zahl  $n$ , die nicht aus 4 gleichen Ziffern besteht, dann erhält man eine Folge von Differenzenpaaren, die ganz in der Menge*

$$\mathbf{K}_4^b = \{(d_1, d_2) / 0 \leq d_2 \leq d_1 \leq b - 1, d_1 > 0\} \quad (3,3)$$

enthalten ist.

Die Mächtigkeit von  $\mathbf{K}_4^b$  lässt sich leicht bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass die Figuren  $d_1 d_2$  isotone Wörter (Kombinationen mit Wiederholungen) der Länge 2 über dem Alphabet  $0, 1, \dots, b - 1$  darstellen. Wegen  $d_1 > 0$  ist

$$|\mathbf{K}_4^b| = \binom{b + 2 - 1}{2} - 1 = \binom{b + 1}{2} - 1. \quad (3,4)$$

An dieser Stelle wollen wir nun einen Abstecher in die Computer-Mathematik machen. Es soll anschliessend ein *Algorithmus* aufgestellt werden, *der den Di-Graphen zum Verknüpfungsgebilde  $[\mathbf{K}_4^b; \kappa]$  liefert.* Einem Algorithmus mit dieser Zielsetzung lässt sich etwa das folgende Konzept zugrunde legen.

Es werden nacheinander Ketten von Paaren  $(d_1, d_2) \in \mathbf{K}_4^b$  konstruiert, bei denen aufeinanderfolgende Glieder in der vorliegenden Nachfolgerrelation stehen. Paare, die im Verlaufe des Konstruktionsprozesses angetroffen werden, sind zu markieren. Dies macht es möglich, die Kettenkonstruktion jeweils abzubrechen, sobald man auf ein Paar stösst, das zuvor schon einmal aufgetreten ist. Als erstes Glied einer neuen Kette ist immer jenes Paar  $(d_1, d_2)$  in der Restmenge der noch nicht in der Auflistung vorkommenden Elemente von  $\mathbf{K}_4^b$  zu nehmen, für das die Zahl  $b d_1 + d_2$  den grösstmöglichen Wert hat. Um den geometrischen Zusammenhang des Di-Graphen aus dem Rechner-Output ablesen zu können, ist mit jeder aufgefundenen Kette auch noch das (bereits früher schon begegnete) *Anschlussglied* auszudrucken.

Die Markierung der im Verlaufe des Prozesses anfallenden Paare  $(d_1, d_2) \in \mathbf{K}_4^b$  kann über ein Parameterfeld

$$c(1,0), \quad c(1,1), \quad c(2,0), \quad c(2,1), \quad c(2,2), \quad \dots, \quad c(b-1, b-1)$$

vorgenommen werden, das zuvor bereitzustellen ist. Bei Prozessbeginn ist etwa

$$c(d_1, d_2) := 0 \quad \text{für alle } (d_1, d_2) \in K_4^{10}$$

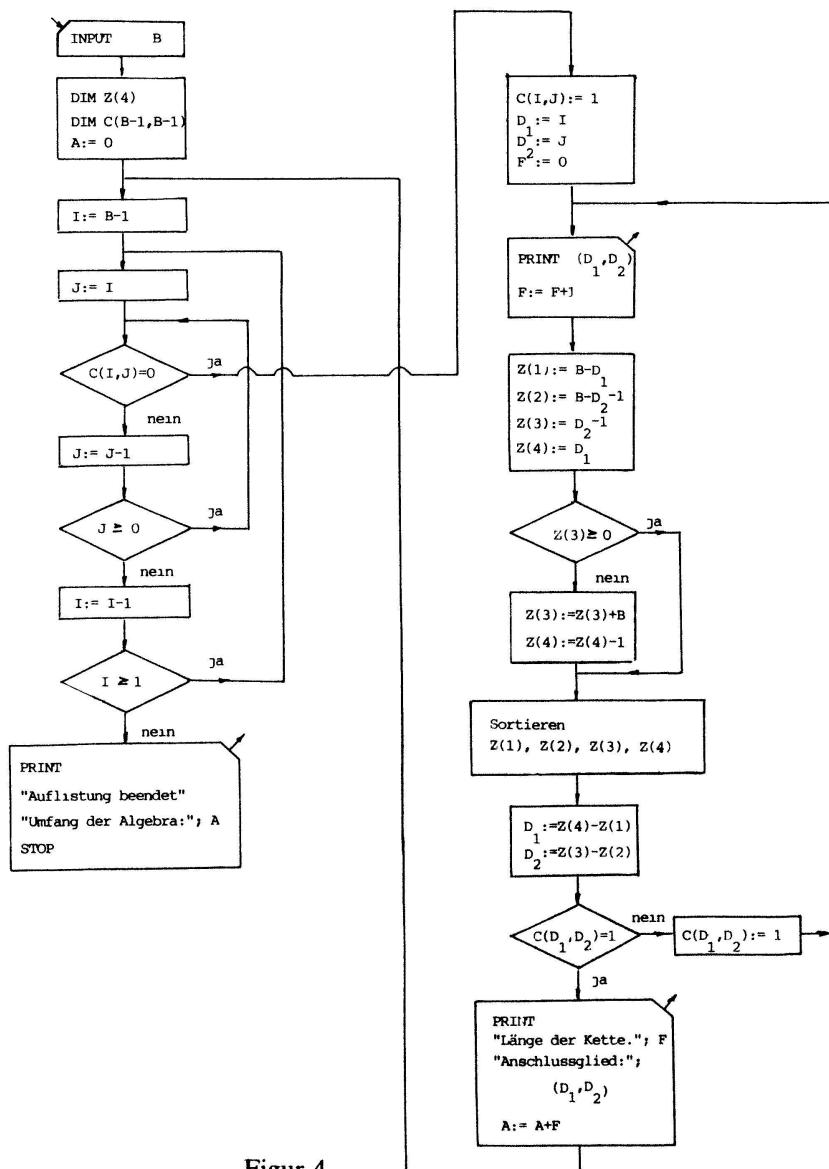
zu setzen. Wenn nun im Verlaufe der Kettenkonstruktion das Paar  $(d'_1, d'_2)$  angetroffen wird, lässt sich dieses mit der Anweisung

$$c(d'_1, d'_2) := 1$$

markieren.

Der Start der Durchmusterung von  $K_4^b$  erfolgt mit der Kette, an deren Anfang das Paar  $(b - 1, b - 1)$  steht. Der Konstruktionsprozess ist abgeschlossen, sobald die Menge  $K_4^b$  vollständig in Ketten aufgeteilt vorliegt.

Der zunächst verbal umschriebene Algorithmus lässt sich nun sofort in das Flussdiagramm in der Figur 4 übertragen. Darin sind zusätzlich noch die beiden Parameter  $f$  und



Figur 4

$a$  eingeführt;  $f$  dient zur Bestimmung der Kettenlängen,  $a$  zur Gewinnung der Mächtigkeit von  $K_4^b$ . Die Dimensionierungsanweisungen im zweiten Kästchen zielen auf eine Umsetzung in die Programmiersprache BASIC ab.

Anschliessend ist das entsprechende Rechnerprogramm für den Rechner Commodore C-64 und den zugehörigen Drucker VC-1520 aufgeführt.

```

100 OPEN1,6
110 PRINT#1, KAPREKAR-PROBLEM
120 INPUT 'B EINGEBEN :B
130 PRINT#1, 4-STELLIGE ZAHLEN; BASIS :B
   ' PRINT#1
140 DIM Z(4); DIM C(B-1,B-1); A=0
150 REM ABFRAGE DER C-REGISTER
160 FOR I=B-1 TO 1 STEP -1
170 : FOR J=I TO 0 STEP -1
180 : IF C(I,J)=0 THEN C(I,J)=1:
      GOTO 250
190 : NEXT J
200 NEXT I
210 PRINT#1
220 PRINT#1, AUFLISTUNG BEENDET'
230 PRINT#1, MAECHTIGKEIT DER ALGEBRA: :
   A
240 STOP
250 F=0
260 REM KONSTRUKTION DER ANSCHLUSSFOLGE
270 D1=I: D2=J
280 PRINT#1,SPC(6) ( :D1; , :D2; )
290 F=F+1
300 Z(1)=B-D1: Z(2)=B-D2-1
310 Z(3)=D2-1: Z(4)=D1
320 IF Z(3)>=0 THEN 340
330 Z(3)=Z(3)+B: Z(4)=Z(4)-1
340 FOR I= 1 TO 3
350 : FOR J=I+1 TO 4
360 : IF Z(I)<Z(J) THEN 380
370 : Z=Z(I): Z(I)=Z(J): Z(J)=Z
380 : NEXT J
390 NEXT I
400 D1=Z(4)-Z(1): D2=Z(3)-Z(2)
410 IF C(D1,D2)=1 THEN 430
420 C(D1,D2)=1: GOTO 280
430 A=A+F
440 PRINT#1, LAENGE DER KETTE: ;F
450 PRINT#1, ANSCHLUSSGLIED: ;
460 PRINT#1,SPC(3) ( :D1; , :D2; )
470 PRINT#1
480 GOTO 160
    
```

Figur 5 zeigt den Anfang des Drucker-Outputs für  $b = 10$  und den daraus hervorgehenden Teil des Di-Graphen zum Verknüpfungsgebilde  $[K_4^{10}; \kappa]$ .

```

KAPREKAR-PROBLEM
4-STELLIGE ZAHLEN; BASIS 10

( 9 , 9 )
( 9 , 7 )
( 8 , 4 )
( 6 , 2 )
LAENGE DER KETTE: 4
ANSCHLUSSGLIED: ( 6 , 2 )

( 9 , 8 )
( 8 , 6 )
LAENGE DER KETTE: 2
ANSCHLUSSGLIED: ( 6 , 2 )

( 9 , 6 )
( 8 , 2 )
( 7 , 5 )
( 4 , 0 )
( 6 , 3 )
( 4 , 2 )
LAENGE DER KETTE: 6
ANSCHLUSSGLIED: ( 6 , 2 )

( 9 , 5 )
( 8 , 0 )
( 7 , 2 )
( 6 , 4 )
( 3 , 1 )
LAENGE DER KETTE: 5
ANSCHLUSSGLIED: ( 8 , 4 )

( 9 , 4 )
LAENGE DER KETTE: 1
ANSCHLUSSGLIED: ( 8 , 2 )

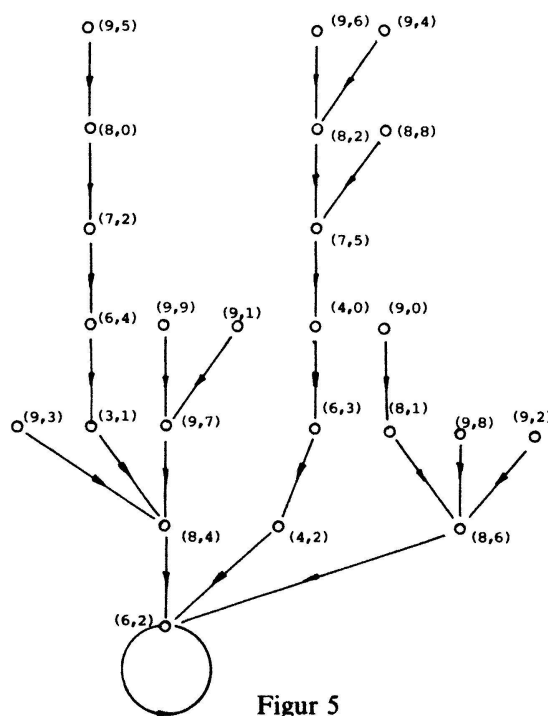
( 9 , 3 )
LAENGE DER KETTE: 1
ANSCHLUSSGLIED: ( 8 , 4 )

( 9 , 2 )
LAENGE DER KETTE: 1
ANSCHLUSSGLIED: ( 8 , 6 )

( 9 , 1 )
LAENGE DER KETTE: 1
ANSCHLUSSGLIED: ( 9 , 7 )

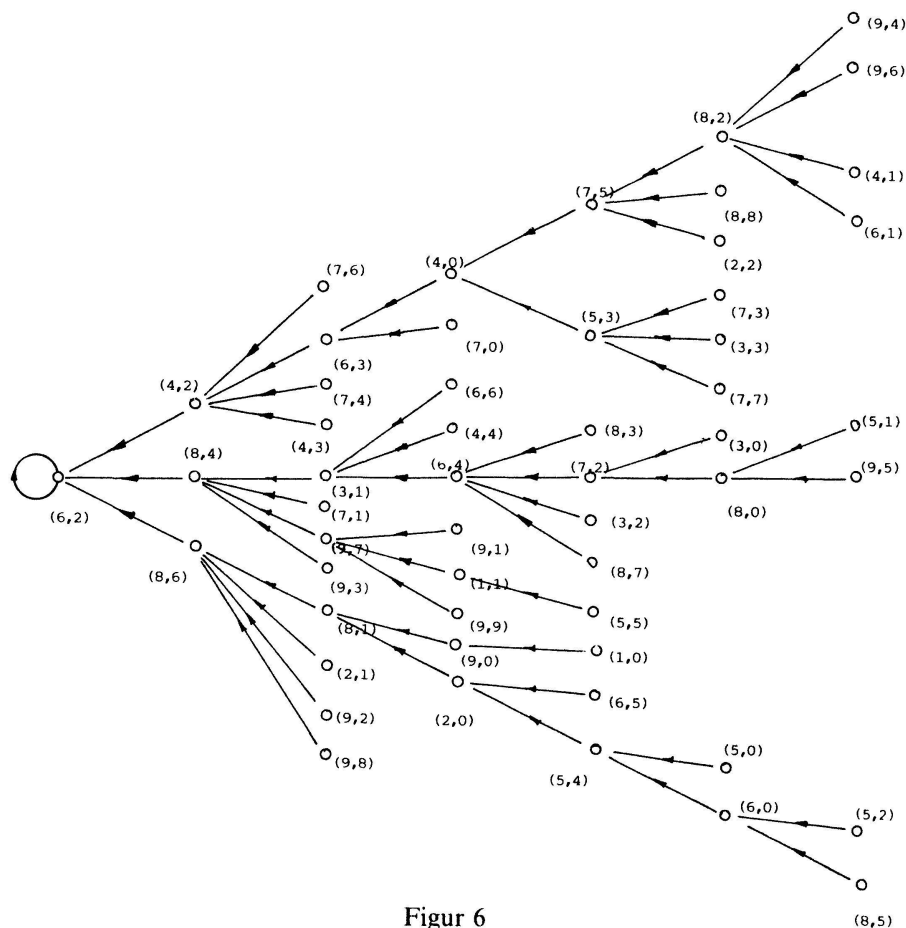
( 9 , 0 )
( 8 , 1 )
LAENGE DER KETTE: 2
ANSCHLUSSGLIED: ( 8 , 6 )

( 8 , 8 )
LAENGE DER KETTE: 1
ANSCHLUSSGLIED: ( 7 , 5 )
    
```



Figur 5

Der vollständige Di-Graph zu  $[K_4^{10}; \kappa]$  ist in Figur 6 aufgezeichnet. Man kann daraus entnehmen, dass Kaprekar-Folgen bei 4stelligen Dezimalzahlen tatsächlich nach höchstens 7 Anschlussgliedern in die Zahl 6174 einmünden. Damit ist zunächst einmal ein Computer-Approach zum klassischen Kaprekar-Problem freigelegt. Der vorliegende Algorithmus kann aber generell zur Erschliessung der Verknüpfungsgebilde  $[K_4^b; \kappa]$  herangezogen werden. Bevor wir weitere Beispiele analysieren, wollen wir wiederum einige theoretische Überlegungen einfügen.



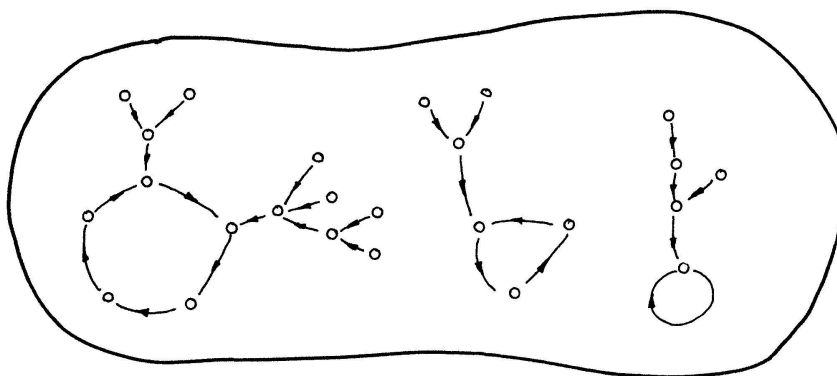
Figur 6

#### 4. Unäre Algebren

Das Kaprekar-Problem zeichnet sich ab in algebraischen Strukturen vom Typus  $[K; \kappa]$ , wobei  $\kappa$  eine auf der Objektmenge  $K$  erklärte 1stellige Verknüpfung ist. Man spricht in einem solchen Falle von einer *unären Algebra*<sup>1)</sup>.

Wenn  $K$  eine endliche Menge ist, dann stösst man bei jeder Konstruktion einer Nachfolgerkette nach endlich vielen Schritten auf ein Element von  $K$ , das in der betreffenden Kette schon an früherer Stelle aufgetreten ist. Sämtliche Ketten in  $[K; \kappa]$  müssen daher notwendigerweise in einen Zyklus einmünden. Der Di-Graph zu einer endlichen unären Algebra zeigt also stets dasselbe Grundmuster: Er ist aufgebaut aus endlich vielen Zyklen, an denen auf die Zyklen zu gerichtete Di-Bäume angehängt sind.

1) Vgl. etwa [2], S. 80ff.



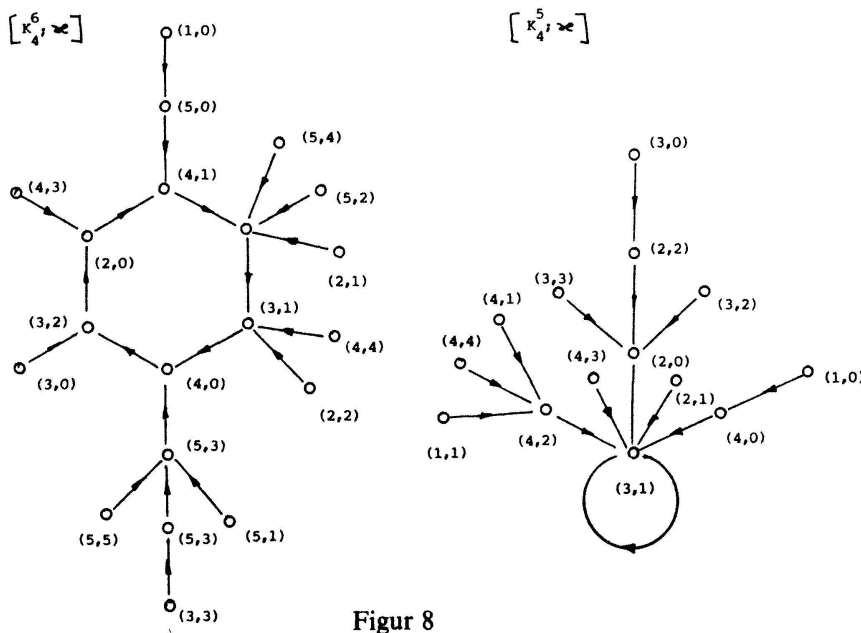
Figur 7

Di-Graph einer unären Algebra, deren Kern aus 3 Zyklen besteht

Die Elemente von  $K$ , die in einem Zyklus enthalten sind, bilden zusammen den *Kern der unären Algebra*  $[K; \kappa]$ .

Die Stabilität der Kaprekar-Folgen bei 4stelligen Dezimalzahlen kommt nun darin zum Ausdruck, dass der Kern der unären Algebra  $[K_4^{10}; \kappa]$  nur aus einem einzigen Element besteht. Man spricht in diesem Falle von einer *baumartigen unären Algebra*. Insbesondere ist  $[K_4^{10}; \kappa]$  eine *baumartige unäre Algebra von der Höhe 6* (Fig. 6).

Figur 8 zeigt noch die Digraphen zu den beiden unären Kaprekar-Algebren  $[K_4^6; \kappa]$  und  $[K_4^5; \kappa]$ . Sie wurden ebenfalls mit unserem generellen Algorithmus für die Kettenzerlegung von  $[K_4^b; \kappa]$  erhalten. Für  $[K_4^5; \kappa]$  ist der vollständige Drucker-Output anschliessend wiedergegeben.



Figur 8

KAPREKAR-PROBLEM  
4-STELLIGE ZAHLEN; BASIS 5

( 4 , 4 )  
( 4 , 2 )  
( 3 , 1 )

LAENGE DER KETTE: 3  
ANSCHLUSSGLIED: ( 3 , 1 )

( 4 , 3 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 3 , 1 )

( 4 , 1 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 4 , 2 )

( 4 , 0 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 3 , 1 )

( 3 , 3 )  
( 2 , 0 )  
LAENGE DER KETTE: 2  
ANSCHLUSSGLIED: ( 3 , 1 )

( 3 , 2 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 2 , 0 )

( 3 , 0 )  
( 2 , 2 )  
LAENGE DER KETTE: 2  
ANSCHLUSSGLIED: ( 2 , 0 )

( 2 , 1 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 3 , 1 )

( 1 , 1 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 4 , 2 )

( 1 , 0 )  
LAENGE DER KETTE: 1  
ANSCHLUSSGLIED: ( 4 , 0 )

AUFLISTUNG BEENDET  
MAECHTIGKEIT DER ALGEBRA: 14

Bei  $[K_4^6; \kappa]$  ist ein Kern mit einem einzigen Zyklus vorhanden.  $[K_4^5; \kappa]$  hingegen ist wiederum eine baumartige unäre Algebra, d. h. bei 4stelligen Zahlen im Positionssystem mit der Basis  $b = 5$  weisen Kaprekar-Folgen dieselbe Stabilitätseigenschaft auf wie im Dezimalsystem. Diese Feststellung steht im Einklang mit dem zitierten Ergebnis (1,1). Die zugehörige Kaprekar-Zahl ist

$$(3100)_5 - (0013)_5 = (3032)_5.$$

**5. s-stellige Zahlen im Positionssystem mit der Basis  $b \geq 2$**

Wir betrachten zunächst 5stellige Zahlen im Positionssystem mit der Basis  $b$ . Gehen aus einer solchen Zahl  $n$  die beiden Extremalzahlen

$$\begin{aligned} g &= (z_5 z_4 z_3 z_2 z_1)_b \\ k &= (z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)_b \end{aligned} \quad \text{mit} \quad 0 \leq z_1 \leq z_2 \leq z_3 \leq z_4 \leq z_5 \leq b - 1$$

hervor, dann schliesst man für den Nachfolger

$$\begin{aligned} \bar{n} &= v(n) = g - k \\ &= (b^4 z_5 + b^3 z_4 + b^2 z_3 + b^1 z_2 + b^0 z_1) - (b^4 z_1 + b^3 z_2 + b^2 z_3 + b^1 z_4 + b^0 z_5) \\ &= (b^4 - b^0) \underbrace{(z_5 - z_1)}_{d_1} + (b^3 - b^1) \underbrace{(z_4 - z_2)}_{d_2}, \end{aligned} \tag{5,1}$$

d. h. es treten wie im Falle  $s = 4$  zwei charakteristische Differenzen  $d_1$  und  $d_2$  auf. In Analogie zu (3,1) erhält man bei der Notation von  $n$  im System mit der Basis  $b$

$$\begin{aligned} \bar{n} &= (d_1 d_2 000)_b - (000 d_2 d_1)_b \\ &= \begin{aligned} &b^4 d_1 + b^3 (d_2 - 1) + b^2 (b - 1) + b^1 (b - d_2 - 1) + b^0 (b - d_1), \\ &\text{falls } d_2 - 1 \geq 0 \\ &b^4 (d_1 - 1) + b^3 (b + d_2 - 1) + b^2 (b - 1) + b^1 (b - d_2 - 1) + b^0 (b - d_1), \\ &\text{falls } d_2 - 1 < 0 \end{aligned} \\ &= (\bar{z}_5 \bar{z}_4 \bar{z}_3 \bar{z}_2 \bar{z}_1)_b \quad \text{mit} \quad 0 \leq \bar{z}_i \leq b - 1. \end{aligned} \tag{5,2}$$

Nach dem Sortieren der Zahlen  $\bar{z}'_1, \bar{z}'_2, \bar{z}'_3, \bar{z}'_4, \bar{z}'_5$  und entsprechender Umbezeichnung ist

$$0 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{z}_3 \leq \bar{z}_4 \leq \bar{z}_5 \leq b - 1.$$

Das Nachfolgerpaar zu  $(d_1, d_2)$  lautet dann

$$\bar{d}_1 = \bar{z}_5 - \bar{z}_1; \quad \bar{d}_2 = \bar{z}_4 - \bar{z}_2. \tag{5,3}$$

Mit den früheren Überlegungen lässt sich auch hier zeigen, dass stets  $\bar{d}_1 > 0$  ist, d. h.

$$K_5^b = \{(d_1, d_2) / 0 \leq d_2 \leq d_1 \leq b - 1, d_1 > 0\}.$$



Der im Abschnitt 3 aufgestellte Algorithmus lässt sich problemlos auf die Kaprekar-Algebren  $[K_s^b; \kappa]$  übertragen.

In Anlehnung an die Fälle  $s = 4$  und  $s = 5$  kann jetzt die *Kaprekar-Konstruktion auf beliebige höhere Stellenzahlen verallgemeinert* werden<sup>2)</sup>. Bei  $s$ -stelligen Zahlen beträgt die Anzahl der charakteristischen Differenzen

$$m = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil^3, \tag{5,4}$$

wobei für diese Differenzen

$$0 \leq d_m \leq d_{m-1} \leq \dots \leq d_2 \leq d_1 \leq b - 1, \quad d_1 > 0 \tag{5,5}$$

gilt.

Anstelle von Satz 1 tritt für  $s \geq 3$  der

**Satz 2.** *Zur Charakterisierung der Kaprekar-Konstruktion bei  $s$ -stelligen Zahlen im Positionssystem mit der Basis  $b$  sind  $m = \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$  Differenzen erforderlich.*

*Beginnt man die Konstruktion mit einer  $s$ -stelligen Zahl  $n$ , die nicht aus lauter gleichen Ziffern besteht, dann bewegt sich die Folge der Differenzen- $m$ -Tupel ganz auf der Menge*

$$K_s^b = \{(d_1, d_2, \dots, d_m) / 0 \leq d_m \leq d_{m-1} \leq \dots \leq d_1 \leq b - 1, d_1 > 0\}. \tag{5,6}$$

Da die Figuren  $d_1 d_2 \dots d_m$  isotone Wörter der Länge  $m$  über dem Alphabet  $0, 1, \dots, b - 1$  darstellen und  $d_1 > 0$  ist, hat die zugehörige Kaprekar-Algebra  $[K_s^b; \kappa]$  den Umfang

$$|K_s^b| = \binom{b + m - 1}{m} - 1. \tag{5,7}$$

Der früher aufgestellte Algorithmus für die Kettenzerlegung der Algebra  $[K_4^b; \kappa]$  lässt sich ohne weiteres auf beliebige Stellenzahlen  $s$  übertragen. So hat man etwa für  $s = 7$  von

$$n = (d_1 d_2 d_3 0000)_b$$

und

$$\begin{aligned} \bar{n} &= b^6 d_1 + b^5 d_2 + b^4 d_3 - b^2 d_3 - b^1 d_2 - b^0 d_1 \\ &= \begin{cases} b^6 d_1 + b^5 d_2 + b^4(d_3 - 1) + b^3(b - 1) + b^2(b - d_3 - 1) \\ \quad + b^1(b - d_2 - 1) + b^0(b - d_1), & \text{falls } d_3 - 1 \geq 0 \\ b^6 d_1 + b^5(d_2 - 1) + b^4(b + d_3 - 1) + b^3(b - 1) + b^2(b - d_3 - 1) \\ \quad + b^1(b - d_2 - 1) + b^0(b - d_1), & \text{falls } d_3 - 1 < 0 \text{ und } d_2 - 1 \geq 0, \\ b^6(d_1 - 1) + b^5(b + d_2 - 1) + b^4(b + d_3 - 1) + b^3(b - 1) + b^2(b - d_3 - 1) \\ \quad + b^1(b - d_2 - 1) + b^0(b - d_1), & \text{falls } d_3 - 1 < 0 \text{ und } d_2 - 1 < 0 \end{cases} \\ &= (\bar{z}_7 \bar{z}_6 \bar{z}_5 \bar{z}_4 \bar{z}_3 \bar{z}_2 \bar{z}_1)_b \end{aligned}$$

auszugehen.

2) Für  $s = 2$  können bei bestimmten Werten von  $b$  Nachfolger  $\bar{n}$  auftreten, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen.

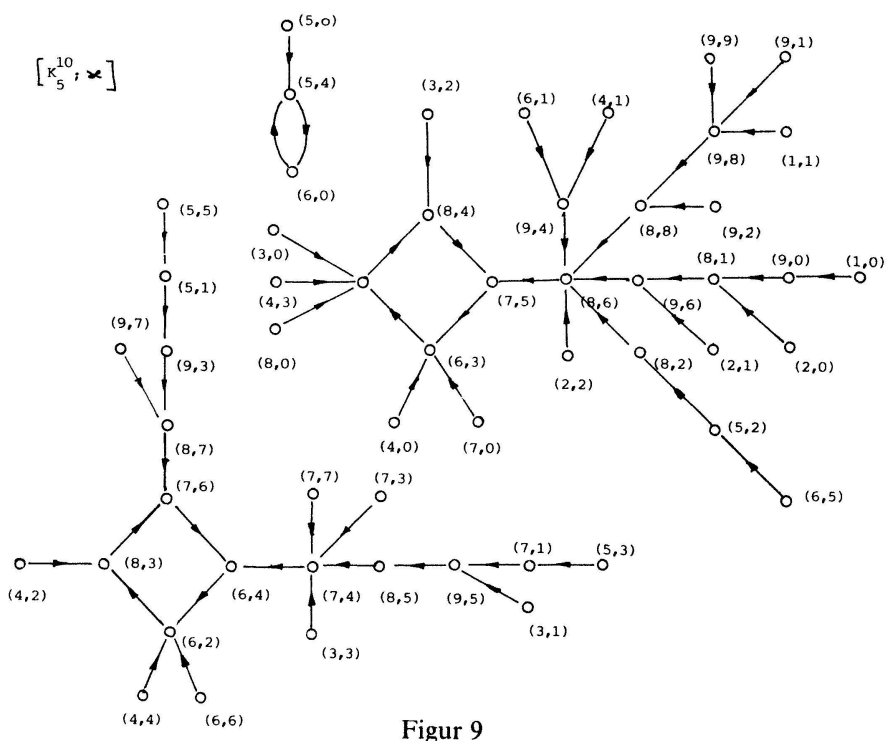
3)  $[x]$  ist der Ganzzahlteil von  $x$ .

Die Figuren 9 und 10 zeigen die mit dem Rechner erhaltenen Di-Graphen zu den beiden unären Algebren  $[K_5^{10}; \kappa]$  und  $[K_7^4; \kappa]$ . Die Algebra  $[K_7^4; \kappa]$  ist offenbar wiederum baumartig. Man liest aus dem zugehörigen Di-Graphen ab, dass

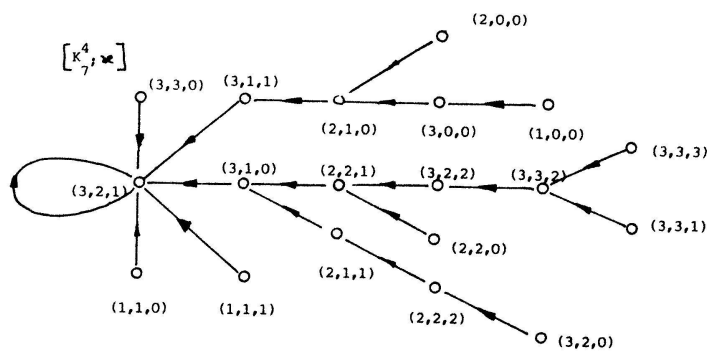
$$(3210000)_4 - (0000123)_4 = (3203211)_4$$

die Kaprekar-Zahl bei den 7stelligen Zahlen im Positionssystem mit der Basis 4 ist. Zugleich kann man aus dem Di-Graphen entnehmen, dass eine entsprechende Kaprekar-Folge nach maximal 6 Anschlussgliedern stabil wird.

$[K_5^{10}; \kappa]$  ist eine unäre Algebra, deren Kern einen Zyklus der Länge 2 und zwei Zyklen der Länge 4 aufweist.



Figur 9



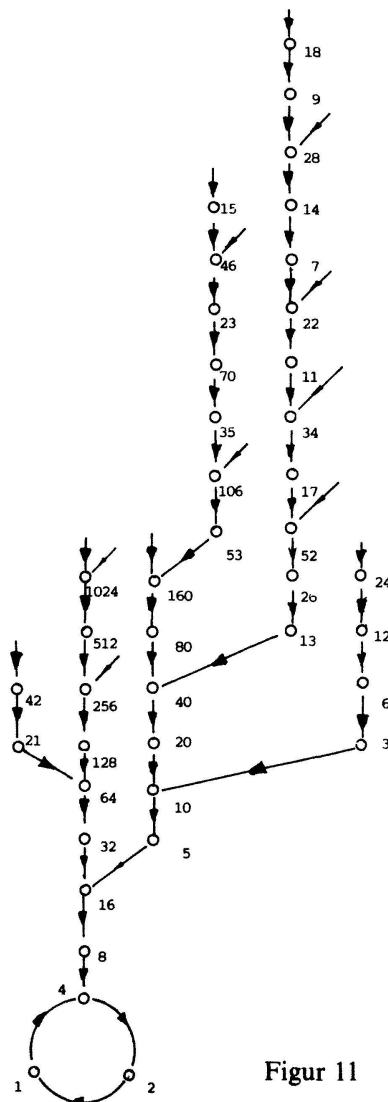
Figur 10

**6. Schlussbemerkungen**

Auf unäre Algebren stösst man in der Mathematik auch bei andern Fragestellungen. Betrachtet man etwa auf der Menge  $N$  der natürlichen Zahlen die 1stellige Verknüpfung

$$n \mapsto \bar{n} = \mu(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 3n + 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (6,1)$$

dann erhält man eine transfinite unäre Algebra  $[N; \mu]$ . Figur 11 zeigt einen Ausschnitt aus dem zugehörigen Di-Graphen, der alle natürlichen Zahlen unterhalb 25 enthält.



Figur 11

Es wird vermutet, dass der Kern der Algebra  $[N; \mu]$  aus dem Zyklus (4,2,1) besteht. Dies konnte aber noch nicht bewiesen werden. Folgen mit dem Konstruktionsgesetz (6,1) werden gelegentlich als *Syracuse-Folgen* bezeichnet. Darüber gibt es eine sehr umfangreiche Literatur<sup>4)</sup>.

4) Vgl. etwa [4]. Im Anschluss an diese Note findet der Leser einen ausführlichen Literaturhinweis. Dort wird auch mitgeteilt, dass namhafte Mathematiker für den Beweis der Vermutung über Syracuse-Folgen Preise ausgesetzt haben.

Den Hinweis auf die unären Algebren als entscheidende Hintergrundstruktur beim Kaprekar-Problem verdanke ich W. Deuber in Bielefeld.

M. Jeger  
Mathematik-Departement ETH Zürich

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Hasse and G. D. Prichett: The determination of all four-digit Kaprekar-Constants. *J. reine angew. Math.* 299/300, 113–124 (1978).
- 2 E. Hlawka, Ch. Binder und P. Schmitt: Grundbegriffe der Mathematik. Reihe Universitäts-Lehr und -Studienbücher. Wien 1979.
- 3 D. R. Kaprekar: Another solitaire game. *Scripta math.* 15, 244–245 (1949).
- 4 J. C. Lagarias: The  $(3x + 1)$ -Problem and its generalizations. *Am. math. Mon.* 82, 3–23 (1985).
- 5 J. F. Lapenta, A. L. Ludington and G. D. Prichett: An algorithm to determine self-producing  $r$ -digit  $g$ -adic integers. *J. reine angew. Math.* 310, 100–110 (1979).
- 6 F. Padberg: Zum Einsatz eines Taschenrechners bei der Entdeckung einfacher Sätze. Ein zahlentheoretisches Beispiel. *Didaktik Math. (DdM)* 1980/3, 183–188.

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/85/060129-15\$1.50 + 0.20/0

## Typisierung der elliptischen Dreiecke nach der Qualität ihrer Winkel und Seiten

In der Theorie der Polyeder in  $n$ -dimensionalen Räumen konstanter Krümmung gibt es eine Reihe von Problemen, bei denen nicht die genaue Grösse der Polyederinnenwinkel von Interesse ist, sondern nur deren *Qualität*, d. h. die Eigenschaft, ein spitzer, ein rechter oder ein stumpfer Winkel zu sein. Zu diesen Problemen gehört beispielsweise die von H. Hadwiger gestellte Frage nach der Orthoschemzerlegbarkeit von Polyedern (vgl. [5]).

Eine ausführliche Darstellung der qualitativen Winkeleigenschaften euklidischer Simplexe findet sich bei M. Fiedler [3, 4].

Im vorliegenden Aufsatz werden die Möglichkeiten für die Existenz und die gegenseitige Lage spitzer, rechter und stumpfer Elemente (d. h. Winkel und Seiten) bei elliptischen Dreiecken untersucht.

Es sei  $\mathfrak{E}$  der zweidimensionale Raum mit der konstanten Krümmung  $\kappa = 1$  (elliptische Ebene). Im folgenden wird es oft nützlich sein, an die Einheitshalbsphäre mit identifizierten diametralen Randpunkten als ein Modell von  $\mathfrak{E}$  zu denken.

Ein Dreieck in  $\mathfrak{E}$  (elliptisches Dreieck) ist im Unterschied zur euklidischen und hyperbolischen Geometrie durch seine drei Eckpunkte nicht eindeutig festgelegt. Sind  $A, B$  und  $C$  drei Punkte aus  $\mathfrak{E}$  in allgemeiner Lage, dann zerlegen die Geraden  $g(A, B)$ ,  $g(A, C)$  und  $g(B, C)$  die Ebene  $\mathfrak{E}$  elementar-geometrisch in vier Dreiecke  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  und  $\Delta_4$ , die alle die Eckpunkte  $A, B$  und  $C$  besitzen (vgl. Figur 1 sowie [2], S. 62; die Darstellung von  $\mathfrak{E}$  in Figur 1 ist aufzufassen als senkrechte Parallelprojektion des Halbsphärenmodells auf