

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **40 (1985)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Einschliessung ebener Kurven

Von einer Kurve in der euklidischen Ebene sagen wir, dass sie die Menge K einschliesst, wenn K in der konvexen Hülle der Kurve enthalten ist. Für eine geschlossene, rektifizierbare Kurve K der Länge $L(K)$ bezeichne $L^*(K)$ das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven (zusammenhängend, aber nicht notwendig geschlossen), die K einschliessen. Wir zeigen die Ungleichung

$$L^*(K) \leq \frac{2 + \pi}{2\pi} L(K), \quad (1)$$

in der Gleichheit genau dann gilt, wenn K ein Kreis ist. Dass für Kreise Gleichheit gilt, hat Joris [2] gezeigt.

Da bei nichtkonvexen geschlossenen Kurven der Rand der konvexen Hülle stets kleinere Länge hat, dürfen wir uns zum Beweis der Ungleichung (1) auf konvexe Kurven K beschränken. Für eine solche Kurve ist durch $h_K(\varphi) = \text{Max}\{\langle x, e_\varphi \rangle : x \in K\}$ die Stützfunktion h_K definiert; dabei ist in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt und e_φ den Einheitsvektor $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Bekanntlich gilt

$$L(K) = \int_0^{2\pi} h_K(\varphi) d\varphi. \quad (2)$$

$S(\varphi)$ sei die Stützgerade an K mit äusserem Normalenvektor e_φ . Für gegebenen Winkel φ sei s^\pm der Schnittpunkt von $S(\varphi)$ mit $S(\varphi \pm \pi/2)$ und t^\pm der zu s^\pm nächste Punkt auf $K \cap S(\varphi \pm \pi/2)$. Aus den Strecken s^+t^+ , s^-t^- und dem zwischen t^+ und t^- liegenden Teil der Kurve K , der nicht die Gerade $S(\varphi)$ berührt, setzen wir die U-förmige Kurve U_φ zusammen, die K einschliesst. Sie hat die Länge

$$L(U_\varphi) = 2h_K(\varphi) + \int_{\varphi + \frac{1}{2}\pi}^{\varphi + \frac{3}{2}\pi} h_K(\alpha) d\alpha, \quad (3)$$

wie man am bequemsten einsieht, wenn man (2) auf die konvexe Kurve anwendet, die sich aus der Kurve U_φ und ihrem Spiegelbild am Punkt $z = (s^+ + s^-)/2$ zusammensetzt (zum Nachweis von (3) darf man etwa $z = 0$ annehmen, da beide Seiten von (3) nicht von der Wahl des Ursprungs abhängen). Nach (3) und (2) ist $L(U_\varphi) + L(U_{\varphi+\pi}) = 2h_K(\varphi) + 2h_K(\varphi + \pi) + L(K)$ und folglich

$$\int_0^{2\pi} L(U_\varphi) d\varphi = (2 + \pi)L(K).$$

Für passendes φ ist daher $2\pi L(U_\varphi) \leq (2 + \pi)L(K)$, woraus die Ungleichung (1) folgt.

Gilt nun Gleichheit in (1), so muss insbesondere $L(U_\varphi)$ konstant sein. Aus (3) folgt dann durch Differenzieren (und wegen der Periodizität von h_K)

$$h'_K(\varphi) = \frac{1}{2} \left[h_K\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - h_K\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

für alle φ . Es ist bekannt (Fejes Tóth [1], S. 37–38), dass hieraus

$$h_K(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi$$

mit Konstanten a_0, a_1, b_1 folgt; K ist also ein Kreis.

R. Schneider und J. A. Wieacker, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. Fejes Tóth: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
- 2 H. Joris: Le chasseur perdu dans la forêt (Un problème de géométrie plane). El. Math. 35, 1–14 (1980).

© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/85/060098-02\$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 910. Die Polynomfolge $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$p_1(x) = x, \quad p_{n+1}(x) = x(1-x)p'_n(x); \quad n \in \mathbf{N}.$$

Man ermittle für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge der rationalen Nullstellen von p_n .

H. Müller, Hamburg, BRD

Solution: Let N_n be the set of all rational zeros of p_n . Then clearly $N_1 = \{0\}$, $N_n \supseteq \{0,1\}$ for all $n > 1$. By induction on n one easily shows that

- (1) p_n is an integer polynomial of degree n with n simple real zeros in the interval $[0,1]$.
- (2) $p_n(1-x) = (-1)^n p_n(x)$ for $n > 1$.
- (3) $p_n(0) = 0$ and $p'_n(0) = 1$.

For the proof of (1) one uses the mean-value theorem. It follows from (2) that $\frac{1}{2} \in N_n$ for all odd $n > 1$. Consequently $\frac{1}{2} \notin N_{n+1}$ if n is odd, since all zeros of p_n are simple as mentioned in (1). Let q_n be defined by $q_n(x) = x^n p_n(1/x)$. Then q_n is a monic integer polynomial of