le deuxième terme de la somme étant la probabilité d'intersection avec l'équateur. Le développement asymptotique est évidemment le même qu'au paragraphe 2.

E. Peter (Bern) und C. Tanasi (Palermo)

BIBLIOGRAPHIE

1 C. Tanasi: Problèmes de probabilité géometrique sur la sphère unitaire. Boll. Un. Matem. Ital., 16-A, pp. 335–340 (1980).
2 E. Peter: 2 Wahrscheinlichkeitsprobleme auf der Sphäre. Lizentiatsarbeit. Bern, Mathematisches Institut (1981).
3 W. Gröbner et N. Hofreiter: Integraltafeln. Springer-Verlag, 1950.

 0013-6018/84/010010-07$1.50+0.20/0

Aufgaben

Aufgabe 891. Es sei $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ stetig und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0\,.$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,dx\right)^2 \leqq \frac{1}{3}\int_0^1 x^2 (f(x))^2\,dx\,.$$

Wann genau gilt das Gleichheitszeichen?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

Solution: More generally, by applying the Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz inequality $(\int g\,h)^2 \leqq (\int g^2)\,(\int h^2)$ to the case when $g(x) = x f(x)$, $h(x) = x$, we obtain the given inequality for every Lebesgue integrable f, with equality if and only if $\lambda x f(x) + \mu x = 0$ almost everywhere for some constants λ, μ not both 0, i.e. $f(x) = c$ almost everywhere for some constant c.

R. O. Davies, Leicester, GB

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), K. Bickel (Nürtingen, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), Th. Egger (Appenzell), A. A. Jagers (Enschede, NL), W. Janous (Innsbruck, A), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warschau, PL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), I. Merényi (Cluy-Napoca, RU), Hj. Stocker (Wädenswil), W. Volgmann (Bochum, BRD), M. Vowe (Therwil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).

Aufgabe 892. Für natürliche Zahlen n sei

$$a_n := \int_0^n \exp(t^2/n)\, dt\,.$$

Man ermittle $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n)$.

U. Abel, Giessen, BRD

Lösung (von der Redaktion gekürzt): Es sei allgemeiner

$$a_n := \int_0^n \exp(C t^\alpha n^{-\beta})\, dt \quad \text{mit} \quad C>0,\ \alpha>\beta\geqq 0\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $x = t\, n^{-\beta/\alpha}$ erhält man

$$a_n = n^{\beta/\alpha} \int_0^{n^{(\alpha-\beta)/\alpha}} \exp(C x^\alpha)\, dx\,.$$

Fasst man nun n als stetige Variable auf, so ergibt die Regel von Bernoulli-de l'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^{\beta/\alpha} \cdot \lim_{n\to\infty} \exp\{C[(n+1)^{\alpha-\beta} - n^{\alpha-\beta}]\}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{wenn } \alpha < \beta+1 \\ e^C, & \text{wenn } \alpha = \beta+1 \\ \infty, & \text{wenn } \alpha > \beta+1 \end{cases}$$

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), R. O. Davies (Leicester, GB), U. Graf (La Neuveville), A. A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), Kee-wai Lau (Hong-Kong), A. Makowski (Warschau, PL), V. D. Mascioni (Origlio), Chr. A. Meyer (Ittigen), I. Merényi (Cluj-Napoca, RU), A. Müller (Zürich), Hj. Stocker (Wädenswil), C. Wildhagen (Breda, NL), R. Wyss (Flumenthal).
Eine eingesandte Lösung war falsch.

Aufgabe 893. Es sei p eine ungerade Primzahl, g eine Primitivwurzel $\bmod p$. Man zeige, dass für $x \not\equiv 0 \pmod p$

$$\operatorname{ind}_g x \equiv \sum_{i=1}^{p-2} (1-g^i)^{p-2} x^i \pmod p\,.$$

Dabei bezeichnet $\operatorname{ind}_g x$ die kleinste der natürlichen Zahlen k, für die $x \equiv g^k \pmod p$ erfüllt ist.

H. Bergmann, Hamburg, BRD

Solution: let $k = \operatorname{ind}_g(x)$. Since $\{g^i \mid 1 \leqq i \leqq p-2\} = \{2, 3, \ldots, p-1\}$ it follows that $\{1-g^i \mid 1 \leqq i \leqq p-2\} = \{2, 3, \ldots, p-1\}$.

So

$$\sum_{i=1}^{p-2}(1-g^i)^{p-2}x^i=\sum_{i=1}^{p-2}(1-g^i)^{p-2}g^{ki}=\sum_{i=1}^{p-2}(1-g^i)^{p-2}(1-(1-g^i))^k$$

$$=\sum_{l=2}^{p-2}l^{p-2}(1-l)^k=\sum_{l=1}^{p-2}l^{p-2}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i l^i$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{l=1}^{p-2}l^{i+p-2}\overset{*}{\equiv}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(-\delta_{i,1})=k=\operatorname{ind}_g(x)\ (\operatorname{mod} p).$$

Note that at * we have made use of

$$\sum_{l=1}^{p-1}l^j=\sum_{i=0}^{p-2}g^{ij}=\begin{cases}\dfrac{g^{(p-1)j}-1}{g^j-1}\equiv 0\ (\operatorname{mod} p), & \text{if } (p-1)\nmid j,\\ p-1\equiv -1\ (\operatorname{mod} p), & \text{if } (p-1)\mid j.\end{cases}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. Flanders (Boca Raton, USA), L. Kuipers (Sierre), V. D. Mascioni (Origlio).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1984* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44), Problem 862A (Band 36, S. 68), Problem 872A (Band 36, S. 175).

Aufgabe 904. Für beliebige $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ werte man die Summe

$$S(x,n):=\sum_{i=0}^{n}\left\{\binom{x+n+i}{i}2^{-i}-\binom{x+n+i+1}{i}2^{-i-1}\right\}$$

geschlossen aus.

L. Kuipers, Sierre

Aufgabe 905. Die Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ seien stetig, und es gelte

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 .$$

Man zeige, dass

$$\left(\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqq \left\{\int_0^1 (g(x))^2 dx - \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^2\right\} \int_0^1 (f(x))^2 dx .$$

Wann genau gilt Gleichheit?

U. Abel, Giessen, BRD

Literaturüberschau

E. Scholz: Geschichte der Mannigfaltigkeitsbegriffe von Riemann bis Poincaré. 430 Seiten, Fr. 36.–. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart 1980.

Dieses Buch wendet sich an historisch interessierte Mathematiker. Der Autor schildert darin den Ursprung, die Entwicklung und die Auswirkungen des Mannigfaltigkeitsbegriffs.

Im 19. Jahrhundert entwickelten sich aus der euklidischen Geometrie zwei gegensätzliche Richtungen, nämlich

1) die nichteuklidische Geometrie

2) geometrisierende Aspekte in der mehrdimensionalen Analysis; den scheinbaren Widerspruch löste Riemann im Mannigfaltigkeitsbegriff, der auf der Idee einer ausgedehnten Grösse basiert, die sich lokal einfach, global aber kompliziert verhält.

Dem Autor ist es gelungen, dem Leser die historischen und philosophischen Hintergründe für die Entstehung der allgemeinen Strukturbegriffe klarzumachen.

Im Hauptteil des Buches wird die Auswirkung des Mannigfaltigkeitsbegriffs auf die Gebiete Differentialgeometrie, komplexe Analysis (Riemannsche Fläche), Grundlagen der Geometrie, Topologie, projektive Geometrie und algebraische Topologie behandelt.

Das vorletzte Kapitel ist Poincaré gewidmet: Poincaré hatte eine konstruktive Fassung des Mannigfaltigkeitsbegriffs als Nullstellenmenge von Funktionen. Wie durch diese «Präzisierung» des Mannigfaltigkeitsbegriffs die topologische Theorie der Mannigfaltigkeiten entstand, wird vom Verfasser einleuchtend skizziert.

R. Klinger

A. I. Mees: Dynamics of Feedback Systems. X und 214 Seiten, US-$ 39.50. John Wiley & Sons, New York 1981.

Das Buch baut auf einem «graduate course» auf, den der Autor seit 1976 in Cambridge gehalten hat. Der relativ informelle Stil führt schnell auf wesentliche Kernfragen und zeigt Zusammenhänge zwischen verschiedenen Methoden. Dynamische Systeme werden durch externe und interne Modelle, also durch Eingangs-Ausgangs-Beziehungen und durch Differentialgleichungen dargestellt. Beide Bereiche dienen zur Erklärung des Systemverhaltens, vor allem des nichtlinearen. Das Buch bringt klar die technischen Motivationen und Fragestellungen und die entsprechenden mathematischen Formulierungen zum Ausdruck. Es wendet sich an Regelungsingenieure und Mathematiker, die an einem Überblick über Gemeinsamkeiten und neuere Entwicklungen interessiert sind. In diesem Sinne kann es beiden Gruppen, z. B. als Grundlage für ein Seminarthema, sehr empfohlen werden.

G. Schweitzer