

# Zwei Rekursionsverfahren zur Konstruktion von Steiner-Systemen

Autor(en): **Zeitler, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **39 (1984)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-38025>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 39

Nr. 6

Seiten 137–160

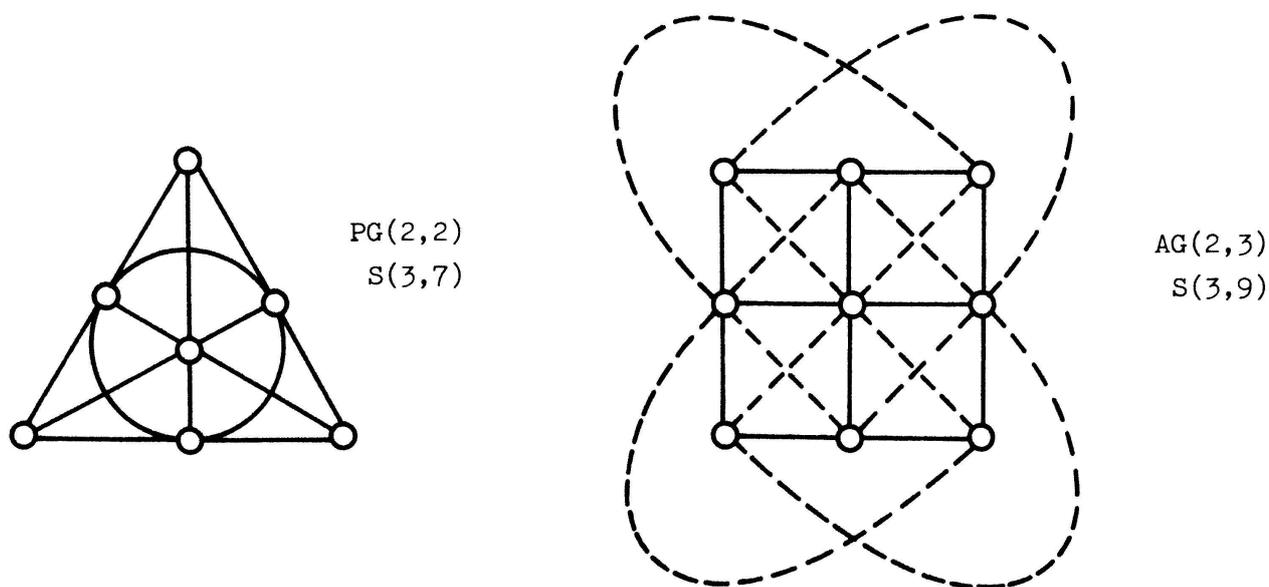
Basel, 10. November 1984

## Zwei Rekursionsverfahren zur Konstruktion von Steiner-Systemen

### 1. Einleitung

Es sei  $V$  mit  $|V| = v$  eine endliche Menge und  $B$  mit  $|B| = b$  eine Menge von  $k$ -elementigen Teilmengen aus  $V$ , wobei  $k \geq 3$ . Die Elemente aus  $V$  heissen Punkte, die von  $B$  Geraden. Zu zwei Punkten gebe es genau eine Gerade, der sie angehören. Dann existieren durch jeden Punkt genau  $r$  Geraden. Die Inzidenzstruktur  $(V, B, \in)$  heisst Steiner-System der Ordnung  $v$ . Wir schreiben kurz  $S(k, v)$ . Es gilt  $r = \frac{v-1}{k-1}$  und  $b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ .

Daraus folgt als notwendige Bedingung für die Existenz solcher Systeme  $k-1|v-1$  und  $k(k-1)|v(v-1)$ . Ist  $k$  Primzahlpotenz, so erweisen sich diese Bedingungen äquivalent dazu, dass  $v$  entweder von der Form  $v = 1 + nk(k-1)$  oder von der Form  $v = k + nk(k-1)$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  ist. Für  $k = 3, 4, 5$  weiss man, dass diese Forderung auch hinreichend ist. Für  $k > 5$  ist sie es jedenfalls dann, wenn  $v$  «hinreichend» gross ist [1, 5]. In Figur 1 sind zwei Beispiele von Steiner-Systemen  $S(3, v)$  gezeichnet. Im einen Fall handelt es sich um die projektive Ebene  $PG(2, 2)$  mit  $v = b = 7$ ,  $k = r = 3$ , im zweiten um die affine Ebene  $AG(2, 3)$  mit  $v = 9$ ,  $b = 12$ ,  $k = 3$ ,  $r = 4$ .



Figur 1

In [7] findet sich ein Rekursionsverfahren, das es gestattet, aus einem  $S(3, v)$  ein neues System  $S(3, 1 + 2v)$  zu konstruieren. Dieses sogenannte *Zentralverfahren* wurde dann in einer weiteren Arbeit [8] erweitert und konnte unter gewissen Voraussetzungen zur Konstruktion eines  $S(k, 1 + (v - 1)k)$  aus einem  $S(k, v)$  verwendet werden. Die Arbeit [7] bringt noch ein weiteres Rekursionsverfahren. Mit ihm lässt sich aus einem  $S(3, v)$  ein neues System  $S(3, 3v)$  erzeugen. Erstes Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, auch dieses sogenannte *Parallelverfahren* zu erweitern. Dann wird es möglich sein, aus einem  $S(k, v)$  unter gewissen Voraussetzungen ein  $S(k, kv)$  zu konstruieren. Ganz nebenbei ergibt sich ein Verfahren zur Konstruktion von  $k - 2$  paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten.

Das Auftreten dieser lateinischen Quadrate legt es nahe, in einem weiteren Abschnitt ein auf H. Hanani [4] zurückgehendes Verfahren vorzustellen. Auch dieses *Transversalverfahren* gestattet, aus einem  $S(k, v)$  unter gewissen Voraussetzungen ein  $S(k, kv)$  zu konstruieren. Ein Vergleich beider Konstruktionsverfahren und eine Bemerkung zur «Pseudoanschauung» beschliessen die Arbeit.

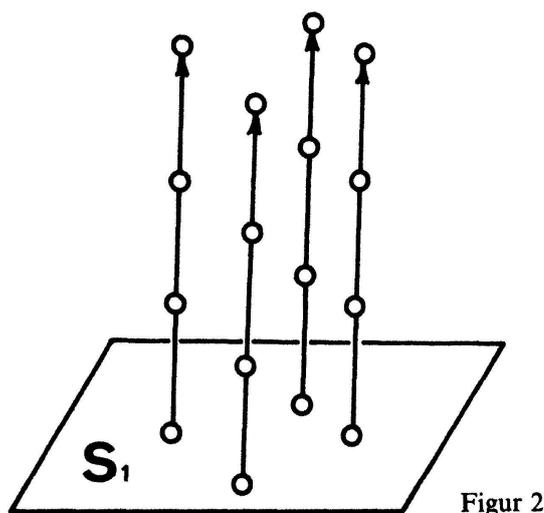
## 2. Das Parallelverfahren

### 2.1 Ein Konstruktionssatz

Aus einem gegebenen  $S(k, v)$  lässt sich durch Anwendung des erweiterten Parallelverfahrens ein  $S(k, kv)$  konstruieren, falls es  $S(k, k^2)$  gibt.

#### 2.1.1 Das Konstruktionsverfahren

Gegeben sei  $S_1$ , ein Steiner-System  $S(k, v)$  mit der Punktmenge  $V$  und der Geradenmenge  $B$ . Die Punkte dieses Systems werden nun in  $k - 1$  Stufen *parallel hochgezogen* oder *parallel projiziert*. Figur 2 zeigt diesen Vorgang des *Hochziehens* für  $k = 4$ .



Figur 2

#### Die Punkte

Jedem Punkt  $P \in V$  werden durch das Hochziehen genau  $k - 1$  weitere Punkte zugeordnet. So erhalten wir insgesamt  $\bar{v} = kv$  Punkte. Mit  $I = \{1, \dots, k\}$  lässt sich die neue Punktmenge  $\bar{V}$  wie folgt beschreiben:  $\bar{V} = V \times I$ . Dabei ist  $(P, 1)$  mit  $P$  zu identifizieren.

*Die Geraden*

*Die Grundgeraden*

In  $S_1$  gibt es genau  $|B| = b_1 = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$  Geraden. Wir nennen sie die Grundgeraden.

*Die Projektionsgeraden*

Jeder Punkt  $P \in V$  bestimmt eine weitere Gerade  $g_P = \{(P, i) | i \in I\}$ . Die Anzahl dieser sogenannten Projektionsgeraden beträgt  $b_2 = v$ .

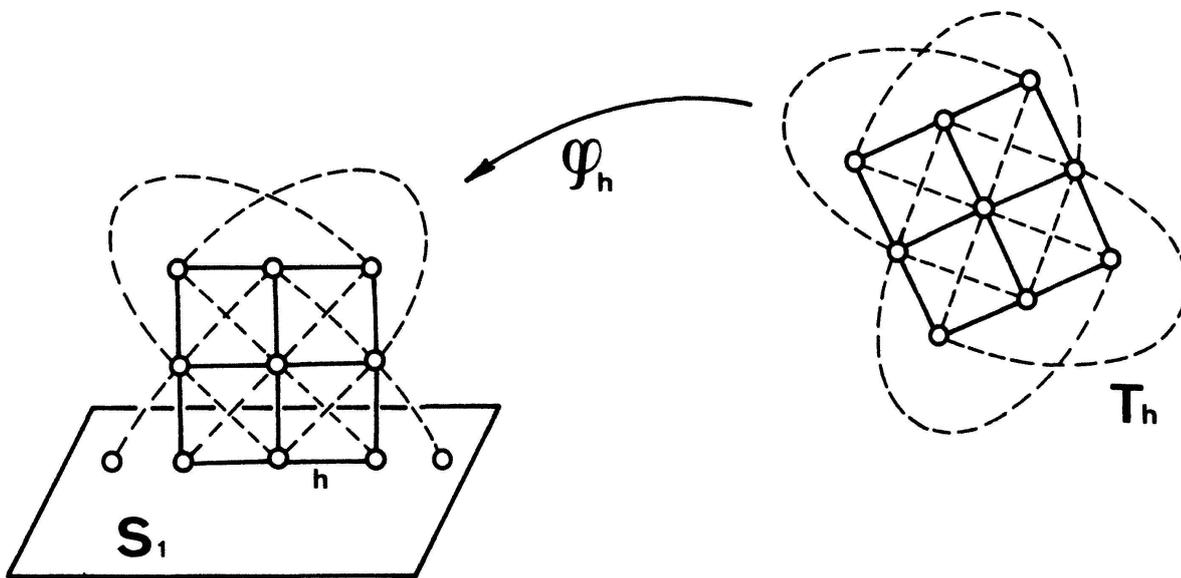
*Die Geraden der Einhängssysteme*

Nach der Voraussetzung von Satz 2.1 existieren Steiner-Systeme  $S(k, k^2)$ . Sie enthalten genau  $k(k+1)$  Geraden, und durch jeden Punkt gehen genau  $k+1$  Geraden.

Jeder Grundgeraden  $h \in B$  wird nun ein solches System  $T_h$  mit der Geradenmenge  $B_h$  zugeordnet und dieses dann so *eingehängt*, dass es alle durch die  $k$  Punkte von  $h$  festgelegten Projektionsgeraden enthält. Mit diesem *Einhängssystem*  $T_h$  kommen zu jeder Grundgeraden neben den Projektionsgeraden noch weitere  $k^2 - 1$  Geraden dazu. Dies liefert insgesamt

$$b_3 = b_1(k^2 - 1) = \frac{v(v-1)(k+1)}{k}$$

neue Geraden. Figur 3 erläutert das Einhängen des Systems  $S(3, 9)$  aus Figur 1.



Figur 3

Für die Gesamtheit aller bisher konstruierten Geraden erhalten wir schliesslich

$$\bar{b} = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{v(v-1)}{k(k-1)} + v + \frac{v(v-1)(k+1)}{k} = \frac{v(vk-1)}{k-1}$$

Das geschilderte «Einhängen» ist ein Isomorphismus  $\varphi_h$  von  $T_h$  mit  $h$ ,  $g_P \in \varphi_h(B_h)$  für alle  $P \in h$ . Ein solcher existiert, da  $T_h$  als ein  $S(k, k^2)$  eine affine Ebene ist, also eine

Gerade von  $k$  paarweise punktfremden Geraden geschnitten wird. Damit ergibt sich die Menge aller Geraden in unserer neuen Inzidenzstruktur

$$\bar{B} = \{\varphi_h(m) | h \in B, m \in B_h\}.$$

### 2.1.2 Der Beweis des Satzes 2.1

Bezeichnen wir die charakteristischen Grössen unserer neuen Inzidenzstruktur in der üblichen Weise, jedoch versehen mit einem Querstrich, so entnehmen wir unserer Konstruktion sofort

$$\bar{k} = k, \bar{v} = |\bar{V}| = kv, \bar{b} = |B| = \frac{v(vk - 1)}{k - 1} = \frac{\bar{v}(\bar{v} - 1)}{\bar{k}(\bar{k} - 1)}.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, dass durch jeden Punkt  $(P, i)$  mit  $P \in V, i \in I$  genau eine Projektionsgerade und in jedem Einhängesystem, das diese Projektionsgerade enthält, noch  $k$  weitere Geraden gehen. Dies ergibt insgesamt

$$\bar{r} = 1 + k \frac{v - 1}{k - 1} = \frac{vk - 1}{k - 1} = \frac{\bar{v} - 1}{\bar{k} - 1}.$$

Weiter gibt es durch zwei Punkte genau eine Gerade. Liegen die beiden Punkte auf einer Projektionsgeraden oder auf einer Grundgeraden, so ist alles schon bewiesen. Im anderen Fall bestimmen die beiden Punkte zwei verschiedene Projektionsgeraden, diese in  $S_1$  zwei verschiedene Punkte, also genau eine Gerade  $h \in B$ . Im Einhängesystem  $T_h$  gibt es aber durch zwei Punkte genau eine Gerade.

Damit ist nachgewiesen, dass unsere neue Inzidenzstruktur ein Steiner-System  $S(k, kv)$  ist.

## 2.2 Bemerkungen

### 2.2.1 $k$ Primzahlpotenz

$S(k, k^2)$  ist in jedem Fall eine affine Ebene. Handelt es sich bei  $k$  um eine Primzahlpotenz, so existieren diese Einhängssysteme auch tatsächlich. Entweder liegen die affinen Ebenen  $AG(2, k)$  oder aber nicht-desarguessche affine Ebenen vor.

### 2.2.2 Etagensysteme

Wir betrachten jetzt die Menge  $S_i$  aller Punkte  $(P, i)$  aus  $S(k, kv)$  mit festem  $i \in \{1, \dots, k\}$ , zusammen mit den in ihr enthaltenen Geraden, und fragen, ob es sich dabei um ein Steiner-System  $S(k, v)$  handelt. (Für  $i = 1$  ist dies selbstverständlich der Fall.) Wenn ja, sprechen wir von einem *Etagensystem*, von der  $i$ -ten *Etage*.

Das *Parallelverfahren* lässt sich so gestalten, dass  $k$  zueinander isomorphe *Etagensysteme* existieren. Bei Beginn der Konstruktion ziehen wir nicht nur die einzelnen Punkte aus dem gegebenen System  $S_1$  hoch, sondern das gesamte System mit all seinen Geraden. Auf diese Weise erhalten wir insgesamt  $k$  Etagensysteme, isomorph zu dem gegebenen System  $S_1$ . Jetzt erst hängen wir unsere Systeme  $S(k, k^2)$  ein. Dabei sind in jedem Fall nicht nur  $k^2$  Punkte, sondern auch schon  $2k$  Geraden vorgegeben. Die  $k^2$  Punkte befinden sich in *quadratischer Anordnung*; sie bilden gewissermassen ein Gerüst.

Weil es sich bei unseren Einhängssystemen um affine Ebenen handelt, ist es stets möglich, sie in dieses Gerüst passend einzufügen. (Die Einhängssysteme müssen nicht isomorph zueinander sein.)

Man könnte nun vermuten, dass jedes nach dem Parallelverfahren aus  $S(k, v)$  konstruierte System  $S(k, kv)$  insgesamt  $k$  Etagensysteme enthält. Dies stimmt nicht. Vertauschen wir nämlich in dem gerade konstruierten System  $S(k, kv)$  innerhalb eines einzigen Einhängsystems zwei Punkte, so bewirkt diese geringfügige *Perturbation* bereits, dass in dem neuen, jetzt entstehenden System  $S(k, kv)$  nicht mehr  $k$  Etagensysteme existieren.

### 2.3 $MOLS(v)$

#### 2.3.1 Definitionen [1, 3]

Wir betrachten eine Menge  $M$  der Mächtigkeit  $v$ , z. B.  $M = \{1, \dots, v\}$ . Unter einem *lateinischen Quadrat* der Ordnung  $v$  versteht man dann eine  $(v \times v)$ -Matrix von der Art, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element aus  $M$  genau einmal vorkommt.

Eine algebraische Struktur  $(M, \circ)$  heisst *Quasigruppe*, wenn es für alle  $a, b \in M$  genau ein  $x \in M$  bzw. genau ein  $y \in M$  gibt mit  $a \circ x = b$  bzw.  $y \circ a = b$ . Betrachtet man ein lateinisches Quadrat als Verknüpfungstafel, so entsteht nach unseren Definitionen eine Quasigruppe. Umgekehrt induziert auch jede Quasigruppe ein lateinisches Quadrat.

Werden zwei lateinische Quadrate gleicher Ordnung aufeinandergelegt, so heissen die beiden Quadrate zueinander *orthogonal*, wenn jedes Element des ersten genau einmal mit jedem des zweiten zusammentrifft.

Sind in einer Menge lateinischer Quadrate der Ordnung  $v$  je zwei zueinander orthogonal, so spricht man von einer Menge paarweise orthogonaler lateinischer Quadrate der Ordnung  $v$  und schreibt kurz  $MOLS(v)$  – *mutually orthogonal Latin squares*.

In Figur 4 sind drei paarweise orthogonale Quadrate der Ordnung 4 angegeben.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Drei MOLS der Ordnung 4

Figur 4

#### 2.3.2 Satz

Die Konstruktion eines  $S(k, kv)$  mit  $k$  Etagensystemen aus einem  $S(k, v)$  nach dem Parallelverfahren liefert  $k - 2$   $MOLS(v)$ .

Ist  $k \in \{3, 4, 5\}$  und  $v = 1 + nk(k - 1)$  oder  $v = k + nk(k - 1)$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ , so existieren nach der Einleitung sowohl Systeme  $S(k, v)$  als auch Systeme  $S(k, k^2)$  und mit Satz 2.3.2 also  $k - 2$   $MOLS(v)$ . Damit ist ein für all diese Ordnungen  $v$  anwendbares Verfahren zur Auffindung von  $MOLS(v)$  gewonnen.

**Beweis:** Jedem Punktepaar  $(P, 1), (Q, 2)$  mit  $P, Q \in V$  wird die Verbindungsgerade und auf dieser der (in  $\varphi_{PQ}(T_{PQ})$  liegende) Punkt  $(R, i)$  aus der  $i$ -ten Etage mit  $i \in \{3, \dots, k\}$  zugeordnet. Tragen wir all diese Punkte in eine Tabelle mit jeweils  $v$  Eingängen  $(P, 1)$  und  $(Q, 2)$  ein, so erhalten wir ein lateinisches Quadrat der Ordnung  $v$ . Denn  $Q, R$  bestimmen eindeutig  $P$  und  $P, R$  eindeutig  $Q$ .

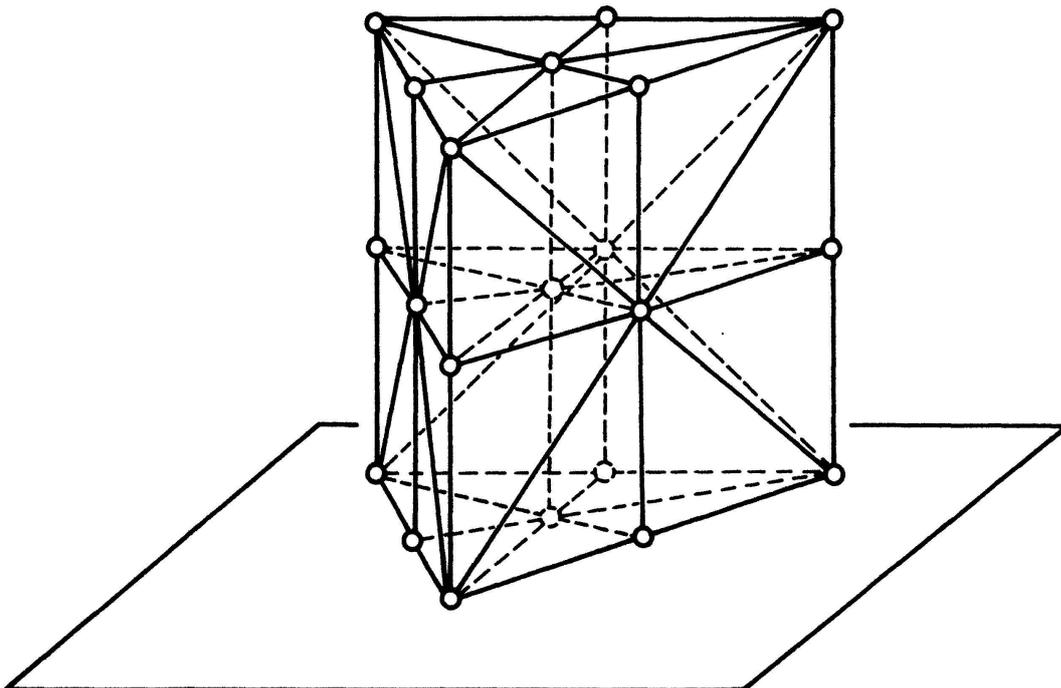
Die so entstehenden lateinischen Quadrate  $L_i$  und  $L_j$  mit  $i \neq j$  erweisen sich als orthogonal, da die Verbindungsgerade  $(R, i), (S, j)$  die erste und die zweite «Etage» jeweils in genau einem Punkt trifft.

Wir merken an, dass die zu den einzelnen lateinischen Quadraten gehörenden Quasigruppen nach der Art unserer Konstruktion kommutativ sind. Weiter enthält jede solche Quasigruppe  $\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$  Unter-Quasigruppen, die jeweils durch eine Grundgerade des Systems  $S_i$  bestimmt werden. Die Mächtigkeit jeder Unter-Quasigruppe dieser Art beträgt  $k$ . Jedes Element der Quasigruppe gehört genau  $\frac{v-1}{k-1}$  Unter-Quasigruppen dieser Art an. Entsprechendes gilt für die zugeordneten lateinischen Quadrate.

### 2.3.3 Beispiel

Das Startsystem  $S_1$  sei die projektive Ebene  $PG(2,2)$  mit der Punktmenge  $V = \{11, 21, 31, 41, 51, 61, 71\}$  und der Geradenmenge (Grundgeraden)  $B = \{\{11, 21, 31\}, \{11, 41, 71\}, \{11, 51, 61\}, \{21, 71, 51\}, \{21, 41, 61\}, \{31, 61, 71\}, \{31, 41, 51\}\}$ . Nun werden weitere Punkte hinzugenommen, nämlich  $\{1i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i, 7i\}$  mit  $i \in \{2, 3\}$ . Projektionsgeraden sind dabei die 7 Punktmenge  $\{n1, n2, n3\}$  mit  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Als Einhängssysteme verwenden wir affine Ebenen  $AG(2,3)$ . Figur 5 veranschaulicht diesen Vorgang nochmals. (Dabei wurde auf alle Geraden im Steiner-System, die nicht als euklidische Strecken darstellbar sind, verzichtet.)



Figur 5

Mit unserer Konstruktion erhalten wir weitere Geraden

$\{11, 22, 33\}$ ,  $\{21, 32, 13\}$ ,  $\{31, 12, 23\}$ ,  $\{31, 22, 13\}$ ,  $\{21, 12, 33\}$ ,  $\{11, 32, 23\}$ ,  $\{11, 42, 73\}$ ,  
 $\{41, 72, 13\}$ ,  $\{71, 12, 43\}$ ,  $\{71, 42, 13\}$ ,  $\{11, 72, 43\}$ ,  $\{41, 12, 73\}$ ,  $\{11, 52, 63\}$ ,  $\{51, 62, 13\}$ ,  
 $\{61, 12, 53\}$ ,  $\{61, 52, 13\}$ ,  $\{51, 12, 63\}$ ,  $\{11, 62, 53\}$ ,  $\{21, 52, 73\}$ ,  $\{51, 72, 23\}$ ,  $\{71, 22, 53\}$ ,  
 $\{71, 52, 23\}$ ,  $\{51, 22, 73\}$ ,  $\{21, 72, 53\}$ ,  $\{21, 42, 63\}$ ,  $\{41, 62, 23\}$ ,  $\{61, 22, 43\}$ ,  $\{61, 42, 23\}$ ,  
 $\{41, 22, 63\}$ ,  $\{21, 62, 43\}$ ,  $\{31, 62, 73\}$ ,  $\{61, 72, 33\}$ ,  $\{71, 32, 63\}$ ,  $\{71, 62, 33\}$ ,  $\{61, 32, 73\}$ ,  
 $\{31, 72, 63\}$ ,  $\{31, 42, 53\}$ ,  $\{41, 52, 33\}$ ,  $\{51, 32, 43\}$ ,  $\{51, 42, 33\}$ ,  $\{41, 32, 53\}$ ,  $\{31, 52, 43\}$ .

Dazu kommen noch

$\{1i, 2i, 3i\}$ ,  $\{1i, 4i, 7i\}$ ,  $\{1i, 5i, 6i\}$ ,  $\{2i, 7i, 5i\}$ ,  $\{2i, 4i, 6i\}$ ,  $\{3i, 6i, 7i\}$ ,  $\{3i, 4i, 5i\}$  mit  $i \in \{2, 3\}$ .

Unter Verwendung all dieser Geraden ergibt sich zunächst eine Verknüpfungstafel und damit dann ein lateinisches Quadrat. In Figur 6 ist beides angegeben.

Verknüpfungstafel:

o	12	22	32	42	52	62	72
11	13	33	23	73	63	53	43
21	33	23	13	63	73	43	53
31	23	13	33	53	43	73	63
41	73	63	53	43	33	23	13
51	63	73	43	33	53	13	23
61	53	43	73	23	13	63	33
71	43	53	63	13	23	33	73

Lateinisches Quadrat der Ordnung 7:

1	3	2	7	6	5	4
3	2	1	6	7	4	5
2	1	3	5	4	7	6
7	6	5	4	3	2	1
6	7	4	3	5	1	2
5	4	7	2	1	6	3
4	5	6	1	2	3	7

Figur 6

### 3. Das Transversalverfahren

#### 3.1 Satz

Aus einem gegebenen  $S(k, v)$  lässt sich durch Anwendung des Transversalverfahrens ein  $S(k, kv)$  konstruieren, falls es  $TD[k, v]$  gibt.

3.1.1 Transversaldesigns  $TD [k, v]$

a) *Definition*

Gegeben seien  $k$  paarweise disjunkte Punktmengen  $S_i$  jeweils mit der Mächtigkeit  $v$ . Durch zwei Punkte in ein und derselben dieser Punktmengen gebe es keine, durch zwei Punkte aus verschiedenen dieser Punktmengen dagegen genau eine Gerade (Transversale) mit jeweils genau  $k$  Punkten. Jedes solche System ist ein (spezielles) Transversaldesign. Wir schreiben dafür kurz  $TD [k, v]$ . Diese Struktur enthält nach dem Gesagten insgesamt  $\bar{v} = kv$  Punkte und  $b_2 = v^2$  Geraden.

b) *Konstruktion*

Wir nehmen jetzt an, es gebe  $k-2$  MOLS( $v$ ), also  $k-2$  Quasigruppen zu je  $v$  Elementen. Die  $k-2$  dabei auftretenden Operationen bezeichnen wir mit  $\circ_i$ , wobei  $i \in \{1, \dots, k-2\}$ . Mit diesen Quasigruppen konstruieren wir jetzt ein  $TD [k, v]$ .

Punkte:  $P = \{1, \dots, v\} \times \{1, \dots, k\}$ , also  $|P| = vk$ .

Wir können auch schreiben

$$P = \{xi | x \in \{1, \dots, v\}, i \in \{1, \dots, k\}\}$$

und entsprechend

$$S_i = \{xi | x \in \{1, \dots, v\}\}.$$

Geraden: Jede Punktmenge  $\{x1, y2, (x \circ_1 y)3, \dots, (x \circ_{k-2} y)k\}$

mit  $x, y \in \{1, \dots, v\}$  heisst Gerade. Es gibt also insgesamt  $v^2$  Geraden.

c) *Beispiel  $TD [4,4]$*

Die Quasigruppen:

Unter Verwendung von zwei MOLS(4) erhalten wir zwei Quasigruppen

$\circ_1$		1	2	3	4
1		1	2	3	4
2		2	1	4	3
3		3	4	1	2
4		4	3	2	1

$\circ_2$		1	2	3	4
1		1	2	3	4
2		3	4	1	2
3		4	3	2	1
4		2	1	4	3

Die Punkte:  $P = \{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ .

Explizit geschrieben

$$P = \{11, 21, 31, 41; 12, 22, 32, 42; 13, 23, 33, 43; 14, 24, 34, 44\}.$$

Die Geraden:  $B = \{x1, y2, (x \circ_1 y)3, (x \circ_2 y)4\}$  mit  $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Explizit geschrieben

$$B = \left\{ \begin{array}{llll} \{11, 12, 13, 14\}, & \{11, 22, 23, 24\}, & \{11, 32, 33, 34\}, & \{11, 42, 43, 44\}, \\ \{21, 12, 23, 34\}, & \{21, 22, 13, 44\}, & \{21, 32, 43, 14\}, & \{21, 42, 33, 24\}, \\ \{31, 12, 33, 44\}, & \{31, 22, 43, 34\}, & \{31, 32, 13, 24\}, & \{31, 42, 23, 14\}, \\ \{41, 12, 43, 24\}, & \{41, 22, 33, 14\}, & \{41, 32, 23, 44\}, & \{41, 42, 13, 34\} \end{array} \right\}$$

3.1.2 Das Konstruktionsverfahren

Wir starten mit dem in 3.1.1 konstruierten  $TD [k, v]$ . Damit haben wir bereits  $\bar{v} = kv$

Punkte. Wir kennen auch schon  $b_2 = v^2$  Geraden, die *Transversalen*. Jetzt strukturieren wir die  $k$  Teilmengen  $S_i$  so, dass jeweils ein zum gegebenen System  $S(k, v)$  isomorphes entsteht: In der Sprechweise von 2.2.2 handelt es sich um Etagensysteme. Die Transversalen bleiben bei diesem Strukturierungsvorgang unverändert. So erhalten wir weitere  $b_3 = kb_1 = k \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$ , also insgesamt  $\bar{b} = b_2 + b_3 = v^2 + k \frac{v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(vk-1)}{k-1}$  Geraden.

### 3.1.3 Beweis des Satzes 3.1

Bezeichnen wir die charakteristischen Größen in unserer neuen Struktur wieder wie in 2.1.2, so erhalten wir mit unserer Konstruktion sofort

$$\bar{k} = k, \quad \bar{v} = kv, \quad \bar{b} = \frac{\bar{v}(\bar{v}-1)}{\bar{k}(\bar{k}-1)}.$$

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, dass durch jeden Punkt innerhalb des zugeordneten Etagensystems genau  $\frac{v-1}{k-1}$  und in  $TD[k, v]$  genau  $v$  Geraden, also insgesamt genau  $\bar{r} = \frac{v-1}{k-1} + v = \frac{vk-1}{k-1} = \frac{\bar{v}-1}{\bar{k}-1}$  gehen.

Weiter gibt es durch zwei Punkte genau eine Gerade. Liegen nämlich die beiden Punkte in ein und demselben Etagensystem, so ist dies die Gerade aus diesem System, im anderen Falle die Transversale in  $TD[k, v]$ . Damit ist nachgewiesen, dass unsere neue Struktur ein Steiner-System  $S(k, kv)$  ist.

### 3.1.4 Beispiel

Mit dem in 3.1.1 c) konstruierten  $TD[4, 4]$  lässt sich aus  $S(4, 4)$  ein  $S(4, 16)$  gewinnen. Allerdings ist dieses Beispiel trivial, da jedes Etagensystem nur aus genau einer Geraden besteht, also besonders einfach strukturiert ist. Es ergibt sich die affine Ebene  $AG(2, 4)$ .

## 3.2 Bemerkungen

### 3.2.1 $v$ Primzahlpotenz

Ist  $v$  Primzahlpotenz, so existieren [3] stets  $v-1$  MOLS( $v$ ). Nimmt man weiter  $k \leq v+1$  an, so gibt es jedenfalls  $k-2$  MOLS( $v$ ). Also lässt sich ein  $TD[k, v]$  und damit dann aus  $S(k, v)$  stets ein  $S(k, kv)$  mit  $k$  Etagensystemen konstruieren.

### 3.2.2 Einhängssysteme

Es kann durchaus sein, dass es in einem nach dem Transversalverfahren konstruierten System  $S(k, kv)$  neben den  $k$  Etagensystemen auch noch  $\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$  Einhängssysteme  $S(k, k^2)$  – etwa wie in 2.2.2 – gibt.

Nehmen wir an, dem wäre immer so. Dann müssten nach der Bemerkung in 2.3.2 notwendig alle zu den verwendeten lateinischen Quadraten gehörenden Quasigruppen kommutativ sein. Diese Voraussetzung aber ist im allgemeinen nicht erfüllt. Denn für alle Ordnungen  $v > 2$  lassen sich nicht-kommutative Quasigruppen konstruieren.

#### 4. Vergleich der beiden Konstruktionsverfahren

In beiden Fällen wird die Existenz eines Systems  $S(k, v)$  vorausgesetzt. Mit Einhängssystemen  $S(k, k^2)$  lassen sich nach dem *Parallelverfahren* Systeme  $S(k, kv)$  konstruieren. Die sich ergebenden Systeme können neben den  $\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$  Einhängssystemen auch noch  $k$  «Etagensysteme» enthalten, müssen dies aber nicht. Tun sie es, so erhalten wir  $k-2$  MOLS( $v$ ).

Kennt man umgekehrt  $k-2$  MOLS( $v$ ), so lassen sich nach dem *Transversalverfahren* mit Etagensystemen  $S(k, v)$  ebenfalls Systeme  $S(k, kv)$  konstruieren. Die erhaltenen Systeme können neben den  $k$  Etagensystemen auch noch  $\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$  Einhängssysteme enthalten, müssen dies aber nicht. Schon aus diesen Feststellungen folgt, dass die aus  $S(k, v)$  mit den beiden Verfahren konstruierten Systeme  $S(k, kv)$  im allgemeinen nicht isomorph zueinander sind.

#### 5. Schluss

In einer interessanten Arbeit [6] untersucht F. Wille die Bedeutung der Anschauung für die Mathematik. Dabei ist auch von einer sogenannten *Pseudo-Anschauung* die Rede. Bei ihr bedient man sich *unscharfer Vorstellungen*. Doch auch sie – so wird behauptet – sind als Denkhilfen für den Mathematiker von allergrösstem Wert.

Inhalt der vorliegenden Arbeit war es nun nicht, völlig neuartige Konstruktionsverfahren für Steiner-Systeme aufzuzeigen. Es ging vielmehr darum, bekannte [1, 2, 4] Konstruktionen durch einen *Pseudoprojektionsvorgang* möglichst suggestiv zu veranschaulichen. Da werden Transversalen aus einem  $TD[k, v]$  plötzlich zu *Projektionsgeraden*. Man sieht auf einmal, wie sich Systeme  $S(k, k^2)$  einhängen lassen. Es gibt mysteriöse *Etagensysteme*, die auch noch irgendwie hochziehbar sind.

Insgesamt handelt es sich um Vorstellungen, die eigentlich gar nicht exakt zutreffen, die also letztlich nur im Kopf des Mathematikers existieren. Man darf sich auf Vorstellungen dieser Art sicher nicht völlig verlassen. Sie lenken aber und leiten, ja sie führen sogar manchmal zu neuen Ergebnissen.

H. Zeitler, Bayreuth

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 T. Beth, D. Jungnickel und H. Lenz: Design Theorie. Erscheint.
- 2 R. C. Bose und S. S. Shrikhande: On the composition of balanced incomplete block designs. Can. J. Math. 12, 177–188 (1960).
- 3 M. Hall: Combinatorial Theory. New York (1967).
- 4 H. Hanani: The existence and construction of balanced incomplete block designs. Am. Math. Stat. 32, 361–386 (1961).
- 5 C. C. Lindner: A survey of embedding theorems for Steiner Systems. Ann. Discr. Math. 7, 175–202 (1980).
- 6 F. Wille: Die mathematische Anschauung: ihre Ziele, Möglichkeiten und Techniken. In: H. Kautschitsch, W. Metzler (Hrsg.): Visualisierung in der Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Universität Klagenfurt, Vol. 6, S. 35–78 (1982).
- 7 H. Zeitler: Konstruktion spezieller Steiner-Tripel-Systeme. Math. Phys.-Sem. Ber. 21, 206–233 (1974).
- 8 H. Zeitler: Zur Konstruktion von Steiner-Systemen. Erscheint in Math. Sem. Ber.