Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen

Autor(en): **Buchta, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37199

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über die konvexe Hülle von Zufallspunkten in Eibereichen

Es bezeichne $V_n^{(d)}(K)$ den Erwartungswert des Volumens der konvexen Hülle von n Punkten, die zufällig nach der Gleichverteilung und unabhängig voneinander in einem (eigentlichen) d-dimensionalen konvexen Körper K gewählt werden.
Explizite Werte von $V_n^{(d)}(K)$ für $d=2$ und beliebiges n sind nur in den Fällen bekannt, dass K ein Polygon [1] oder eine Ellipse [2] ist. Beispielsweise gilt:

K (Flächeninhalt 1)	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
Dreieck	$\frac{1}{12}$ $=0{,}08333$	$\frac{1}{6}$ $=0{,}16667$	$\frac{43}{180}$ $=0{,}23889$	$\frac{3}{10}$ $=0{,}30000$
Parallelogramm	$\frac{11}{144}$ $=0{,}07639$	$\frac{11}{72}$ $=0{,}15278$	$\frac{79}{360}$ $=0{,}21944$	$\frac{199}{720}$ $=0{,}27639$
Reguläres Sechseck	$\frac{289}{3888}$ $=0{,}07433$	$\frac{289}{1944}$ $=0{,}14866$	$\frac{149347}{699840}$ $=0{,}21340$	$\frac{62647}{233280}$ $=0{,}26855$
Kreis oder Ellipse	$\frac{35}{48\pi^2}$ $=0{,}07388$	$\frac{35}{24\pi^2}$ $=0{,}14776$	$\frac{175}{72\pi^2}-\frac{23023}{6912\pi^4}$ $=0{,}21207$	$\frac{175}{48\pi^2}-\frac{23023}{2304\pi^4}$ $=0{,}26682$

Für $d=3$ und beliebiges n kennt man $V_n^{(d)}(K)$ nur für die Ellipsoide [2]; die ersten nichttrivialen Werte sind:

K (Volumen 1)	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
Kugel oder Ellipsoid	$\frac{9}{715}$ $=0{,}01259$	$\frac{9}{286}$ $=0{,}03147$	$\frac{3105}{58786}$ $=0{,}05282$	$\frac{531}{7106}$ $=0{,}07473$

In höheren Dimensionen ist bisher anscheinend nur der Spezialfall $n=d+1$ für die Ellipsoide gelöst worden:

$$V_d^{(d-1)}(K)=\frac{1}{2^{d-1}}\binom{d}{d/2}^d\binom{d^2}{d^2/2}^{-1}V(K),$$

wobei $V(K)$ das Volumen des Ellipsoids K bezeichnet. Für gerades d ist also $V_d^{(d-1)}(K)/V(K)$ rational und für ungerades d wegen $(m-1/2)!=\sqrt{\pi}\,(2m)!/2^{2m}m!$ ein rationales Vielfaches von $\pi^{-(d-1)}$. Dieses schöne Resultat stammt von Kingman [7]. Weiteres hat Groemer [3, 4] nachgewiesen, dass $V_n^{(d)}(K)$ bei festem d und festem n genau dann sein Minimum unter allen konvexen Körpern K gleichen Volumens annimmt, wenn K ein Ellipsoid ist. Einen Überblick über verwandte Resultate findet man bei Gruber [5], Kendall und Moran [6], Klee [8] und Reed [9].

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass für beliebige ebene konvexe Körper K

$$V_4^{(2)}(K) = 2\, V_3^{(2)}(K)$$

und für beliebige dreidimensionale konvexe Körper K

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2}\, V_4^{(3)}(K)$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Es sei K ein ebener konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_4^{(2)}(K) = 2\, V_3^{(2)}(K).$$

Beweis: O.B.d.A. sei der Flächeninhalt von K gleich 1. Es bezeichne $E_{n+1}^{(2)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser Punkte Eckpunkt von H_{n+1} ist, stimmt mit der Wahrscheinlichkeit überein, dass dieser Punkt nicht in der konvexen Hülle H_n der übrigen n Punkte liegt, was mit Wahrscheinlichkeit $1 - V_n^{(2)}(K)$ der Fall ist. Da alle Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt $E_{n+1}^{(2)}(K) = (n+1)\left(1 - V_n^{(2)}(K)\right)$ beziehungsweise

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{1}{n+1}\, E_{n+1}^{(2)}(K).$$

Die Anzahl der Eckpunkte von H_{n+1} ist zugleich die Anzahl der Seiten von H_{n+1}. Die Verbindungsstrecke P_1P_2 zweier Zufallspunkte P_1 und P_2 ist Seite von H_{n+1}, wenn alle übrigen $n-1$ Punkte auf ein und derselben Seite der Gerade $g(P_1, P_2)$ durch P_1 und P_2 liegen, was mit Wahrscheinlichkeit $\tilde{V}^{n-1} + (1-\tilde{V})^{n-1}$ der Fall ist, wobei $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2)$ den durch $g(P_1, P_2)$ abgetrennten kleineren Flächeninhalt bezeichnet. (Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Punkte auf einer Gerade liegen, ist null.) Da es $\binom{n+1}{2}$ Möglichkeiten gibt, aus $n+1$ Punkten zwei auszuwählen, und die Punkte unabhängig und identisch verteilt sind, folgt

$$E_{n+1}^{(2)}(K) = \binom{n+1}{2} \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-1} + (1-\tilde{V})^{n-1}]\, dP_1\, dP_2,$$

$$V_n^{(2)}(K) = 1 - \frac{n}{2} \int_K \int_K [\tilde{V}^{n-1} + (1-\tilde{V})^{n-1}]\, dP_1\, dP_2.$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir

$$V_4^{(2)}(K) = 1 - 2\int\limits_K\int\limits_K [\tilde{V}^3 + (1-\tilde{V})^3]\,dP_1\,dP_2$$

$$= 1 - 3\int\limits_K\int\limits_K \left[\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2 - \frac{1}{3}\right] dP_1\,dP_2$$

$$= 2\left(1 - \frac{3}{2}\int\limits_K\int\limits_K [\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2]\,dP_1\,dP_2\right)$$

$$= 2\,V_3^{(2)}(K).$$

Satz 2. *Es sei K ein dreidimensionaler konvexer Körper. Dann gilt:*

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{5}{2}\,V_4^{(3)}(K).$$

Beweis: Wir nehmen wieder o.B.d.A. an, dass das Volumen von K gleich 1 ist. Es bezeichne $E_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Eckpunktanzahl und $F_{n+1}^{(3)}(K)$ den Erwartungswert der Facettenanzahl der konvexen Hülle H_{n+1} von $n+1$ in K zufällig und unabhängig voneinander gewählten Punkten. Ähnlich wie im Beweis von Satz 1 zeigt man

$$V_n^{(3)}(K) = 1 - \frac{1}{n+1}\,E_{n+1}^{(3)}(K),$$

$$F_{n+1}^{(3)}(K) = \binom{n+1}{3}\int\limits_K\int\limits_K\int\limits_K [\tilde{V}^{n-2} + (1-\tilde{V})^{n-2}]\,dP_1\,dP_2\,dP_3,$$

wobei $\tilde{V} = \tilde{V}(P_1, P_2, P_3)$ das Volumen des durch die Ebene durch P_1, P_2 und P_3 von K abgetrennten kleineren Teils bezeichnet. Da H_{n+1} fast sicher simplizial ist, beträgt die Kantenanzahl fast sicher das 3/2-fache der Facettenanzahl. Aus der Eulerschen Polyederformel folgt daher

$$E_{n+1}^{(3)}(K) = \frac{1}{2}\,F_{n+1}^{(3)}(K) + 2,$$

und wir erhalten

$$V_n^{(3)}(K) = 1 - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\,F_{n+1}^{(3)}(\mathrm{K}) + 2\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{(n-1)n}{12}\int\limits_K\int\limits_K\int\limits_K [\tilde{V}^{n-2} + (1-\tilde{V})^{n-2}]\,dP_1\,dP_2\,dP_3.$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich

$$V_5^{(3)}(K) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \int_K \int_K \int_K [\tilde{V}^3 + (1-\tilde{V})^3]\, dP_1\, dP_2\, dP_3$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{5}{2} \int_K \int_K \int_K \left[\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2 - \frac{1}{3}\right] dP_1\, dP_2\, dP_3$$

$$= \frac{5}{2} \left(\frac{3}{5} - \int_K \int_K \int_K [\tilde{V}^2 + (1-\tilde{V})^2]\, dP_1\, dP_2\, dP_3\right)$$

$$= \frac{5}{2} V_4^{(3)}(K).$$

C. Buchta, Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien

LITERATURVERZEICHNIS

1 C. Buchta: Zufallspolygone in konvexen Vielecken. J. reine angew. Math., im Druck.
2 C. Buchta: Das Volumen von Zufallspolyedern im Ellipsoid. Eingereicht.
3 H. Groemer: On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set. Pacific J. Math. *45*, 525-533 (1973).
4 H. Groemer: On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set. Arch. Math. *25*, 86-90 (1974).
5 P.M. Gruber: Approximation of convex bodies. In: P.M. Gruber, J.M. Wills, ed.: Convexity and its applications. Birkhäuser, Basel 1983.
6 M.G. Kendall und P.A.P. Moran: Geometrical probability. Griffin, London 1963.
7 J.F.C. Kingman: Random secants of a convex body. J.Appl. Prob. *6*, 660-672 (1969).
8 V. Klee: What is the expected volume of a simplex whose vertices are chosen at random from a given convex body? Am. Math. Monthly *76*, 286-288 (1969).
9 W.J. Reed: Random points in a simplex. Pacific J. Math. *54*, 183-198 (1974).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/060153-04$1.50+0.20/0