

Integralungleichungen aus der Hilbertraum-Theorie

Autor(en): **Abel, U.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-37198>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bezeichnet man mit $\tilde{\omega}_p$ die kleinste positive Primitivwurzel mod p , so gilt offensichtlich

$$F(r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 1 \leq r \leq \tilde{\omega}_p - 1 \\ 1, & \text{wenn } r = \tilde{\omega}_p \\ 0, & \text{wenn } \tilde{\omega}_p + 1 \leq r \leq p \end{cases}.$$

Daraus folgt aber

$$\tilde{\omega}_p = \sum_{r=2}^{p-1} r F(r). \quad (4)$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich schliesslich die Behauptung des Satzes.

Zur *praktischen* Berechnung einer Primitivwurzel mod p ist die Formel (1) nicht geeignet. Vom *theoretischen* Standpunkt aus betrachtet, kann aber aufgrund von (1) die Frage nach der Existenz eines systematischen Rechenverfahrens zur Bestimmung einer Primitivwurzel mod p im positiven Sinne entschieden werden.

Horst Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 A. Ecker: On primitive roots. El. Math. 37, 103–108 (1982).
- 2 H. Hasse: Vorlesungen über Zahlentheorie. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
- 3 K.-H. Indlekofer: Zahlentheorie. Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1978.
- 4 D. Shanks: Solved and unsolved Problems in Number Theory, Vol. I. Washington 1962.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/060142-03\$1.50 + 0.20/0

Integralungleichungen aus der Hilbertraum-Theorie

In [3], S. 62, wird folgende Aufgabe gestellt:

Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ sei stetig differenzierbar, und es gelte $f(0) = f(1) = 0$. Man zeige

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

Der Aufgabensteller verallgemeinert das Problem in [4], S. 380–381, Aufgabe P. 326: Es sei f eine reellwertige n -mal stetig differenzierbare Funktion auf $[0, 1]$ mit $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Man zeige

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq (n!)^2 (2n+1)^{-1} ((2n)!)^{-2} \int_0^1 [f^{(n)}(x)]^2 dx$$

mit Gleichheit genau für $f(x) = c x^n (x - 1)^n$.

In dieser Note wollen wir einige grundlegende Elemente der Hilbertraum-Theorie zusammenstellen, die uns in die Lage versetzen, Ungleichungen vom obigen Typ zu beweisen.

Durch Anwendung dieser Hilfsmittel auf konkrete Räume integrierbarer Funktionen ergeben sich neben neuen Ungleichungen interessante Beziehungen zwischen den jeweiligen Orthogonalpolynomen und Gram-Determinanten.

1. Hilfsmittel aus der Hilbertraum-Theorie

Es sei H ein Vektorraum mit Skalarprodukt (x, y) für $x, y \in H$ (siehe z. B. [2], S. 79). Die Norm von $x \in H$ sei die vom Skalarprodukt induzierte $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. Weiterhin sei x_0, x_1, x_2, \dots eine Folge in H derart, dass jede endliche Teilmenge x_0, x_1, \dots, x_k linear unabhängig ist.

Nach dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren (siehe [1], S. 165–166, Theorem 8.3.3) gewinnt man aus Linearkombinationen der x_k durch die rekursive Vorschrift

$$x_0^* = \frac{x_0}{\|x_0\|}, \quad x_n^* = \frac{y_n}{\|y_n\|} \quad \text{mit}$$

$$y_n = x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

eine orthonormale Folge $x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots$ aus H , d. h. es gilt $(x_i^*, x_j^*) = \delta_{ij}$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$). Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

Satz 1.1. *Für alle Elemente $w \in H$ mit $(w, x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) (d. h. w ist orthogonal auf dem Unterraum $\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$) gilt die Ungleichung*

$$|(w, x_n)| \leq C_n \|w\| \tag{2}$$

mit $C_n = \min_{b_0, \dots, b_{n-1}} \|x_n - b_{n-1} x_{n-1} - \dots - b_0 x_0\|$.

Die Konstante C_n ist bestmöglich, und Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn $w = c x_n^*$, d. h. ein Vielfaches des n -ten durch Orthonormalisierung mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren gewonnenen Elementes x_n^* ist.

Beweis: Nach Voraussetzung und unter Berücksichtigung von

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle = \langle x_0^*, x_1^*, \dots, x_{n-1}^* \rangle$$

gilt für alle Zahlen $b'_0, b'_1, \dots, b'_{n-1}$

$$(w, x_n) = (w, x_n - b'_{n-1} x_{n-1}^* - \dots - b'_0 x_0^*),$$

und eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung liefert

$$|(w, x_n)| \leq \|x_n - b'_{n-1} x_{n-1}^* - \dots - b'_0 x_0^*\| \cdot \|w\|. \quad (3)$$

Nach bekannten Sätzen der Approximationstheorie in Hilberträumen (siehe [1], S. 171–172, Theorem 8.5.1 und Korollar 8.5.2) gilt

$$\left\| x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \right\| \leq \left\| x_n - \sum_{k=0}^{n-1} b'_k x_k^* \right\| \quad (4)$$

für alle Zahlen $b'_0, b'_1, \dots, b'_{n-1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $b'_k = (x_n, x_k^*)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) die Fourierkoeffizienten von x_n sind. Damit wird das

$$\min_{b_0, \dots, b_{n-1}} \|x_n - b_{n-1} x_{n-1} - \dots - b_0 x_0\|$$

tatsächlich angenommen, und die Ungleichung (2) ist bewiesen, wobei

$$C_n = \left\| x_n - \sum_{k=0}^{n-1} (x_n, x_k^*) x_k^* \right\|$$

die bestmögliche Konstante ist.

Ein Vergleich von (4) und (1) ergibt unmittelbar $C_n = \|y_n\|$. Stellen wir x_n^* dar als Linearkombination $x_n^* = \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k$, so gilt nach (1) für den Leitkoeffizienten $a_{nn} = \|y_n\|^{-1}$, und wir erhalten

$$C_n = \frac{1}{a_{nn}}. \quad (5)$$

Gleichheit gilt in der Ungleichung

$$|(w, x_n)| = |(w, y_n)| \leq \|y_n\| \cdot \|w\|$$

genau dann, wenn w und y_n linear abhängig sind (siehe [1], S. 159, Theorem 8.1.1), d. h. wenn $w = c' y_n = c x_n^*$ gilt.

Damit ist Satz 1.1 in allen Teilen bewiesen.

Bezeichnen wir mit g_n die Determinante der Gram-Matrix

$$G_n = \begin{pmatrix} (x_0, x_0) & (x_0, x_1) & \dots & (x_0, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_0) & (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_n) \end{pmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

so gilt nach [1], S. 183, Korollar 8.7.6, die Darstellung

$$x_0^* = g_0^{-1/2} x_0,$$

$$x_n^* = (g_{n-1} g_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} (x_0, x_0) & (x_1, x_0) & \dots & (x_n, x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_0, x_{n-1}) & (x_1, x_{n-1}) & \dots & (x_n, x_{n-1}) \\ x_0 & x_1 & & x_n \end{vmatrix} \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Durch Entwickeln der Determinante nach der letzten Zeile erkennt man, dass für den Leitkoeffizienten a_{nn}

$$a_{00} = g_0^{-1/2}, \quad a_{nn} = \sqrt{\frac{g_{n-1}}{g_n}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

gilt (vgl. [5], Problem E2863).

Also erhalten wir nach (5) für die optimale Konstante C_n in der Ungleichung (2) die Beziehung

$$C_0 = g_0^{1/2}, \quad C_n = \sqrt{\frac{g_n}{g_{n-1}}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Für die Gram-Determinante ergibt ein Induktionsschluss

$$g_n = \prod_{k=0}^n \frac{1}{a_{kk}^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{6}$$

Im folgenden werden wir die oben zusammengestellten allgemeinen Ergebnisse auf einige Räume integrierbarer Funktionen mit Skalarprodukten der Gestalt

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$$

mit einer Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ anwenden.

Das System linear unabhängiger Funktionen x_0, x_1, x_2, \dots sei jeweils die Menge der Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ auf dem Intervall (a, b) .

2. Der Fall $a, b \in \mathbf{R}, w(x) \equiv 1$

Wir erhalten folgenden Satz:

Satz 2.1. *Es sei $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Dann gilt*

$$\left| \int_a^b x^n f(x) dx \right| \leq C_n \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

wobei

$$C_n = \sqrt{\frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}}$$

die bestmögliche Konstante ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$f(x) = c \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)(x-b)]^n$$

ist.

Wählt man eine n -mal differenzierbare Funktion h mit $h^{(n)}(x) = f(x)$ und $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), so ergibt k -malige partielle Integration

$$\int_a^b h^{(j)}(x) dx = \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^b x^k h^{(j+k)}(x) dx$$

($j = 0, 1, \dots, n-1$; $k = 0, 1, \dots, n-j$), und Satz 2.1 ist äquivalent zu

Satz 2.2. Es sei h n -mal differenzierbar und $h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Dann gilt

$$\left| \int_a^b h(x) dx \right| \leq \hat{C}_n \left(\int_a^b |h^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

wobei

$$\hat{C}_n = \sqrt{\frac{(n!)^2 (b-a)^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}}$$

die bestmögliche Konstante ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $h(x) = c(x-a)^n(x-b)^n$ ist.

Wir verzichten auf die Anwendung von Satz 1.1 und beweisen Satz 2.2 ohne direkte Verwendung der entsprechenden Orthogonalpolynome.

Beweis zu Satz 2.2: Nach Voraussetzung erhalten wir durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung für alle Polynome P vom höchstens $(n-1)$ -ten Grade

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b h(x) dx \right| &= (n!)^{-1} \left| \int_a^b x^n h^{(n)}(x) dx \right| \\ &= (n!)^{-1} \left| \int_a^b [x^n - P(x)] h^{(n)}(x) dx \right| \\ &\leq (n!)^{-1} \left(\int_a^b |x^n - P(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |h^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau für die Funktionen $h_0^{(n)}(x) = c' [x^n - P(x)]$, d.h. $h_0^{(n)}$ ist ein Polynom vom Grad n . Es folgt, dass h_0 ein Polynom vom Grad $2n$ ist, das an a und b n -fache Nullstellen besitzt. Also muss $h_0(x) = c(x-a)^n(x-b)^n$ gelten.

Für die Konstante \hat{C}_n ergibt sich somit

$$\hat{C}_n = \left| \int_a^b h_0(x) dx \right| \cdot \left(\int_a^b |h_0^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{-1/2}.$$

Nach einigen kleinen Umformungen erhält man

$$\int_a^b h_0(x) dx = c \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx = (-1)^n c (b-a)^{2n+1} B(n+1, n+1)$$

mit der Eulerschen Betafunktion $B(a+1, \beta+1) :=$

$$\int_0^1 x^a (1-x)^\beta dx = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(a+\beta+2)} \quad \text{sowie}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b |h_0^{(n)}(x)|^2 dx &= (-1)^n \int_a^b \overline{h_0(x)} h_0^{(2n)}(x) dx = (-1)^n \bar{c} c (2n)! \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx \\ &= |c|^2 (b-a)^{2n+1} (2n)! B(n+1, n+1) \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \hat{C}_n &= ((2n)!)^{-1/2} (b-a)^{n+1/2} [B(n+1, n+1)]^{1/2} \\ &= n! (b-a)^{n+1/2} [(2n)! (2n+1)!]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Damit ist sowohl Satz 2.2 als auch Satz 2.1 bewiesen.

Aus obigem Beweis erhalten wir direkt eine Formel für die zugehörigen Orthogonalpolynome $P_n^{ON}(x) = \sum_{j=0}^n a_{nj} x^j$. Da $h_0^{(n)}(x)$ den Leitkoeffizienten $c(2n)!/n!$ hat, gilt nach Satz 1.1 und (5)

$$\begin{aligned} P_n^{ON}(x) &= a_{nn} \frac{n!}{c(2n)!} h_0^{(n)}(x) = \frac{1}{C_n} \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)(x-b)]^n \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}}{n! (b-a)^{n+1/2}} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)(x-b)]^n. \end{aligned}$$

Im Spezialfall $a = -1$ und $b = 1$ ist dies die bekannte Formel von Rodrigues für die Legendrepolynome

$$P_n^{ON}(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{n! 2^{n+1/2}} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n].$$

(In der Literatur werden die Legendrepolynome P_n^{Leg} üblicherweise durch $P_n^{\text{Leg}}(x) = \sqrt{2/(2n+1)} P_n^{\text{ON}}(x)$ definiert.)

Wegen

$$(x^i, x^j) = \int_a^b x^{i+j} dx = \frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

ist nach (6) und (5)

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{b^{i+j+1} - a^{i+j+1}}{i+j+1} \right)_{i,j=0,\dots,n} &= \prod_{k=0}^n C_k^2 = \prod_{k=0}^n \frac{(k!)^4 (b-a)^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)!} \\ &= \frac{(n!!)^4}{(2n+1)!!} (b-a)^{n^2+2n+1}, \end{aligned}$$

wobei $n!! := 1!2!3! \dots n!$ gesetzt wird.

Speziell für $a=0$ und $b=1$ ergibt dies die interessante Determinantenformel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/(n+1) & \dots & \dots & \dots & 1/(2n+1) \end{vmatrix} = \frac{(n!!)^4}{(2n+1)!!}.$$

Sie ist ein Spezialfall der Determinantenformel von Cauchy (siehe [1], S. 268–269, Lemma 11.3.1).

3. Der Fall $a=0, b=+\infty, w(x) = x^\alpha e^{-x} (\alpha > -1)$

Durch Orthogonalisierung der Monome erhält man die verallgemeinerten Laguerre-Polynome

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}].$$

Beachtet man

$$\int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},$$

so ergeben sich die Orthonormalpolynome

$$P_n^{\text{ON}}(x) = \frac{(-1)^n (n!)^{1/2}}{\sqrt{\Gamma(n+\alpha+1)}} L_n^{(\alpha)}(x)$$

mit dem Leitkoeffizienten $a_{nn} = (\Gamma(n+a+1)n!)^{-1/2}$. Somit erhalten wir als Folgerung aus Satz 1.1 und (5):

Satz 3.1. *Es sei $\int_0^\infty x^{k+a} e^{-x} f(x) dx = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Dann gilt*

$$\left| \int_0^\infty x^{n+a} e^{-x} f(x) dx \right| \leq C_n \left(\int_0^\infty x^a e^{-x} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

wobei $C_n = \sqrt{n! \Gamma(n+a+1)}$ die bestmögliche Konstante ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(x) = c L_n^{(a)}(x)$ ist.

Wegen

$$(x^i, x^j) = \int_0^\infty x^{i+j+a} e^{-x} dx = \Gamma(i+j+a+1)$$

erhält man für die Gram-Determinante

$$\det (\Gamma(i+j+a+1))_{i,j=0,\dots,n} = \prod_{k=0}^n [k! \Gamma(k+a+1)].$$

Insbesondere gilt für eine natürliche Zahl a

$$\det ((i+j+a)!)_{i,j=0,\dots,n} = \prod_{k=0}^n [k! (k+a)!]$$

und für $a = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1! & 2! & \dots & n! \\ 1! & 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & \dots & \dots & \dots & (2n)! \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^n (k!)^2 = (n!)^2.$$

4. Der Fall $a = -\infty, b = +\infty, w(x) = e^{-x^2}$

Durch Orthogonalisierung der Monome erhält man die Hermite-Polynome

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Beachtet man

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_n(x)|^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n!,$$

so ergeben sich die Orthonormalpolynome

$$P_n^{ON}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} H_n(x)$$

mit dem Leitkoeffizienten

$$a_{nn} = \sqrt{\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}}}.$$

Als Folgerung aus Satz 1.1 und (5) ergibt sich:

Satz 4.1. *Es sei $\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{-x^2} dx = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). Dann gilt*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx \right| \leq C_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx \right)^{1/2},$$

wobei $C_n = \sqrt{2^{-n} n! \sqrt{\pi}}$ die bestmögliche Konstante ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(x) = c H_n(x)$ ist.

Für die Gram-Matrix erhält man mit

$$(x^i, x^j) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i+j} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} [1 + (-1)^{i+j}] \Gamma\left(\frac{i+j+1}{2}\right) \quad (i, j = 0, 1, \dots)$$

die Beziehung

$$\det((x^i, x^j))_{i,j=0,1,\dots,n} = \pi^{\frac{1}{2}(n+1)} \prod_{k=0}^n \frac{k!}{2^k}.$$

Weitere Anwendungen von Satz 1.1 auf konkrete Räume seien dem Leser überlassen. Dabei ergeben auch Skalarprodukte der Gestalt

$$(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j f(x_j) \overline{g(x_j)} \quad \text{mit } c_j \geq 0$$

interessante Ungleichungen.

Wir merken an, dass mit Hilfe von Satz 2.1 und Satz 3.1 die Aufgaben 15 und 16 aus [2], S. 99, gelöst sind.

U. Abel, Mathematisches Institut, Universität Giessen

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J.D. Davis: Interpolation and Approximation. Blaisdell Publ. Comp., 1963.
- 2 W. Rudin: Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, 1974.
- 3 H.-J. Seiffert: Aufgabe 877. El. Math. 37/2, 62 (1982).
- 4 H.-J. Seiffert: Problem P.326. Can. Math. Bull. 25/3, 380–381 (1982).
- 5 D. Shelupsky and A. Smuckler: Orthogonal Polynomials of Preassigned Degrees. Am. Math. Monthly 89/5, 337–338 (1982).