

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 4

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Schreibt man dies in der Form

$$\Delta^p \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}}, \quad H_p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_p x^p,$$

so folgt mit (1) die Gleichung

$$(1-x)^{p+1} \sum_1^{\infty} n^p x^n = H_p(x).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt  $c_0=0$  und für die übrigen  $c_n$  die von Mortini gegebene «geschlossene» Form

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{p+1}{j} (n-j)^p, \quad n = 1, 2, \dots, p.$$

Und aus

$$\begin{aligned} \frac{H_{p+1}(x)}{(1-x)^{p+2}} &= \Delta \left( \Delta^p \left( \frac{1}{1-x} \right) \right) = x \frac{d}{dx} \left( \frac{H_p(x)}{(1-x)^{p+1}} \right) \\ &= \frac{x(x-1)H'_p(x) + x(p+1)H_p(x)}{(1-x)^{p+2}} \end{aligned}$$

kann man sofort die Rekursionsformel für  $H_p$  ablesen.

Albert Pfluger, Zürich

## Aufgaben

**Aufgabe 882.** Für  $n=2$  und  $n=3$  ermittle man Lösungen  $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n}$  der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (x_i/y_i) = \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

in Gestalt zyklischer Parameterdarstellungen, d. h.:

$$x_{\sigma(i)} = f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}), \quad y_{\sigma(i)} = g(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}); \quad i = 1, \dots, n$$

für beliebige zyklische Permutationen  $\sigma$  der Indizes  $1, \dots, n$ .

I. Paasche, München, BRD

Lösung (nach den Lösungen des Aufgabenstellers sowie von Hj. Stocker, Wädenswil, von der Redaktion bearbeitet):

$n=2$ : Die gegebene Gleichung lässt sich umformen zu

$$(x_1 + x_2)(x_1 y_2 + x_2 y_1) = y_1 y_2 (y_1 + y_2).$$

Aus dem Ansatz

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 y_2$$

gewinnt man die Lösung

$$f(u_1, u_2) = u_1^2 / (u_1 - u_2), \quad g(u_1, u_2) = u_1.$$

Der Ansatz

$$x_1 + x_2 = y_1 y_2, \quad x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 + y_2$$

liefert die weitere Lösung

$$f(u_1, u_2) = (u_1^2 - u_1 - u_2) / (u_1 - u_2), \quad g(u_1, u_2) = u_1.$$

$n=3$ : Lösungsansätze liefert die Dreiecksgeometrie. So ergibt z. B. die Höhen-Berührstreckenformel

$$\sum (h_a^{-1} / s_a^{-1}) = (\sum s_a^{-1}) / (\sum h_a^{-1})$$

die folgende Lösung:

$$f(u_1, u_2, u_3) = u_1 [(u_1 + u_2 + u_3)(-u_1 + u_2 + u_3)(u_1 - u_2 + u_3)(u_1 + u_2 - u_3)]^{-1/2}$$

$$g(u_1, u_2, u_3) = (-u_1 + u_2 + u_3)^{-1}.$$

Für beliebiges  $n \in \mathbf{N}$  erhält man triviale Lösungen in der Gestalt  $f = s, g = \sqrt{n} s$ , wobei  $s$  eine in den Variablen  $u_1, \dots, u_n$  symmetrische Funktion ist.

Einen weiteren Beitrag sandte W. Janous (Innsbruck, A).

**Aufgabe 883.** Für komplexe  $z$  mit  $|z| < 1$  ist die Summe

$$\sum_{(m,n)=1} m n z^{m+n} (1 + z^{m+n}) (1 - z^{m+n})^{-3},$$

erstreckt über alle Paare  $(m, n)$  teilerfremder natürlicher Zahlen geschlossen auszuwerten.

M. Bencze, Săcele, Rumänien

**Solution:** Since

$$(t+t^2)(1-t)^{-3} = \sum_{d=1}^{\infty} d^2 t^d \quad \text{for } |t| < 1,$$

the given sum  $S$  can be rewritten as

$$\begin{aligned} S &= \sum_{(m,n)=1} m n \sum_{d=1}^{\infty} d^2 z^{md+nd} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{(p,q)=d} p q z^{p+q} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} p q z^{p+q} \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \right)^2 \\ &= z^2 (1-z)^{-4}, \end{aligned}$$

by absolute convergence for  $|z| < 1$ .

A. A. Jagers, Enschede, NL

Eine weitere Lösung sandte P. Bundschuh (Köln, BRD).

**Aufgabe 884.** Für beliebige  $x_{ik} \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$  zeige man, dass

$$\left\{ \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{ik} \right)^2 \right\}^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^m x_{ik}^2 \right)^{1/2}.$$

Z. A. L. Geöcze, Viçosa, Brasilien

**Lösung:** Mit  $\mathbf{x}_i := (x_{i1}, \dots, x_{im}) \in \mathbf{R}^m$  und der euklidischen Norm

$$\|\mathbf{x}_i\| = \left( \sum_{k=1}^m x_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

lautet die zu beweisende Ungleichung

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\|,$$

d. i. die Dreiecksungleichung für  $n$  Vektoren.

W. Janous, Innsbruck, A

Weitere Lösungen sandten U. Abel (Giessen, BRD), K. Bickel (Freiburg, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), B.C. Carlson (Ames, Iowa, USA), L. Filep (Nyiregyhaza, Ungarn), A.A. Jagers (Enschede, NL), L. Kuipers (Sierre), Kee-wai Lau (Hongkong), V.D. Mascioni (Origlio) (2 Lösungen), Chr.A. Meyer (Ittigen), A. Müller (Zürich), H.-J. Seiffert (Berlin), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/040102-02\$1.50 + 0.20/0

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Februar 1984* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68). Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44), Problem 862 A (Band 36, S.68), Problem 872 A (Band 36, S.175).

**Aufgabe 898.** Let  $f \in C^n [0, 1]$  with

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Show that for  $p \geq 1$

$$\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^p dx \geq (2n+1)^{-a} ((2n+1)!/n!)^p \left| \int_0^1 f(x) dx \right|^p$$

where  $a := \min \{1, p/2\}$ . When does equality hold?

M. S. Klamkin und A. Meir, Edmonton, CDN

**Aufgabe 899.** Es seien  $a_1, a_2, a_3$  die Innenwinkel eines ebenen Dreiecks mit Inkreisradius  $r$  und Umkreisradius  $R$ . Man zeige, dass

$$\prod_{i=1}^3 (3a_i/\pi) \geq 2r/R.$$

Wann genau steht das Gleichheitszeichen?

V. D. Mascioni, Origlio

Berichtigung zu Aufgabe 893.

(Band 38, S.24): In der ersten und vierten Zeile ist  $m$  durch  $x$  zu ersetzen. Der Passus «für  $x \not\equiv 0 \pmod{p}$ » in der zweiten Zeile ist überflüssig.