Bemerkungen zur Geometrie des Dreiecks

Autor(en): **Bockemüller, E.A. / Kleinschmidt, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **38 (1983)**

Heft 4

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37192

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Bemerkungen zur Geometrie des Dreiecks

1. Einleitung

Bei der Untersuchung der Eigenschaften von Verfolgungsbahnen und des Übertragungsverhaltens von Gelenkmechanismen ergaben sich Besonderheiten, die eng mit Sätzen über Dreiecke zusammenhängen. Im folgenden werden zwei Ergebnisse mitgeteilt.

Fällt man von einem Punkt des Umkreises die Lote auf die Dreiecksseiten, so liegen die drei Fusspunkte auf der Simsongeraden ([1, 2]). Die Gesamtheit aller Simsongeraden des Dreiecks besitzt eine dreispitzige Hypozykloide als Einhüllende (Steiners Dreispitz) mit dem Mittelpunkt des Feuerbachkreises als Zentrum. Betrachtet man die Hüllkurve als Ort der Schnittpunkte infinitesimal benachbarter Simsongeraden, so liegt es nahe, nach dem Ort der Schnittpunkte zweier Simsongeraden mit konstantem Schnittwinkel zu fragen. Im Abschnitt 2 wird die zugehörige Kurvenschar abgeleitet und untersucht.

Im Abschnitt 3 werden die Scharen gleichseitiger Dreiecke betrachtet, deren Ecken auf den verlängerten Seiten eines Basisdreiecks liegen. Die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke bilden ein Paar paralleler Geraden, die auf der Eulerschen Geraden des Basisdreiecks senkrecht stehen.

2. Verallgemeinerung des Steinerschen Dreispitzes

Satz 1. *Auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC seien zwei Punkte P_1 und P_2 mit dem Zentriwinkel δ gegeben, und es sei S der Schnittpunkt der zugehörigen Simsongeraden. Durchläuft das Punktepaar P_1P_2 bei konstantem δ den Umkreis, so beschreibt S eine verlängerte Hypozykloide. Mit δ als Parameter hat man eine Schar von verlängerten Hypozykloiden, deren Festkreisradius das Dreifache des Rollkreisradius ist. Für $\delta=\pi$ erhält man den Feuerbachkreis, für $\delta=0$ den Steinerschen Dreispitz, der zugleich Einhüllende der Schar ist.*

Zum Beweis wird eine von Dörrie [3] angegebene Darstellung für die Simsongerade w eines Punktes P zugrunde gelegt. Es seien ψ_1, ψ_2, ψ_3 und φ die Polarwinkel der Ecken A, B, C des Dreiecks und des Punktes P bezüglich einer Polarachse mit dem Umkreismittelpunkt als Pol. Die Polarachse wird so gewählt, dass

$$\psi_1+\psi_2+\psi_3=2\pi n$$

ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. In einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt des Feuerbachkreises als Ursprung, dessen x-Achse zu dieser Polarachse parallel ist, nimmt die Gleichung der Simsongeraden die Form

$$w\equiv x\sin\frac{\varphi}{2}+y\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{R}{2}\sin\frac{3}{2}\varphi$$

an, wobei R der Radius des Umkreises ist. Hieraus folgt unmittelbar wie bekannt, dass die zu P_1 und P_2 gehörenden Simsongeraden sich unter dem Winkel $\delta/2$ schneiden ([1, 4]). Sind

$$\varphi_1=\varphi+\frac{\delta}{2}, \qquad \varphi_2=\varphi-\frac{\delta}{2}$$

die zu dem Punktepaar P_1P_2 gehörenden Winkel auf dem Umkreis, so lauten die Gleichungen ihrer Simsongeraden

$$w_1\equiv x\sin\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)+y\cos\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)=\frac{R}{2}\sin\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right),$$
$$w_2\equiv x\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)+y\cos\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)=\frac{R}{2}\sin\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right).$$

Für die Koordinaten x und y des Schnittpunktes von w_1 und w_2 erhält man

$$x=\frac{R}{2\sin\delta}\left[\sin\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)-\sin\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\right],$$

$$y=\frac{R}{2\sin\delta}\left[\sin\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)-\sin\frac{3}{2}\left(\varphi+\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{\delta}{2}\right)\right]$$

oder nach elementarer Umformung, wobei sich der Nenner $\sin\delta$ weghebt,

$$x=\frac{R}{2}\left[2\cos\frac{\delta}{2}\cos\varphi+\cos2\varphi\right],$$
$$y=\frac{R}{2}\left[2\cos\frac{\delta}{2}\sin\varphi-\sin2\varphi\right].$$

Setzt man

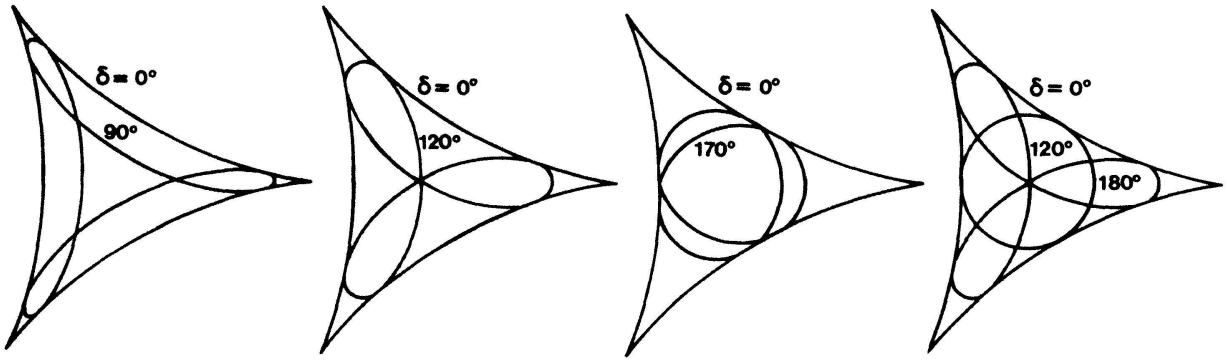
$$a=3\frac{R}{2}\cos\frac{\delta}{2}, \qquad b=\frac{R}{2}\cos\frac{\delta}{2}, \qquad c=\frac{R}{2},$$

so erhält man daraus mit

$$x=(a-b)\cos\varphi+c\cos\frac{a-b}{b}\varphi,$$
$$y=(a-b)\sin\varphi-c\sin\frac{a-b}{b}\varphi$$

die Parameterdarstellung einer verlängerten Hypozykloide mit a als Radius des Festkreises, b als Radius des erzeugenden Kreises und φ als Drehwinkel.

Fig. 1 zeigt die Kurvenschar in Abhängigkeit vom Parameter δ, wobei der Übersichtlichkeit halber das Achsenkreuz weggelassen ist. Die oben definierte x-Achse läuft durch eine der drei Spitzen des Steinerschen Dreispitzes.



Figur 1a-d. Steinerscher Dreispitz als Einhüllende der verlängerten Hypozykloiden mit dem Scharparameter δ.

Für $\delta = 0$ erhält man als Grenzfall die Steinersche dreispitzige Hypozykloide, die zugleich Einhüllende der Schar ist. Es seien nämlich

$$x_S = \frac{R}{2}(2\cos\vartheta + \cos 2\vartheta), \qquad y_S = \frac{R}{2}(2\sin\vartheta - \sin 2\vartheta)$$

und

$$x = \frac{R}{2}\left(2\cos\frac{\delta}{2}\cos\varphi + \cos 2\varphi\right), \qquad y = \frac{R}{2}\left(2\cos\frac{\delta}{2}\sin\varphi - \sin 2\varphi\right)$$

die Gleichungen des Steinerschen Dreispitzes und einer Scharkurve. Aus der Forderung, dass in den Berührungspunkten die Koordinaten und die Steigungen beider Kurven übereinstimmen, folgen drei Gleichungen, die durch die Werte

$$\vartheta = n \cdot 120° \pm \frac{\delta}{3}, \qquad \varphi = n \cdot 120° \mp \frac{\delta}{6} \qquad (n = 0, 1, 2)$$

erfüllt werden.

Für $\delta = 120°$ ergibt sich eine Kurve, bei der die drei Doppelpunkte im Mittelpunkt des Feuerbachkreises zusammenfallen. Ihre Berührungspunkte halbieren den zugehörigen Halbbogen des Steinerschen Dreispitzes, während ihre Schnittpunkte mit dem Feuerbachkreis zusammen mit denjenigen Punkten, in denen dieser den Dreispitz berührt, den Feuerbachkreis in neun gleiche Bögen teilt (siehe Fig. 1d).

Der Fall $\delta = 120°$ ist ferner durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet. Die Simsongeraden dreier Punkte, die auf dem Umkreis mit dem Winkelabstand $\delta = 120°$ aufeinander folgen, bilden ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken auf der verlängerten Hypozykloide mit $\delta = 120°$ liegen. Genau eines dieser Punktetripel besteht aus den Boutinschen Punkten, deren Simsongeraden den durch sie gehenden Umkreisradien parallel sind [2]. Ihre Lage auf dem Umkreis in dem oben definierten Koordinatensystem ist durch die Werte $\varphi_n = n \cdot 120°$ $(n = 0, 1, 2)$ bestimmt, ihre drei

Simsongeraden gehen daher durch den Mittelpunkt und die Spitzen des Steinerschen Dreispitzes.
Im Fall $\delta=\pi$, wenn also P_1 und P_2 Endpunkte eines Umkreisdurchmessers sind, geht die Scharkurve in den Feuerbachkreis über, der im Intervall $0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ zweimal durchlaufen wird. Die zugehörigen Simsongeraden schneiden sich dann auf dem Feuerbachkreis unter einem rechten Winkel [4]. Das Maximum des Abstands einer Scharkurve vom Zentrum berechnet sich zu

$$r_{\mathrm{Max}}(\delta)=\frac{R}{2}\left(1+2\cos\frac{\delta}{2}\right).$$

Daraus folgt für die drei betrachteten Fälle

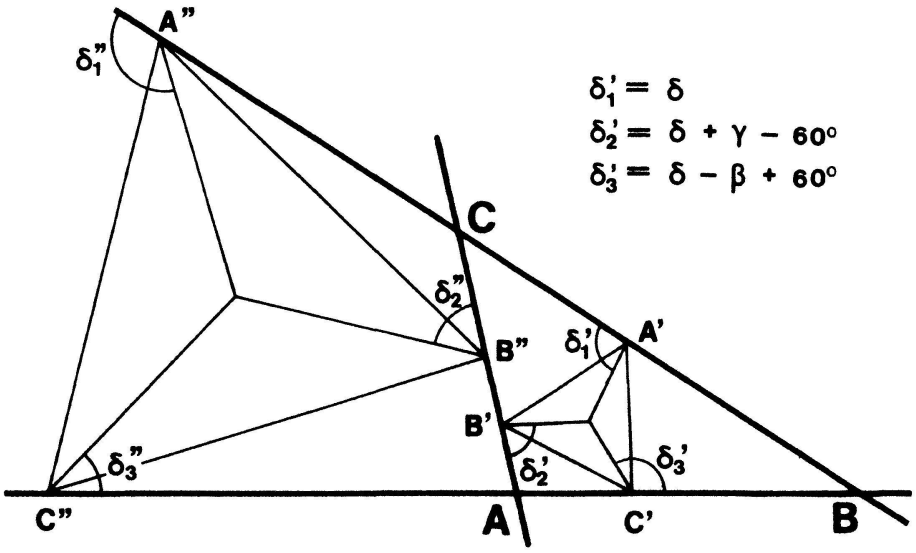
$$r_{\mathrm{Max}}(0): r_{\mathrm{Max}}\left(\frac{2\pi}{3}\right): r_{\mathrm{Max}}(\pi)=1:2:3.$$

3. Scharen gleichseitiger Dreiecke auf einem Basisdreieck

Im älteren Schrifttum werden Dreiecke untersucht, die zu einem gegebenen Dreieck in einer besonderen Beziehung stehen [1]. Unter einem Indreieck versteht man ein Dreieck, dessen Ecken auf den verlängerten Seiten eines im folgenden Basisdreieck genannten gegebenen Dreiecks liegen. Die Gesamtheit aller gleichseitigen Indreiecke weist, wie gezeigt werden soll, einige bemerkenswerte Eigenschaften auf.

Satz 2. *Die Mittelpunkte der zum Basisdreieck ABC gleichsinnig orientierten gleichseitigen Indreiecke liegen auf einer Geraden b_1, die Mittelpunkte der gegensinnig orientierten Indreiecke auf einer Geraden b_2. Die beiden Geraden sind parallel und stehen senkrecht auf der Eulerschen Geraden.*

Zum Beweis werden auf das Basisdreieck bezogene Flächenkoordinaten $t_i (i=1,2,3)$ eingeführt [5]. Es bezeichne G die Fläche des Basisdreiecks ABC. Aus Figur 2 ent-



Figur 2. Gleichseitige Indreiecke mit Mittelpunkt P und Umkreisradius r im Basisdreieck ABC; $\Delta A'B'C'$ gleichsinnig, $\Delta A''B''C''$ gegensinnig orientiert (Symbole P und r nicht eingezeichnet).

nimmt man die Koordinaten des Mittelpunktes P eines gleichsinnig orientierten gleichseitigen Indreiecks $A'B'C'$ mit dem Umkreisradius r

$$t_1(P)=\frac{r}{2G}a\sin\delta, \qquad t_2(P)=\frac{r}{2G}b\sin(\delta+\gamma-60°),$$

$$t_3(P)=\frac{r}{2G}c\sin(\delta-\beta+60°),$$

die der linearen Gleichung

$$t_1\frac{\sin(\alpha-60°)}{\sin\alpha}+t_2\frac{\sin(\beta-60°)}{\sin\beta}+t_3\frac{\sin(\gamma-60°)}{\sin\gamma}=0$$

genügen. Ist ein Winkel $60°$, so geht die durch diese Gleichung gegebene Gerade b_1 durch die zugehörige Ecke.
Man zeigt entsprechend, dass die Mittelpunkte der gegensinnig orientierten gleichseitigen Indreiecke auf der zu b_1 parallelen Geraden b_2

$$t_1\frac{\sin(\alpha+60°)}{\sin\alpha}+t_2\frac{\sin(\beta+60°)}{\sin\beta}+t_3\frac{\sin(\gamma+60°)}{\sin\gamma}=0$$

liegen. Der Trivialfall eines gleichseitigen Basisdreiecks, in dem die Geraden entarten, bleibe ausser Betracht.
Unter Verwendung kartesischer Koordinaten zeigt man, dass die Eulersche Gerade

$$t_1\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+t_2\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+t_3\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$$

auf den Geraden b_1 und b_2 senkrecht steht.
Sind ferner F und I die Mittelpunkte des Feuerbachkreises und des Inkreises und g die Gerade durch F und I, so folgt für den Winkel ψ zwischen den Eulerschen Geraden und g die Beziehung

$$\tan\psi=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{(\cos\alpha-\cos60°)(\cos\beta-\cos60°)(\cos\gamma-\cos60°)}.$$

Die Geraden b_i und g sind also parallel, wenn einer der Winkel des Basisdreiecks $60°$ ist, wobei b_1 mit g zusammenfällt.
Ein enger Zusammenhang besteht mit dem bekannten Satz, dass der Feuerbachkreis und der Inkreis sich in einem Punkt berühren. Sind nämlich B_i die Schnittpunkte von g mit $b_i (i=1,2)$, so lässt sich zeigen, dass die Umkreise der gleichseitigen Indreiecke mit B_i als Mittelpunkten Inkreis und Feuerbachkreis im gleichen Punkt berühren.
Ferner lässt sich zeigen, dass den Schnittpunkten einer Geraden mit den verlängerten Seiten eines Dreiecks ein Miquelscher Punkt [6] zugeordnet ist, der auf dem

Umkreis des Dreiecks liegt. Die Miquelschen Punkte der parallelen Geraden b_1 und b_2 liegen dann auf dem Umkreis des Basisdreiecks einander gegenüber. Ihre Simsongeraden schneiden sich daher rechtwinklig auf dem Feuerbachkreis (siehe Abschnitt 2).

E. A. Bockemüller und W. Kleinschmidt,
DFVLR, Institut für Flugmechanik, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. III, 1.2, Artikel III AB10. G. Berkhan und W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. B.G. Teubner, Leipzig 1921.
2 J. Naas und H.L. Schmid: Mathematisches Wörterbuch. Akademie-Verlag Berlin, B.G. Teubner, Stuttgart 1979.
3 H. Dörrie: Triumph der Mathematik. F. Hirt, Breslau 1940.
4 H.S.M. Coxeter und S.L. Greitzer: Geometry revisited. Random House, New York 1967.
5 H.S.M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser, Basel 1980 (zuerst erschienen als: Introduction to Geometry, Wiley, New York 1961, 1969).
6 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/83/040096-06$1.50 + 0.20/0

Kleine Mitteilungen

On a number-theoretical problem of Erdös

P. Erdös asked ([1], problem A 15) for the least prime number p for which there exist a, k_1, k_2 and k_3 such that

$$\prod_{i=1}^{k_1}(a+i)\equiv\prod_{i=1}^{k_2}(a+k_1+i)\equiv\prod_{i=1}^{k_3}(a+k_1+k_2+i)\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p), \tag{1}$$

i.e.

$$\begin{aligned}(a+k_1)!/a!&\equiv(a+k_1+k_2)!/(a+k_1)!\\&\equiv(a+k_1+k_2+k_3)!/(a+k_1+k_2)!\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p).\end{aligned} \tag{2}$$

Evidently (1) is equivalent to

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k_1}\mathrm{ind}\,(a+i)\equiv\sum_{i=1}^{k_2}\mathrm{ind}\,(a+k_1+i)&\equiv\sum_{i=1}^{k_3}\mathrm{ind}\,(a+k_1+k_2+i)\\&\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p-1).\end{aligned} \tag{3}$$

With a table of indices I found that (in the form (2))

$$5!\equiv 11!/5!\equiv 15!/11!\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,17)$$