

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 38 (1983)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Zur mittleren Anzahl von Schritten bei euklidischen Algorithmus  
**Autor:** Kilian, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-37176>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 S.S. Chern et Ch.T. Yien: Sulla formula principale cinematica dello spazio ad  $n$  dimensioni. Boll. U.M.I. (II) 2, 434–437 (1940).
- 2 E.F. Schuster: Buffon's needle experiment. Am. Math. Monthly 81, 26–29 (1974).
- 3 M.I. Stoka: Une extension du problème de l'aiguille de Buffon dans l'espace euclidien  $R_n$ . Boll. U.M.I. (IV) 10, 386–389 (1974).

© 1983 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/83/010004-08\$1.50 + 0.20/0

## Zur mittleren Anzahl von Schritten beim euklidischen Algorithmus

### 1. Einleitung

Für jedes Paar  $a, b$  natürlicher Zahlen liefert der übliche euklidische Algorithmus durch sukzessive Division eine Folge von Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a &= q_1 b + r_1 \\
 b &= q_2 r_1 + r_2 \\
 r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + r_{k+1} \\
 &\text{usw.}
 \end{aligned}$$

mit  $a \geq r_1 > r_2 > \dots > r_n = 0$ . Der grösste gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  ist dann  $r_{n-1}$  (bzw.  $b$  für  $n=1$ ). Wir bezeichnen die Anzahl  $n$  der Gleichungen bzw. Divisionsschritte bei der obigen Form des Algorithmus mit  $T(a, b)$ .  $T(a, b)$  ist bekanntlich gleichfalls die Länge des Kettenbruches  $[q_1, q_2, \dots, q_n]$  für den Bruch  $a/b$ , so dass die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus für *alle*  $a, b$  mit  $1 \leq a, b \leq N$ , also

$$T_N = \frac{1}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N T(a, b) \quad (2)$$

auch die mittlere Länge dieser Kettenbruchdarstellungen der (gemeinen) Brüche  $a/b$  mit  $1 \leq a, b \leq N$  darstellt.

Beide Mittelwerte sind offensichtlich zahlentheoretisch interessante Grössen, die mittlere Schrittzahl des euklidischen Algorithmus sogar aus praktischen Gründen: Ich selbst bin auf die Frage nach  $T_N$  gestossen bei der Vorbereitung von Schulversuchen zur Wiedereinführung von gewissen Formen des euklidischen Algorithmus, als Hilfe beim Kürzen, in den Mathematikunterricht der allgemeinbildenden Schulen. Das Interesse an dieser Fragestellung wird gleichfalls durch die Literatur der letzten Jahre [2–6] belegt. Der Beweis unseres Satzes beruht ganz wesentlich auf einem Satz von Dixon von 1970.

## 2. Elementare Eigenschaften der Funktion $T$

Wir stellen die elementaren Eigenschaften der Funktion  $T$  in dem folgenden Lemma zusammen:

**Lemma 1.** Für alle  $a, b \in \mathbb{N}$  gilt:

- (1)  $T(a, b) = 1 \Leftrightarrow b \mid a$ .
- (2)  $T(a, b) = T(b, a) + 1$  für  $a < b$ .
- (3)  $T(a, b) = T(a + b, b)$ , d.h. für festes  $b$  ist  $T(a, b)$  eine periodische Funktion von  $a$  der Periodenlänge  $b$ .
- (4)  $T(a, b) = T(a, b + a)$  für  $b > a$ , d.h. für festes  $a$  und  $b > a$  ist  $T(a, b)$  eine periodische Funktion von  $b$  der Periodenlänge  $a$ .
- (5) Die kleinste Zahl  $a$ , für die  $T(a, b)$  einen gegebenen Wert  $n \in \mathbb{N}$  annimmt, ist die  $(n + 2)$ -te Fibonacci-Zahl  $F_{n+2}$ ; dann ist weiter  $b = F_{n+1}$  ( $n \geq 2$ ).

$$\left( \text{Lamé 1845, } F_n = \frac{a^n - (-a)^{-n}}{a + a^{-1}} \text{ mit } a = (1/2)(1 + \sqrt{5}) \right)$$

$$(6) \quad 1 \leq T(a, b) \leq \frac{1 + \log a}{\log a} \quad (a \geq b).$$

(Anm.:  $a = 1.6180 \dots$ ,  $(\log a)^{-1} = 2.0780 \dots$ )

Die Beweise für (1)–(4) sind leicht zu führen. (5) folgt daraus, dass für gegebenes  $n = T(a, b)$   $a$  minimal wird für  $q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = (1/2)q_n = r_{n-1} = 1$ . (6) ergibt sich aus (5) und der Abschätzung  $F_{n+1} \geq 5^{-1/2} a^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). – Aus diesem Lemma folgt ein einfaches Verfahren, um für jedes  $n$  die  $n \times n$ -Matrix  $(T(a, b))_{a, b=1}^n$  praktisch ohne Rechnung zu gewinnen, das wir nun noch kurz beschreiben:

**Folgerung.** Man erhält die Elemente jeder  $n \times n$ -Matrix  $(T(a, b))_{a, b=1}^n$  durch folgendes Verfahren:

1. In die erste Spalte der Matrix ( $b = 1$ ), und in die Hauptdiagonale ( $a = b$ ) kommen lauter Einsen.
2. Es seien bereits die ersten  $k$  Spalten der Matrix bekannt. Dann erhält man die ersten  $k$  Elemente der  $(k + 1)$ -ten Spalte (also  $T(a, k + 1)$  für  $a = 1, 2, \dots, k$ ) nach Lemma 1 (2) durch «Spiegelung an der Hauptdiagonalen» und Addition von 1. Der Rest der  $(k + 1)$ -ten Spalte ergibt sich aus (1) und der Periodizität von  $T$ , gemäss Lemma 1 (3).

Beispiel ( $n = 8$ ):

| a \ b | b |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
|       | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1     | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2     | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| 3     | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 |
| 4     | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 3 | 4 | 2 |
| 5     | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 6     | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 |
| 7     | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 3 |
| 8     | 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 1 |

Tafel 1.  $T(a, b)$  für  $1 \leq a, b \leq 8$ .

Für das folgende brauchen wir noch das

**Lemma 2** (Dixon 1970). Zu jedem positiven  $\varepsilon$  gibt es ein  $c_0 > 0$  mit

$$|T(a, b) - \frac{12}{\pi^2} \log 2 \log a| < (\log a)^{1/2+\varepsilon} \quad (3)$$

für alle bis auf höchstens  $N^2 \exp\{-c_0(\log N)^{\varepsilon/2}\}$  der Paare  $a, b$  mit  $1 \leq b \leq a \leq N$ .

Anmerkung:  $12 \pi^{-2} \log 2 = 0.84276 \dots$ ,  $c_0$  hängt nur von  $\varepsilon$  ab. Dieses Resultat scheint ziemlich tief zu liegen und ist entsprechend schwierig zu beweisen. Als Folgerung erhält man dagegen eine erste Näherung für das asymptotische Verhalten von  $T_N$  für  $N \rightarrow \infty$  relativ leicht.

### 3. Verhalten von $T_N$ für grosse $N$

Wir beweisen den folgenden

**Satz.** Für grosse  $N$  und jedes positive  $\varepsilon$  gilt

$$T_N = \left( \frac{12}{\pi^2} \log 2 \right) \log N + O((\log N)^{1/2+\varepsilon}).$$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$T_N = \frac{12}{\pi^2} \log 2 \cdot \frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N a \log a + O((\log N)^{1/2+\varepsilon}). \quad (4)$$

Um Lemma 2 zur Abschätzung von  $T_N$  anwenden zu können, formen wir die rechte Seite von (2) nach Lemma 1 (1) und (2) so um, dass wir  $1 \leq b \leq a \leq N$  erhalten:

$$\begin{aligned} T_N &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2N} + \frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^a T(a, b) \\ &= \frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^a T(a, b) + O(1). \end{aligned}$$

Es sei nun  $D$  die Menge der Paare  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  für die  $1 \leq b \leq a \leq N$  und für welche die Abschätzung (3) von Lemma 2 gilt,  $D'$  dagegen die Menge derjenigen Paare mit  $1 \leq b \leq a \leq N$ , für die Dixons Abschätzung von  $T(a, b)$  falsch ist und für welche wir daher die allgemeine Abschätzung von Lemma 1 (6) benutzen wollen. Dann beträgt die Anzahl der Paare in  $D'$  höchstens

$$|D'| \leq N^2 \exp\{-c_0(\log N)^{\varepsilon/2}\}. \quad (5)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^a T(a, b) - \frac{12}{\pi^2} \log 2 \cdot \frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^a \log a \\
 &= \frac{2}{N^2} \sum_{(a,b) \in D} \left\{ T(a, b) - \frac{12}{\pi^2} \log 2 \log a \right\} \\
 &+ \frac{2}{N^2} \sum_{(a,b) \in D'} T(a, b) - \frac{12}{\pi^2} \log 2 \cdot \frac{2}{N^2} \sum_{(a,b) \in D'} \log a \\
 &\equiv \sum_1 + \sum_2 + \sum_3.
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 2 erhält man für den ersten Summanden  $\sum_1$  mit  $|D| \leq N^2$ :

$$|\sum_1| \leq \frac{2}{N^2} \sum_{(a,b) \in D} (\log a)^{1/2+\varepsilon} = O((\log N)^{1/2+\varepsilon}).$$

Nach Lemma 1 (6) und mit (5) erhält man für den zweiten Summanden  $\sum_2$ :

$$\begin{aligned}
 |\sum_2| &\leq \frac{2}{N^2} \sum_{(a,b) \in D'} \frac{1 + \log a}{\log a} \\
 &= O(\log N \cdot \exp\{-c_0(\log N)^{\varepsilon/2}\}) = o(1).
 \end{aligned}$$

Ebenso ist der dritte Summand  $\sum_3 = o(1)$ . Damit ist (4) bewiesen. Um schliesslich noch das asymptotische Verhalten von  $\sum_{a=1}^N a \log a$  zu bestimmen, liegt es nahe, die Euler-Maclaurinsche Formel [1]

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{2} \{f(1) + f(n)\} + \int_1^n P(t) f'(t) dt$$

mit  $P(t) = t - [t] + 1/2$  anzuwenden. Wir erhalten mit  $|P(t)| \leq 3/2$

$$\begin{aligned}
 \sum_{a=1}^N a \log a &= \int_1^N t \log t dt + \frac{N}{2} \log N + \int_1^N P(t) (\log t + 1) dt \\
 &= \frac{N^2}{2} \log N + N^2 O(1).
 \end{aligned}$$

Damit haben wir schliesslich erhalten

$$\frac{2}{N^2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^a T(a, b) = \frac{12}{\pi^2} \log 2 \log N + O((\log N)^{1/2+\varepsilon}).$$

Der Grundgedanke dieses Beweises ist also, zu zeigen, dass diejenigen Paare  $(a, b)$ , deren Schrittzahl  $T(a, b)$  die Abschätzung von Dixon (Lemma 2) erfüllen, den Hauptbeitrag zu dem gesuchten Mittelwert liefern.

Zum Abschluss seien noch einige numerische Ergebnisse angegeben, wie man sie mit einem programmierbaren Taschenrechner errechnen kann. Die Zahlen der Tabelle sprechen wohl für sich.

| $N$  | $T_N$ | $\frac{12}{\pi^2} \log 2 \log N$ |
|------|-------|----------------------------------|
| 100  | 3.98  | 3.88                             |
| 200  | 4.55  | 4.47                             |
| 300  | 4.89  | 4.81                             |
| 400  | 5.13  | 5.05                             |
| 500  | 5.31  | 5.24                             |
| 1000 | 5.90  | 5.82                             |

Der Wert für  $n = 1000$  wurde durch Simulation (Monte-Carlo-Methode) gewonnen [7].  
Hans Kilian, Dortmund

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 R.P. Boas, J.R.: Partial sums of infinite series, and how they grow. Am. Math. Monthly 85, 237–258 (1978).
- 2 J.D. Dixon: The number of steps in the Euclidean algorithm. J. Number Theory 2, 414–422 (1970).
- 3 J.D. Dixon: A simple estimate for the number of steps in the Euclidean algorithm. Am. Math. Monthly 78, 374–376 (1971).
- 4 H. Heilbronn: The average length of a class of finite continued fractions. In: Abhandlungen zur Zahlentheorie und Analysis. Hrsg. Paul Turán. Plenum Press, New York 1968.
- 5 D.E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol.2. Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1969.
- 6 J.W. Porter: On a theorem of Heilbronn. Mathematika 22, 20–28 (1975).
- 7 H. Kilian: Stochastische Überlegungen in zahlentheoretischen Zusammenhängen – 4 Beispiele. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik der Universität für Bildungswissenschaften Klagenfurt, Bd.3, 1980.

## Regular graphs containing a given graph

In the first book on graph theory ever written, Dénes König [4] proved that for every graph  $G$ , of order  $p$  and maximum degree  $d$ , there is a  $d$ -regular graph  $H$  containing  $G$  as an induced subgraph. Paul Erdős and Paul Kelly [1] solved the extremal problem of determining for a given graph  $G$ , the exact minimum number of points which must be added to obtain such a supergraph  $H$ . Our purpose is to study the corresponding problem where  $G$  is a subgraph of  $H$  which is not necessarily induced. We prove that at most  $d+2$  new points are needed, and that this bound which is independent of  $p$  is best possible.