

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 2

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$5 \mid m^2 - n^2$  oder  $5 \mid 2mn$  sein. Hiermit folgt aber aus  $d^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$  und  $5^2 = 3^2 + 4^2$  die Darstellbarkeit von  $d^2$  als Summe von drei Quadraten aus  $\mathbb{N}$  und damit die Behauptung.

2. Fall:  $d = l^2 + m^2 + n^2$  mit  $l, m, n \in \mathbb{N}$ , aber  $d \neq x^2 + y^2$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$ .

Jetzt ergibt sich die Behauptung aus der nachstehenden Identität:  $d^2 = (l^2 + m^2 - n^2)^2 + (2ln)^2 + (2mn)^2$ , wobei  $l^2 + m^2 - n^2 \neq 0$ , da sonst  $d = 2 \cdot n^2$  wäre im Widerspruch zu  $d \equiv 1 \pmod{2}$ .

3. Fall:  $d = k^2 + l^2 + m^2 + n^2$  mit  $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ , aber  $d \neq x^2 + y^2$  für alle  $x, y \in \mathbb{N}$ .

In diesem Fall folgt die Behauptung aus der Identität  $d^2 = (k^2 - l^2 - m^2 + n^2)^2 + (2kl - 2mn)^2 + (2km + 2ln)^2$ . (Anm.: Auf diese Identität stieß die Verfasserin bei der Lektüre von [3], S. 69, und [4], S. 106.)

Zunächst ist  $k^2 - l^2 - m^2 + n^2 \neq 0$ , da sonst  $d = 2(k^2 + n^2)$  wäre, was bei ungeradem  $d$  nicht möglich ist. Aus  $2kl - 2mn = 0$  folgte aber die Darstellbarkeit von  $d^2$  als Summe von zwei Quadraten:  $d^2 = v^2 + w^2$  mit  $v, w \in \mathbb{N}$ . Da  $d$  Primzahl ist, wäre  $(v, w, d)$  somit ein primitives pythagoreisches Tripel, weshalb auch  $d$  selbst als Summe von zwei Quadraten aus  $\mathbb{N}$  darstellbar wäre im Widerspruch zur Voraussetzung über  $d$ .

Weil sich nach dem Satz von Lagrange aber jede natürliche Zahl als Summe von höchstens vier Quadraten aus  $\mathbb{N}$  darstellen lässt, ist der Beweis hiermit beendet.

Anna Maria Fraedrich, PH Ludwigsburg

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L. E. Dickson: History of the Theory of Numbers, Chelsea reprint, New York, 1966, Bad. 2. (Siehe auch: Hurwitz, Mathematische Werke II, S. 751.)
- 2 W. Sierpinski: Pythagorean Triangles. New York 1962.
- 3 W. Sierpinski: Elementary Theory of Numbers. New York 1964.
- 4 F. Steiger: Über die Grundlösungen der Gleichung  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ . *El. Math.* 1956, 105–108.

© 1982 Birkhäuser Verlag, Basel

0013-6018/82/020054-03\$1.50 + 0.20/0

## Aufgaben

**Aufgabe 856A.** Es sei  $M = \{P_1, \dots, P_n\}$  eine Menge von  $n$  Punkten in einer Ebene. Bezeichnet  $d(P_i, P_j)$  die euklidische Distanz von  $P_i, P_j$ , so gelte

$$d(P_i, P_j) \neq d(P_k, P_l) \Rightarrow |d(P_i, P_j) - d(P_k, P_l)| \geq \varepsilon. \quad (1)$$

Dann lässt sich für den Durchmesser  $\delta(M) := \max\{d(P_i, P_j); 1 \leq i, j \leq n\}$  die Abschätzung

$$\delta(M) > C_\varepsilon n^{2/3} \quad (2)$$

gewinnen. Lässt sich (2) verschärfen?

P. Erdős

Lösung: Wir behaupten, dass

$$\delta(M) > \frac{\varepsilon}{4} \cdot n^{3/4} \quad \text{für alle } n \geq 16.$$

Beweis: Die  $\binom{n}{2}$  Abstände  $d(P_i, P_j)$ ;  $1 \leq i < j < n$  sollen genau die  $s$  verschiedenen Werte  $d_\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, s$ ) annehmen. Wir können voraussetzen

$$0 < d = d_1 < d_2 < \dots < d_s = \delta(M) = \delta; \quad \min_{\sigma=1}^{s-1} (d_{\sigma+1} - d_\sigma) \geq \varepsilon, \quad d(P_1, P_2) = d. \quad (1)$$

Ist  $d < \varepsilon$ , dann folgt für jedes  $P_i$  ( $i > 2$ ) nach der Dreiecksungleichung

$$|d(P_1, P_i) - d(P_2, P_i)| \leq d < \varepsilon. \quad (2)$$

Aus  $d(P_1, P_i) \neq d(P_2, P_i)$  folgt der Widerspruch  $\varepsilon \leq d < \varepsilon$ ;  $d(P_1, P_i) = d(P_2, P_i)$  besagt, dass  $P_i$  auf der Mittelsenkrechten von  $P_1$  und  $P_2$  liegt; dann gilt

$$\delta \geq d + (n-4)\varepsilon > \frac{3}{4}\varepsilon \cdot n \quad \text{für } n \geq 16. \quad (3)$$

Sei von jetzt an

$$\varepsilon \leq d; \quad \delta \geq d + (s-1)\varepsilon \geq s \cdot \varepsilon. \quad (4)$$

Sei ferner  $K^{(r)}$  die Schar der Kreise  $K_\sigma^{(r)}$  um  $P_r$  mit Radius  $d_\sigma$  ( $r = 1, 2$ ;  $\sigma = 1, \dots, s$ ). Jedes  $P_i$  ( $i > 2$ ) muss mit einem der  $2s^2$  Schnittpunkte dieser Kreise zusammenfallen. Die Schnittpunkte  $(x, y)$  von  $K_\sigma^{(1)}$  und  $K_\tau^{(2)}$  ( $1 \leq \sigma, \tau \leq s$ ) sind

$$x = \frac{1}{2d} (d_\sigma^2 - d_\tau^2); \quad y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{4d^2 d_\sigma^2 - (d^2 + d_\sigma^2 - d_\tau^2)^2}. \quad (5)$$

$y$  ist genau dann reell, wenn

$$|d_\sigma - d_\tau| \leq d \quad (6)$$

erfüllt ist. Nun liegt  $M$  sicher ganz in oder auf dem Rand eines Quadrates der Seitenlänge  $\delta$ . Sei

$$[\sqrt{n-1}] = m, \quad \text{also } m^2 < n. \quad (7)$$

Nach dem Schubfachprinzip ergibt sich

$$d \leq \frac{\delta\sqrt{2}}{m} < \frac{\delta\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}-1} \leq \frac{2\delta}{\sqrt{n}} \quad \text{für } n \geq 16. \quad (8)$$

Nach (6) und (8) wird

$$|d_\sigma - d_\tau| \leq d < \frac{2\delta}{\varepsilon\sqrt{n}} \cdot \varepsilon \quad \text{für } n \geq 16. \quad (9)$$

Hieraus ergibt sich

$$n - 2 < 2s \left( 1 + \frac{4\delta}{\varepsilon\sqrt{n}} \right). \quad (10)$$

Wäre  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4} n^{3/4}$ , so wäre  $n - 2 < 2s(1 + n^{1/4})$ ;  $s > \frac{n-2}{2(1+n^{1/4})}$ .

Daraus ergäbe sich mit (4) für  $n \geq 16$  der Widerspruch

$$\frac{\varepsilon}{4} n^{3/4} \geq \delta \geq \varepsilon s > \varepsilon \cdot \frac{n-2}{2(1+n^{1/4})}; \quad n^{3/4} + 4 > n. \quad (11)$$

H. J. Kanold, Braunschweig, BRD

**Aufgabe 857.** Im gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  mit  $|AB| = |AC| \neq |BC|$  bezeichnen  $w_a$  bzw.  $w'_b$  die Innenwinkelhalbierende durch  $A$  bzw. die Aussenwinkelhalbierende durch  $B$ . Das Dreieck soll bei gegebenen  $w_a, w'_b$  mit Zirkel und Lineal konstruiert werden. Genau für welche rationalen Werte des Verhältnisses  $k = w_a/w'_b$  ist dies möglich?

J. T. Groenman, Groningen, NL

H. Kappus, Rodersdorf

**Lösung:** Mit  $a := |BC| \neq |AB| = |AC| := b$  folgt aus den allgemeinen Formeln für Innen- bzw. Aussenwinkelhalbierende

$$w_a = \frac{1}{2} (4b^2 - a^2)^{1/2}, \quad w'_b = \frac{a}{|a-b|} (b(2b-a))^{1/2}. \quad (1)$$

Ist nun  $k := w_a/w'_b$  und wird  $k \in \mathbf{Q}^+$  vorausgesetzt, so kann wegen (1) gesagt werden: Genau dann, wenn der Quotient  $b/a$  über  $\mathbf{Q}$  algebraisch ist von einem Grad  $2^m$  mit  $m \in \mathbf{N}_0$ , sind  $a, b$  (und damit das Dreieck) mittels Zirkel und Lineal aus  $w_a$  (bzw. aus  $w'_b$ ) konstruierbar. Wegen (1) und der Definition von  $k$  erhält man

$$(a+2b)(a-b)^2 = 4k^2 a^2 b, \quad (2)$$

so dass  $b/a$  über  $\mathbf{Q}$  algebraisch von einem Grade  $\leq 3$  ist und überdies Wurzel des Polynoms

$$P(X) := (1+2X)(1-X)^2 - 4k^2 X \in \mathbf{Q}[X]. \quad (3)$$

$b/a$  ist nun vom Grade 1 oder 2 über  $\mathbb{Q}$  genau dann, wenn  $P$  in  $\mathbb{Q}[X]$  reduzibel ist, d. h. wenn  $P$  eine Wurzel  $x_0$  in  $\mathbb{Q}$  hat. Dies letztere trifft offenbar genau dann ein, wenn  $(1+2x_0)/x_0$  Quadrat einer rationalen Zahl  $r/s$  mit  $(r,s) \in \mathbb{N}^2$  (o.B.d.A.) ist, und dies führt wegen  $P(x_0)=0$  und (3) zu

$$k = \frac{r|r^2 - 3s^2|}{2s|r^2 - 2s^2|}. \quad (4)$$

Genau die rationalen Zahlen rechts in (4) mit  $(r,s) \in \mathbb{N}^2$  führen also zu  $k$ -Werten in  $\mathbb{Q}^+$ , für die die gewünschte Konstruktionsaufgabe lösbar ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

**Aufgabe 858.**  $P$  bezeichne einen inneren Punkt der vom Umkreismittelpunkt  $M$  und Inkreismittelpunkt  $I$  eines nicht regulären Dreiecks  $A_1A_2A_3$  begrenzten Strecke. Die Cevatransversalen  $A_iP$  treffen die Gegenseiten in  $Q_i$ , und es werde  $|PQ_i| = x_i, |A_iP| = y_i$  ( $i=1,2,3$ ) gesetzt. Man beweise die Existenz eines Punktes  $P$  derart, dass  $y_1 + y_2 + y_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$ .

F. Leuenberger, Feldmeilen

Lösung des Aufgabenstellers (Bearbeitung der Redaktion): Es sei

$$f(P) := 2 \sum x_i - \sum y_i$$

gesetzt. Aus Stetigkeitsgründen genügt der Nachweis, dass  $f(M) > 0$  und  $f(I) < 0$  ist.

1. Für  $P=M$  ist  $y_1 = y_2 = y_3 = r =$  Umkreisradius. Da die Funktion  $g(x) = 1/(x+r)$  strikt konvex ist, ergibt die Jensensche Ungleichung die Abschätzung

$$\frac{9}{3r + \sum x_i} < \sum \frac{1}{x_i + r}. \quad (1)$$

Andererseits gilt nach einem bekannten Satz über Cevatransversalen (siehe z. B. [1], S. 13)

$$\sum \frac{1}{x_i + r} = \frac{2}{r}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt  $f(M) > 0$ .

2. Bezeichnen wir mit  $a_i, w_i$  die Längen der Gegenseite von  $A_i$  bzw. der Innenwinkelhalbierenden durch  $A_i$ , so dürfen wir o.B.d.A.

$$a_1 > a_2 \geq a_3 \quad (3)$$

annehmen. Bekanntlich (siehe z. B. [2], S. 14) gilt dann

$$w_1 < w_2 \leq w_3. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) schliessen wir nunmehr unter Benützung von

$$a_i w_i = x_i \sum a_j, \quad i = 1, 2, 3$$

auf

$$a_2 (\sum w_i - 3 \sum x_i) > a_1 (w_1 - \sum x_i) + a_2 (w_2 - \sum x_i) \\ + a_3 (w_3 - \sum x_i) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar  $f(I) < 0$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. Berlin 1976.
- 2 H.S.M. Coxeter und S.L. Greitzer: Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, New York 1967.

Weitere Lösungen sandten J. Groenman (Groningen, NL), W. Janous (Innsbruck, A).

**Aufgabe 859.** Es seien  $s_1, \dots, s_n \in \mathbf{C}, t_1, \dots, t_n \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Die  $(n, n)$ -Matrix  $A = (a_{jk})$  mit

$$a_{jk} = \begin{cases} s_k & \text{für } k = 1, \dots, n \\ t_k a_{j-1, k-1} / t_j & \text{für } j = 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$$

heisse verallgemeinerte zyklische Matrix. Man zeige durch explizite Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$ , dass jede verallgemeinerte zyklische Matrix diagonalisierbar ist.

A. Fässler, Biel-Bienne

**Solution:** The matrix  $A$  does not change if we multiply the  $t_j, j = 1, 2, \dots, n$  by a constant factor. We put  $\tau_j := t_j c^{-1}$ , where  $c$  is an  $n$ -th root of the product  $t_1 t_2 \cdots t_n$ . Then  $A = \tau_1 \sum_{j=1}^n s_j (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_j)^{-1} T^{j-1}$ , where

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \tau_2 & & & \bigcirc \\ & 0 & \tau_3 & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \tau_n \\ \tau_1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Since  $\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n = 1$ , the matrix  $T$  is similar to a circulant matrix:  $T = B^{-1} C B$ , where  $B$  is a diagonal matrix,

$$B = \begin{bmatrix} \tau_1 & & & \bigcirc \\ & \tau_1 \tau_2 & & \\ & & & \\ \bigcirc & & & \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{bmatrix}.$$

The eigenvalues of  $C$  are  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$  where  $\omega = \exp(2\pi i/n)$  with corresponding eigenvectors  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  given by  $e_k := [1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k}]^{\text{tr}}$ . It follows that a complete set of  $n$  independent eigenvectors of  $A$  is given by

$$B^{-1} e_k = [\tau_1^{-1}, (\tau_1 \tau_2)^{-1} \omega^k, \dots, (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n)^{-1} \omega^{(n-1)k}]^{\text{tr}}$$

with eigenvalue

$$\tau_1 \sum_{j=1}^n s_j (\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_j)^{-1} \omega^{(j-1)k},$$

where  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , and  $\text{tr}$  stands for transpose.

A. A. Jagers, Enschede, NL

Eine weitere Lösung sandte O. P. Lossers (Eindhoven, NL).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1982* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S.67), Problem 625 B (Band 25, S.68), Problem 645 A (Band 26, S.46), Problem 672 A (Band 27, S.68), Aufgabe 680 (Band 27, S.116), Problem 724 A (Band 30, S.91), Problem 764 A (Band 31, S.44).

**Aufgabe 876.** Es sei  $n$  weder eine Primzahl noch eine Primzahlpotenz. Mit  $p(n), P_1(n), P(n)$  sei der kleinste bzw. zweitgrösste bzw. grösste Primfaktor von  $n$  bezeichnet,  $p(n) \leq P_1(n) < P(n)$ . Man zeige:

$$\sum'_n p(n)/nP(n) < \infty, \tag{1}$$

$$\sum'_n P_1(n)/nP(n) = \infty. \tag{2}$$

P. Erdős

**Aufgabe 877.** Die Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  sei stetig differenzierbar, und es gelte  $f(0) = f(1) = 0$ . Man zeige:

$$\left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Wann genau gilt Gleichheit?

H.-J. Seiffert, Berlin, BRD

**Aufgabe 878.** Die Kurve  $C$  mit der Gleichung

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0,$$

bezogen auf ein gleichseitiges Koordinatendreieck  $\Delta$  mit dem Schwerpunkt  $E = (1, 1, 1)$  als Einheitspunkt, berührt die Seiten von  $\Delta$  je in einer Ecke.  $C$  besitzt ein weiteres gleichseitiges, dem Dreieck  $\Delta$  umbeschriebenes Tangentendreieck  $\Delta'$ . Man zeige, dass das Seitenverhältnis von  $\Delta'$  und  $\Delta$  den Wert  $\sqrt[3]{2} - 1$  hat.

C. Bindschedler, Küsnacht

## Berichte

### 10. Österreichischer Mathematiker-Kongress

Vom 14. bis 18. September 1981 fand in Innsbruck der 10. Österreichische Mathematiker-Kongress statt. Aus Anlass des Jubiläums wurde eine Sonderbriefmarke herausgegeben mit einem Signet des berühmten holländischen Malers und Graphikers M. C. Escher, dem auch eine Sonderausstellung gewidmet war. Der Kongress wurde von etwa 500 Teilnehmern besucht. Neben fünf Hauptvorträgen standen aus zehn Sektionen (Analysis, Geometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie, Numerik, Didaktik usw.) über hundert Kurzvorträge zur Auswahl. Am 17. September fand ein schulmathematisches Symposium statt, das u. a. zum Thema «Stochastik und Schule» Stellung nahm.

Traditionsgemäss fand auch die Mitgliederversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung statt. Der von Prof. Helmberg vorzüglich organisierte Kongress bot im gesellschaftlichen Rahmenprogramm die Möglichkeit, die Schönheiten der Tiroler Landschaft kennenzulernen.

Hans Loeffel

### Dedekind-Tagung (Braunschweig, 6. bis 8. Oktober 1981)

Zur Feier des 150. Geburtstages von Richard Dedekind fand am 6. Oktober 1981 an der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig ein akademischer Festakt statt. In seinem Festvortrag mit dem Thema «Richard Dedekind 1831–1916