

# Konvergenz und monotone Einschliessung für das Steffensen-Verfahren

Autor(en): **Baptist, P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **37 (1982)**

Heft 2

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36387>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

---

El. Math.

Band 37

Heft 2

Seiten 33–64

Basel, 10. März 1982

---

## Konvergenz und monotone Einschliessung für das Steffensen-Verfahren

Bei der Berechnung der Nullstellen einer reellen Funktion sind einschliessende monotone Näherungsfolgen vorteilhaft, da diese bei jedem Iterationsschritt erkennen lassen, für welchen Zahlenwert die Lösung garantiert werden kann.

Bereits in der 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts gaben *Fourier* bzw. *Dandelin* Lösungseinschliessungen für das Newton-Verfahren bzw. für eine Kombination des Newton-Verfahrens mit der Regula falsi an (siehe [2]). Lösungseinschliessungen für Verfahren vom Regula-falsi-Typ stammen von Schmidt [3] aus dem Jahre 1970.

In dieser Arbeit wird das Steffensen-Verfahren mit einer Art Sekantenverfahren, das die «Steffensen-Richtung» für die Sekante verwendet, kombiniert. Die so erzeugten Iterationswerte liefern einschliessende monotone Näherungsfolgen für die Nullstellen reeller konvexer Funktionen. Der Beweis des Einschliessungssatzes enthält einen Konvergenzbeweis für das Steffensen-Verfahren, der ohne Differenzierbarkeitsforderungen an die Funktion auskommt. Dieser Konvergenzsatz wird nach der Auflistung einiger Eigenschaften konvexer Funktionen als erstes bewiesen.

### 1. Elementare Eigenschaften konvexer Funktionen

**Definition.** Eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion  $f(x)$  heisst konvex auf  $I$ , wenn für je zwei Punkte  $x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Im Intervall  $(x, y) \subset I$  sind die Werte einer konvexen Funktion kleiner als die entsprechenden Werte der Sekante durch die Punkte  $(x, f(x))$  und  $(y, f(y))$ . Verwendet man für die Steigung die Abkürzung

$$\delta f(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

so bedeutet dies für alle  $z$  mit  $x \leq z \leq y$ :

$$f(z) \leq f(x) + \delta f(x, y)(z - x).$$

Die folgenden Hilfssätze enthalten einige elementare Aussagen über konvexe Funktionen, die später benötigt werden. Sie sind bereits (bis auf unwesentliche Modifikationen) in [3] aufgeführt.

**Hilfssatz 1.** Für  $x, y \in I$  und  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in I$  gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(Beweis siehe [3].)

Der Hilfssatz sagt aus, dass der Funktionswert grösser als der entsprechende Sekantenwert ist, für  $z \in I$  mit  $z < x$  bzw.  $z > y$ . Dies lässt sich auch folgendermassen beschreiben:

**Zusatz:** Für  $z \leq x < y$  bzw.  $x < y \leq z$  gilt:

$$f(z) \geq f(x) + \delta f(x, y)(z - x).$$

**Hilfssatz 2.** Gilt  $f(y) > f(z)$  für  $y > z$ ,  $y, z \in I$ , dann ist  $f(y) > f(x)$  für  $y > x \geq z$ .

**Beweis:** Es existiert ein  $\lambda \in [0, 1]$  mit  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$  und  $\lambda \neq 1$ .

$f(x) = f(\lambda y + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) < \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(y) = f(y)$ , da  $f(x)$  konvex und nach Voraussetzung.

**Hilfssatz 3.** Für  $x \leq x_0$  und  $x, x_0 \in I$  gelte  $f(x) \geq f(x_0) + c(x - x_0)$ , wobei  $c$  eine Konstante ist. Für  $y, z \in I$ ,  $y \neq z$  und  $y, z \leq x_0$  folgt damit:

$$\delta f(y, z) \leq c.$$

**Beweis:** Annahme:  $\delta f(y, z) > c$  für gewisse  $y, z \in I$  mit  $y < z \leq x_0$ .

$f(x_0) \geq f(y) + \delta f(y, z)(x_0 - y)$  nach Zusatz zu Hilfssatz 1. Mit der Ungleichung  $\delta f(y, z)(x_0 - y) > c(x_0 - y)$  kann man die erste Ungleichung nach unten abschätzen

$$f(x_0) > f(y) + c(x_0 - y).$$

Durch Umformen erhält man

$$f(y) < f(x_0) + c(y - x_0),$$

und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, da  $y < x_0$ .

*Zusatz:* Gilt die Voraussetzung von Hilfssatz 3 für  $x \geq x_0$ , dann folgt:

$$\delta f(y, z) \geq c \quad \text{für } y, z \in I, \quad y \neq z \quad \text{und } y, z \geq x_0.$$

## 2. Globaler Konvergenzsatz für das Steffensen-Verfahren

Die Iterationsvorschrift des Steffensen-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle einer reellen Funktion  $f(x)$  einer reellen Veränderlichen lautet:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\Phi(x_k) - x_k)^2}{\Phi(\Phi(x_k)) - 2\Phi(x_k) + x_k} \quad \text{mit } \Phi(x_k) = x_k + f(x_k).$$

Diese Iterationsvorschrift entsteht z. B. durch Kombination eines Verfahrens der sukzessiven Approximation

$$\tilde{x}_k = x_{k+1} = \Phi(x_k) = x_k + f(x_k) \quad (1)$$

mit dem Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad (2)$$

indem man in (2)  $x_{k-1}$  durch  $\tilde{x}_k$  bzw.  $f(x_{k-1})$  durch  $f(\tilde{x}_k)$  aus (1) ersetzt. Man betrachtet also die Sekante durch die Punkte  $(x_k, f(x_k))$  und  $(\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k))$ .

**Satz 1 (Konvergenzsatz).** Die Funktion  $f(x)$  sei auf einem Intervall  $I$  konvex. Es existieren innere Punkte  $a, b \in I$ ,  $a < b$  mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann besitzt  $f$  genau eine Nullstelle  $\bar{x}$  in  $[a, b]$  und für die durch das Steffensen-Verfahren  $x_0$  so gewählt, dass  $f(x_0) > 0$  und  $\tilde{x}_0 = x_0 + f(x_0) \in I$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= x_k + f(x_k), \\ x_{k+1} &= x_k - f(x_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

definierte Folge  $\{x_k\}$  gilt (falls das Verfahren nicht bereits nach endlich vielen Schritten gestoppt werden kann):

- (i)  $x_0 > x_1 > \dots > x_k > x_{k+1} > \dots > \bar{x}$ ,
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ .

**Beweis:** Aus der Konvexität von  $f$  auf  $I$  folgt die Stetigkeit von  $f$  auf  $[a, b] \subset I$ , und somit existiert aufgrund der Voraussetzung mindestens eine Nullstelle.

**Annahme:** Es existieren zwei Nullstellen  $u, v$  mit  $a \leq u < v$ .

$f(v) = 0 > f(a)$  nach Voraussetzung  $\Rightarrow f(v) > f(u)$  nach Hilfssatz 2. Widerspruch zur Annahme, dass  $u$  ebenfalls Nullstelle.



D. h. in  $[a, b]$  gibt es genau eine Nullstelle von  $f$ , die mit  $\bar{x}$  bezeichnet wird.

Der Nachweis der Aussage (i) erfolgt durch vollständige Induktion.

Das Beweisschema für den Induktionsanfang und den Induktionsschluss ist formal das gleiche. Daher wird hier nur der Induktionsschluss von  $k$  nach  $k+1$  durchgeführt. Den Induktionsanfang erhält man, indem  $x_k$  durch  $x_0$  bzw.  $x_{k+1}$  durch  $x_1$  ersetzt wird.

Zu zeigen ist:  $\bar{x} < x_{k+1} < x_k$ .

Aus  $\tilde{x}_k = x_k + f(x_k)$  folgt  $\tilde{x}_k - x_k = f(x_k) > 0$  nach Induktionsannahme (bzw. nach Voraussetzung im Fall  $k=0$ ), und somit ist

$$\tilde{x}_k > x_k. \quad (4)$$

Weiterhin ist  $f(\tilde{x}_k) > 0$  (aus (4) und nach Voraussetzung), d. h.  $f(\tilde{x}_k) > f(\bar{x})$ , und mit Hilfssatz 2 erhält man wegen  $\tilde{x}_k > x_k > \bar{x}$ :

$$f(\tilde{x}_k) > f(x_k). \quad (5)$$

(4) und (5) bewirken, dass

$$\frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} > 0.$$

Damit folgt aus (3) und da  $f(x_k) > 0$ :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} < x_k.$$

Wir betrachten jetzt die Gerade  $g(x)$  durch die Punkte  $(x_k, f(x_k))$  und  $(\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k))$ :

$$g(x) = f(x_k) + \delta f(x_k, \tilde{x}_k)(x - x_k).$$

$g(x)$  hat genau eine Nullstelle  $x = x_{k+1}$ , da  $\delta f(x_k, \tilde{x}_k) \neq 0$ . Aus dem Zusatz zu Hilfssatz 1 erhält man, da  $x_{k+1} < x_k < \tilde{x}_k$ :

$$f(x_{k+1}) \cong f(x_k) + \delta f(x_k, \tilde{x}_k)(x_{k+1} - x_k) = g(x_{k+1}) = 0,$$

d. h.  $f(x_{k+1}) \cong 0$ . Falls  $f(x_{k+1}) = 0$ , bricht man das Verfahren ab. Ist  $f(x_{k+1}) > 0$ , so folgt  $x_{k+1} > \bar{x}$ , und insgesamt hat man die gewünschte Doppelungleichung

$$\bar{x} < x_{k+1} < x_k.$$

Mit Hilfssatz 2 kann man folgern:

$$f(x_{k+1}) < f(x_k),$$

da  $\bar{x} < x_{k+1} < x_k$  und  $f(\bar{x}) = 0 < f(x_k)$ .

Damit ist jetzt gezeigt:

- a) Die Funktionswerte  $f(x_k)$  nehmen mit wachsendem  $k$  monoton ab,
- b) die Iterationsfolge  $\{x_k\}$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

Wegen b) existiert der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $x^*$  gleich der einzigen Nullstelle  $\bar{x}$  von  $f(x)$  in  $[a, b]$  ist.

Da  $\tilde{x}_0$  innerer Punkt von  $I$  sein soll, existiert ein  $\hat{x} \in I$  mit  $\hat{x} > \tilde{x}_0$ . Mit Hilfssatz 1 erhält man für  $x \leq \tilde{x}_0$ :

$$f(x) \geq f(\tilde{x}_0) + \delta f(\tilde{x}_0, \hat{x})(x - \tilde{x}_0) = f(\tilde{x}_0) + c(x - \tilde{x}_0)$$

mit  $c := \delta f(\tilde{x}_0, \hat{x})$ . Aus Hilfssatz 3 folgt damit:

$$\delta f(x_k, \tilde{x}_k) \leq c, \quad \text{da } x_k, \tilde{x}_k < \tilde{x}_0.$$

Insgesamt gilt:

$$0 < \delta f(x_k, \tilde{x}_k) \leq c. \tag{6}$$

Die Iterationsvorschrift (3) lässt sich umschreiben zu

$$f(x_k) + \delta f(x_k, \tilde{x}_k)(x_{k+1} - x_k) = 0. \tag{7}$$

Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , erhält man wegen (6) aus (7):

$$f(x^*) = 0,$$

und somit folgt aus der Eindeutigkeit der Nullstelle:

$$x^* = \bar{x}.$$

### 3. Monotone Einschliessung

Für die Berechnung der Nullstellen sind einschliessende Iterationsfolgen vorteilhaft, da man durch sie ein Intervall kennt, in dem die gesuchte Lösung liegt. Die Länge des Intervalls verkleinert sich mit wachsender Iterationszahl, falls die Folgen monoton sind.

Um mit dem Steffensen-Verfahren monotone Einschliessung zu erhalten, wird ausser der bisher betrachteten Iterationsfolge  $\{x_k\}$  eine weitere Folge  $\{y_k\}$  erzeugt. Dazu startet man zusätzlich von einem Punkt  $(y_0, f(y_0))$  mit  $f(y_0) < 0$  und verwendet für die jeweiligen «Steffensen-Sekanten» dieselbe Steigung wie für den entsprechenden Iterationswert  $x_k$ , d. h.

$$y_{k+1} = y_k - f(y_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Die so definierte Folge  $\{y_k\}$  ist monoton wachsend und konvergiert von der gegenüberliegenden Seite gegen  $\bar{x}$ . Zusammen mit der Folge  $\{x_k\}$  hat man somit für die Nullstelle  $\bar{x}$  von  $f(x)$  eine Einschliessung, die mit jedem Iterationsschritt verbessert wird.

**Satz 2** (Einschliessungssatz). *Die Funktion  $f$  sei auf einem Intervall  $I$  konvex, und es existieren innere Punkte  $a, b \in I$ ,  $a < b$  mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann besitzt  $f$  genau eine Nullstelle  $\bar{x} \in [a, b]$  und für die beiden Folgen  $\{x_k\}$  und  $\{y_k\}$ , die durch  $x_0$  so gewählt, dass  $f(x_0) > 0$  und  $\tilde{x}_0 = x_0 + f(x_0) \in I$ ,*

$$\tilde{x}_k = x_k + f(x_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)}$$

bzw.

$$y_0 \text{ so gewählt, dass } f(y_0) < 0$$

$$y_{k+1} = y_k - f(y_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

definiert sind, gelten die folgenden Aussagen (falls der Algorithmus nicht bereits nach endlich vielen Schritten beendet werden kann):

- (i)  $y_0 < y_1 < \dots < y_k < y_{k+1} < \dots < \bar{x} < \dots < x_{k+1} < x_k < \dots < x_1 < x_0$ ,
- (ii)  $f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_k) > f(x_{k+1}) > \dots > 0$ ,
- (iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \bar{x}$ .

**Beweis:** Die Eindeutigkeit der Nullstelle  $\bar{x}$  in  $[a, b]$  und die Aussagen bezüglich der Folge  $\{x_k\}$  wurden bereits in Satz 1 gezeigt.

Die Ergebnisse bezüglich der Folge  $\{y_k\}$  werden wiederum durch Induktion nachgewiesen. Da hier ebenfalls Induktionsanfang und -schluss analog verlaufen, wird nur der Induktionsschluss von  $k$  nach  $k + 1$  gezeigt.

Zu zeigen ist:  $y_k < y_{k+1} < \bar{x}$ .

Aus

$$y_{k+1} = y_k - f(y_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)}$$

folgt wegen (4), (5) und  $f(y_k) < 0$  (nach Induktionsannahme bzw. nach Voraussetzung im Fall  $k = 0$ ):

$$y_{k+1} - y_k = -f(y_k) \frac{x_k - \tilde{x}_k}{f(x_k) - f(\tilde{x}_k)} > 0.$$

Um  $y_{k+1} < \bar{x}$  zu zeigen, wird die Gerade  $h(x) = f(y_k) + \delta f(x_k, \tilde{x}_k)(x - y_k)$  durch  $(y_k, f(y_k))$  betrachtet.

$h(x)$  hat dieselbe Steigung wie die entsprechende Gerade  $g(x)$  durch  $(x_k, f(x_k))$ . Da  $\delta f(x_k, \tilde{x}_k) \neq 0$ , besitzt  $h(x)$  genau eine Nullstelle  $x = y_{k+1}$ . Zu zeigen ist nun:  $h(x) \geq f(x)$  für  $y_k \leq x \leq x_k$ .

Aus dem Zusatz zu Hilfssatz 1 ergibt sich:

$$f(x) \geq f(x_k) + c(x - x_k) \quad \text{mit} \quad c = \delta f(x_k, y_k) \quad \text{und} \quad y_k < x_k < x.$$

Mit dem Zusatz zu Hilfssatz 3 lässt sich zeigen:

$$\delta f(x_k, y_k) \leq \delta f(\tilde{x}_k, x_k), \quad \text{wobei} \quad \tilde{x}_k = x_k + f(x_k).$$

Damit und aus der Konvexität von  $f(x)$  ergibt sich für  $y_k \leq x \leq x_k$ :

$$f(x) \leq f(y_k) + \delta f(y_k, x_k)(x - y_k) \leq f(y_k) + \delta f(\tilde{x}_k, x_k)(x - y_k) = h(x).$$

Da  $y_{k+1}$  Nullstelle von  $h(x)$  ist, folgt:

$$0 = h(y_{k+1}) \geq f(y_{k+1}).$$

Ist  $f(y_{k+1}) = 0$ , wird das Verfahren abgebrochen.

Ansonsten gilt  $f(y_{k+1}) < 0$ , und somit ist  $y_{k+1} < \bar{x}$ . Zusammenfassend erhält man die gewünschte Doppelungleichung

$$y_k < y_{k+1} < \bar{x}.$$

Die Folge  $\{y_k\}$  ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt, daher existiert der Grenzwert  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$ .

Im Beweis von Satz 1 wurde gezeigt:  $0 < \delta f(x_k, \tilde{x}_k) \leq c$ .

Die Iterationsvorschrift für die Folge  $\{y_k\}$  lässt sich umschreiben zu

$$f(y_k) + \delta f(x_k, \tilde{x}_k)(y_{k+1} - y_k) = 0.$$

Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$  folgt daraus  $f(y^*) = 0$ , und somit gilt  $y^* = \bar{x}$ .

In Satz 1 wurde bereits  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* = \bar{x}$  bewiesen, und insgesamt hat man nun erhalten:

$$x^* = y^* = \bar{x}.$$

## Numerische Beispiele

Zur Demonstration der monotonen Einschliessung mit dem Steffensen-Verfahren dienen die Aufgaben:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3}{10} + x - 8 = 0, \quad \text{b) } f(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{24} = 0.$$

Die Rechnungen wurden mit dem programmierbaren Taschenrechner TI 59 durchgeführt. Als Fehlerschranke wurde  $\varepsilon = 10^{-8}$  gewählt. Man kann leicht zeigen, dass obige Funktionen bezüglich des gewählten Startintervalls den Voraussetzungen von Satz 2 genügen.

## Beispiel a)

$n$	$x_n$	$y_n$
0	5.0	2.0
1	4.701022817	2.163650669
2	4.388077738	2.376550057
3	4.075678220	2.653027472
4	3.798652245	2.991747545
5	3.614516310	3.326996363
6	3.550923683	3.514003857
7	3.545042818	3.544510259
8	3.544997830	3.544997742
9	3.544997828	3.544997828

## Beispiel b)

$n$	$x_n$	$y_n$
0	5.0	4.0
1	4.919557209	4.170735719
2	4.850157334	4.389082364
3	4.806271562	4.619540854
4	4.792236635	4.762538562
5	4.791087405	4.790452815
6	4.791080374	4.791080135
7	4.791080374	4.791080375

P. Baptist, Bayreuth

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 P. Henrici: Elemente der numerischen Analysis, Bd. 1. BI-Hochschultaschenbücher, Mannheim 1972.
- 2 A.M. Ostrowski: Solution of equations in Euclidean and Banach spaces. Academic Press, New York, London 1973.
- 3 J.W. Schmidt: Monotone Einschliessung mit der Regula falsi bei konvexen Funktionen. ZAMM 50, 640–643 (1970).
- 4 J.F. Steffensen: Remarks on Iteration. Skand. Aktuarietidskr. 16, 64–72 (1933).