Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **36 (1981)**

Heft 2

PDF erstellt am: **25.09.2024**

16 E. Lanckau: Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung. Z. angew. Math. Mech. *42*, 180-186 (1962).
17 V.E. Meister, N. Weck und W.L. Wendland (Hrsg.): Function Theoretic Methods for Partial Differential Equations. Berlin 1976.
18 P.F. Neményi: Recent Developments in Inverse and Semi-inverse Methods in the Mechanics of Continua. Adv. appl. Mech. *2*, 123-151 (1951).
19 S. Ruscheweyh: Geometrische Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung $(1-z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} - n(n+1)w = 0$. J. reine angew. Math. *270*, 143-157 (1974).
20 G.N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2. Aufl. Cambridge 1966.

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Zulässigkeitsmengen vollständig additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle natürlichen Zahlen n und m $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátai [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (E-Menge), wenn für jede vollständig additive Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Verschiedene Autoren [1-5] haben allgemeine Charakterisierungen und spezielle Beispiele für E-Mengen gegeben. Insbesondere hat die Menge P der Primzahlen diese Eigenschaft. Im allgemeinen können aber die Werte einer vollständig additiven Funktion f auf einer E-Menge nicht beliebig vorgeschrieben werden. Mengen, die dies zulassen, und solche, die zugleich auch E-Mengen sind, werden im folgenden charakterisiert.

Definition. *Eine Menge B natürlicher Zahlen heisst zulässig oder Zulässigkeitsmenge (kurz Z-Menge), falls sich jede Funktion $f: B \to \mathbf{C}$ so auf $\mathbf{N}$ fortsetzen lässt, dass die Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ vollständig additiv ist.*

Satz 1. *Eine Menge $B \subset \mathbf{N}$ ist genau dann Z-Menge, wenn sich die Zahl 1 «nicht» in der Form*

$$1 = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k} \tag{1}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A: $k \in \mathbf{N}$, $b_1, \ldots, b_k \in B$; $b_i \neq 1$; $r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ erfüllen.

Beweis:
1. Angenommen die Zahl 1 lässt sich in der Form (1) schreiben. Betrachte die Funktion $f: B \to \mathbf{C}$ zu

$$f(n) := \begin{cases} 1 & n = b_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f lässt sich nicht vollständig additiv fortsetzen, denn für die Fortsetzung $\tilde{f}$ müsste gelten:

$$\tilde{f}(1)=\tilde{f}(b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k})=r_1\tilde{f}(b_1)+\cdots+r_k\tilde{f}(b_k)$$
$$=r_1\cdot 1+0+\cdots+0=r_1\neq 0.$$

Im Widerspruch zur Tatsache, dass für jede vollständig additive Funktion f stets $f(1)=0$ gilt.
2. Sei B eine Teilmenge von $\mathbf{N}$, durch die 1 nicht in der Form (1) geschrieben werden kann. Sei ferner $f: B\to\mathbf{C}$ eine Funktion. Dann ist zu zeigen, dass zu f eine vollständig additive Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbf{N}\to\mathbf{C}$ existiert.
Betrachte den Vektorraum V, der von den Zahlen $\log p$ mit $p\in P$ über dem Körper der rationalen Zahlen aufgespannt wird. Da die Zahl 1 sich nicht in der Form (1) schreiben lässt, sind in V die Vektoren $\log b$ mit $b\in B$ linear unabhängig. Nach entsprechenden Sätzen aus der linearen Algebra lässt sich also die Menge $C'=\{\log b\,|\,b\in B\}$, falls sie nicht schon Basis von V ist, durch Hinzunahme einer Menge C'' geeigneter, linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis C von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis ist nun jeder Vektor $\log x\in V$ eindeutig darstellbar:

$$\log x=r_1\log c_1+\cdots+r_s\log c_s.$$

Sei nun $\varphi: V\to\mathbf{C}$ die lineare Abbildung zu

$$\varphi(\log c)=\begin{cases} f(c) & \log c\in C' \\ 0 & \log c\in C'' \end{cases}$$

Dann lässt sich die Funktion $f: B\to\mathbf{C}$, wie folgt, zu einer vollständig additiven Funktion $\tilde{f}: \mathbf{N}\to\mathbf{C}$ ergänzen:

$$\tilde{f}(n):=\varphi(\log n).$$

Denn dann gilt:
1. $\tilde{f}(nm)=\varphi(\log nm)$,
$=\varphi(\log n+\log m)$,
$=\varphi(\log n)+\varphi(\log m)$,
$=\tilde{f}(n)+\tilde{f}(m)$.
2. Für $b\in B$, also $\log b\in C'$: $\tilde{f}(b)=\varphi(\log b)=f(b)$ q.e.d.

Satz 2. *Eine Menge $B\subset\mathbf{N}$ ist genau dann Z-Menge, wenn sich jede natürliche Zahl n auf höchstens eine Weise in der Form*

$$n=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k} \tag{2}$$

schreiben lässt, wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A': $k\in\mathbf{N}$; $b_1,\ldots,b_k\in B$; $1<b_1<\cdots<b_k$; $r_1,\ldots,r_k\in\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ erfüllen.

Beweis: Lässt sich die Zahl 1 in der Form (1) schreiben, dann gibt es für jedes $b \in B$ zwei Darstellungen der Form (2), nämlich

$$b = b \quad \text{und} \quad b = b \cdot 1 = b \cdot b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k}.$$

Lässt sich umgekehrt irgendein $n \in \mathbf{N}$ auf zwei Weisen in der Form (2) schreiben, also

$$n = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k} \quad \text{und} \quad n = c_1^{s_1} \cdot \cdots \cdot c_l^{s_l} \qquad (k \leq l),$$

dann hat die Zahl 1 - nach dem Zusammenfassen möglicherweise gleicher b_i und c_j $(1 \leq i, j \leq k)$ - die Darstellung

$$1 = n \cdot n^{-1} = d_1^{t_1} \cdot \cdots \cdot d_l^{t_l},$$

wobei mindestens einer der Faktoren $d_i^{t_i}$ von 1 verschieden ist. Mit Satz 1 folgt die Behauptung von Satz 2 sofort.

Satz 3. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist genau dann E-Menge (s.o.!) und Z-Menge (kurz EZ-Menge), wenn für jedes $\mathbf{N} \backslash \{1\}$ genau eine Darstellung in der folgenden Form existiert:*

$$n = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_b^{r_k},$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Satz von Wolke [5] und Satz 2.

Satz 3'. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist genau EZ-Menge, wenn für jedes $p \in P$ mindestens eine Darstellung der Form (*) existiert und dies für die Zahl 1 nicht gilt:*

$$p = b_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot b_k^{r_k}, \qquad (*)$$

wobei die Zahlen k, b_i und r_i die Bedingungen A' erfüllen.

Beweis: Aus dem Satz von Wolke [5] folgt unmittelbar, dass eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ genau dann E-Menge ist, wenn sich jedes $p \in P$ in der Form (*) darstellen lässt. Dies und Satz 1 ergeben die Behauptung.

Beispiele für EZ-Mengen

[Zugleich Beispiele für Basen von V (siehe Beweis von Satz 1), bei denen die Basisvektoren die Gestalt $\log x$ mit $x \in \mathbf{N}$ haben.]

1. $A = \{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \ldots\}$ mit $a_i \in \mathbf{N}$,
2. $A = \{p_1^{a_1}; p_1^{a_2} p_2^{a_3}; p_3^{a_4}; p_4^{a_5}; \ldots\}$ mit $a_i \in \mathbf{N}$,

3. $A=\{p_1^{a_1}; p_1^{a_2}p_2^{a_3}; p_1^{a_4}p_2^{a_5}p_3^{a_6}; p_1^{a_7}p_2^{a_8}p_3^{a_9}p_4^{a_{10}}; \ldots\}$, mit $a_j \in \mathbf{N}$,
4. $A=\{p_1^{a_1}p_2^{a_2}; p_2^{a_3}p_3^{a_4}; p_1^{a_5}p_3^{a_6}; p_4^{a_7}; p_5^{a_8}; \ldots\}$, mit $a_j \in \mathbf{N}$.

EZ-Menge der Form 1 sind in gewissem Sinn einzig, siehe Satz 5, doch zuerst ein Hilfssatz:

Satz 4. *Ist B eine EZ-Menge. Dann existiert zu jedem $b \in B$ mindestens eine Primzahl p, in deren Darstellung $p=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3′ b auftritt, d.h. $b=b_i$ für ein i mit $1\le i\le k$ gilt.*

Beweis: Angenommen die Behauptung sei falsch, b sei die Zahl, zu der es keine Primzahl mit der behaupteten Eigenschaft gibt. Dann hat b zwei Darstellungen bezüglich B, nämlich 1. $b=b$ und 2. die durch die Primzahldarstellung von $b=p_1^{n_1}\cdot\cdots\cdot p_k^{n_k}$ vermittelte, die b nicht enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass B Z-Menge ist (siehe Satz 2!).

Satz 5. *Mengen der Form*

$$A=\{p_1^{a_1}; p_2^{a_2}; p_3^{a_3}; \ldots\} \qquad (a_i \in \mathbf{N})$$

sind die einzigen EZ-Mengen, deren Elemente paarweise teilerfremd sind.

Beweis: Sei B eine EZ-Menge, deren Elemente teilerfremd sind, sei $b\in B$ und p eine der nach Satz 4 existierenden Primzahlen, in deren Darstellung $p=b_1^{r_1}\cdot\cdots\cdot b_k^{r_k}$ gemäss Satz 3 b auftritt. Nach Voraussetzung gilt für $i\neq j$ $(b_i,b_j)=1$, also folgt:
$p=b^r$ mit $r\in\mathbf{Q}\setminus\{0\} \Rightarrow b=p^m$ mit $m\in\mathbf{N}$, da $b\in B$ und $B\subset\mathbf{N}$ gilt.

Thomas Jahnke, Gesamthochschule Siegen, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. *26*, 11-20 (1974).
2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. *146*, 285-290 (1976).
3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. *13*, 315-320 (1968).
4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. *16*, 1-4 (1968).
5 D. Wolke: Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen. El. Math. *33*/1 (1978).

Aufgaben

Aufgabe 837. Es seien G_1, G_2 zwei Graphen mit je n Ecken x_i bzw. y_i $(i=1,\ldots,n)$ und e_n Kanten. Für die Grade (Valenzen) $\rho(x_i)$ bzw. $\rho(y_i)$ der Ecken gelte $\rho(x_i)\neq\rho(y_j)$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$. Man bestimme $\max e_n$. P. Erdös

Solution: By considering the complement of the graphs $G_i, i=1,2$, one gets the equivalent problem of determining the minimum value of e_n.