Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Aufgaben

Aufgabe 831. Es seien $u, v \geqslant 2$ natürliche Zahlen. Die rationale Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ habe die Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbf{N}$ $q_n := a_{n+1}/a_n \in \{u, v\}$. Man zeige: Die Zahl

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$$

ist genau dann rational, wenn die Folge $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ periodisch ist.

J. Burr und P. Erdös

Lösung: Wegen $q_n := a_{n+1}/a_n$ für $n = 1, 2, \ldots$ ist

$$a_1 a - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(q_1 \cdots q_n). \tag{1}$$

Schreiben wir für $k = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_k := \sum_{n=k}^{\infty} 1/(q_k \cdots q_n), \tag{2}$$

so ist

$$q_k \alpha_k = 1 + \alpha_{k+1} \quad \text{und} \quad 0 < \alpha_k \leqslant 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

letzteres wegen $q_n \geqslant 2$. Ist nun (q_n) periodisch, etwa $q_{n+h} = q_n$ für alle $n \geqslant n_0$ mit einem gewissen $h \geqslant 1$, so ist nach (2)

$$\alpha_{n_0}\left(1 - 1/(q_{n_0} \cdots q_{n_0+h-1})\right) = \sum_{n=n_0}^{n_0+h-1} 1/(q_{n_0} \cdots q_n);$$

daher ist $\alpha_{n_0} \in \mathbf{Q}$, also $\alpha_1 = a_1 a - 1 \in \mathbf{Q}$ nach (3) und (1), (2) liefern $a = (1 + \alpha_1)/a_1 \in \mathbf{Q}$. Sei nun umgekehrt $a \in \mathbf{Q}$, etwa $a = a/b$, und o.B.d.A. $2 \leqslant u < v$ vorausgesetzt. Wegen (3) sind alle $\alpha_k \in \mathbf{Q}$ und sogar $\in \{1/b, 2/b, \ldots, b/b\}$. Daher gibt es ein Paar $(n_0, h) \in \mathbf{N}^2$ mit $\alpha_{n_0+h} = \alpha_{n_0}$. Wir behaupten, dass dann $q_{n+h} = q_n$ für alle $n \geqslant n_0$ gilt, was die Behauptung vollständig beweist: Nehmen wir etwa $q_{n_0+h} = u$, $q_{n_0} = v$ an, so ist nach (2)

$$\frac{1}{u} \frac{v}{v-1} \leqslant \alpha_{n_0+h} = \alpha_{n_0} \leqslant \frac{1}{v} \frac{u}{u-1},$$

woraus $1 \leqslant 1/u + 1/v$ folgt, was nicht geht. Die Annahme $q_{n_0+h} = v$, $q_{n_0} = u$ führt zum gleichen Widerspruch, und so ist $q_{n_0+h} = q_{n_0}$ und daher nach (3) $\alpha_{n_0+h+1} = \alpha_{n_0+1}$. Nun schliesst man induktiv weiter wie soeben.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Weitere Lösungen sandten O.P. Lossers (Eindhoven, NL), E. Trost (Zürich).

Aufgabe 832. Man bestimme die gemeinsamen Glieder der beiden durch

$$\begin{array}{llll} a_1=1, & a_2=6, & a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n, & \\ b_1=1, & b_2=10, & b_{n+2}=10b_{n+1}-b_n, & n\in\mathbf{N}, \end{array}$$

definierten Folgen $(a_n), (b_n)$.

J. Binz, Bolligen

Lösung [kombiniert nach den Beiträgen des Aufgabenstellers und von M. Vowe (Therwil)]:
Die Glieder der Folge (a_n) lassen sich explizit durch

$$a_n=\frac{1}{4\sqrt{2}}\{(\sqrt{2}+1)^{2n}-(\sqrt{2}-1)^{2n}\}, \quad n\in\mathbf{N}$$

darstellen und erweisen sich mithin als y-Komponenten von Lösungen der Pell-Gleichung $x^2-8y^2=1$. Desgleichen sind die Glieder der Folge (b_n) y-Komponenten von Lösungen der Pell-Gleichung $z^2-24y^2=1$. Gemeinsame Glieder beider Folgen genügen demnach dem Gleichungssystem $x^2-8y^2=z^2-24y^2=1$. Daraus ergibt sich $x^2+(4y)^2=z^2$, d.h. $(x, 4y, z)$ muss ein primitives pythagoreisches Tripel sein, also $x=u^2-v^2$, $4y=2uv$, $z=u^2+v^2$ mit $u>v$, $(u,v)=1$ und u,v von verschiedener Parität. Für (u,v) resultiert nunmehr die diophantische Gleichung

$$u^4-4u^2v^2+v^4=1. \tag{$*$}$$

Nach [1] ist aber $(u,v)=(2,1)$ die einzige Lösung von $(*)$, somit ist nur 1 gemeinsames Glied von (a_n) und (b_n).

LITERATURVERZEICHNIS

1 Problem E2618. Am. Math. Monthly *85*, 51 (1978).

Eine Teillösung sandte J.T. Groenman (Groningen, NL).

Aufgabe 833. Für alle $n\geqslant 0$ gelten die Polynomidentitäten

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k+x}{k}\binom{2n-2k+y}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k+x+y}{n-k}.$$

Dies ist zu zeigen.

I. Paasche, München, BRD

Lösung: Die linke Seite der behaupteten Identität sei mit $P_n(x,y)$ bezeichnet. Die Behauptung lautet dann

$$P_n(x,y)=P_n(x+y,0) \quad \text{für alle} \quad n\in \mathbf{N}_0. \tag{1}$$

Da es sich bei (1) um Polynomidentitäten handelt, genügt es, die Allgemeingültigkeit in $\mathbf{N}_0$ der folgenden Aussagenform $A(n)$ zu zeigen:

$$P_n(x,y)=P_n(x+y,0) \quad \text{für alle} \quad x,y\in \mathbf{N}_0.$$

$A(0)$ und $A(1)$ sind trivialerweise wahr. Aus der Identität

$$\binom{m+x+1}{j}=\binom{m+x}{j}+\binom{m+x}{j-1}$$

folgt nun sofort

$$P_n(x+1,y)=P_n(x,y)+P_{n-1}(x+2,y), \qquad n\geqslant 1.$$

Da (1) für $x=0$ zutrifft, ergibt sich nunmehr die Behauptung durch Induktion nach n und x, bei festem y.

O.P. Lossers, Eindhoven, NL

Bemerkung: L. Kuipers (Mollens VS) weist darauf hin, dass die fragliche Identität aus dem bekannten Resultat (siehe [1])

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x+kz}{k}\binom{y+(n-k)z}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{x+t+kz}{k}\binom{y-t+(n-k)z}{n-k}$$

mit $z=2$ und $t=-x$ folgt.

LITERATURVERZEICHNIS

1 H.W. Gould: Combinatorial Identities, p. 38, 3.143.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), A.A. Jagers (Enschede, NL), O.P. Lossers (Eindhoven, NL, 2. Lösung), M. Vowe (Therwil).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1981* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 850. $\tau(n)$ bezeichne die Anzahl der Teiler d_i von n: $1=d_1<d_2<\cdots<d_{\tau(n)}=n$. Wir setzen

$$g(n):=1+\sum_{i=1}^{\tau(n)-1}\frac{d_i}{d_{i+1}}, \qquad h(n):=\frac{\tau(n)}{g(n)}.$$

Man zeige, dass $\dfrac{\log n}{\log\log n}$ die richtige Grössenordnung von $h(n)$ ist. □ P. Erdös

Aufgabe 851. Ist $A=\{a_1,a_2,\dots,a_r\}$ ein Alphabet mit r verschiedenen Buchstaben, so ist jede Abbildung $f:\{1,2,\dots,n\}\to A$ ein Wort der Länge n; es sei $n,r\geqslant 2$ vorausgesetzt.
Zwei Wörter f,g bilden das gleiche Kreiswort $\bar f=\bar g$, wenn für ein p $g(i)=f(i+p)$, $i=1,2,\dots,n$, $i+p$ mod n, gilt. Zwei Kreiswörter $\bar f,\bar g$ bilden das gleiche Diederwort $f^*=g^*$, wenn für zwei passende Vertreter f,g die Spiegelbeziehung $f(i)=g(n+1-i)$, $i=1,2,\dots,n$, erfüllt ist.
Schliesslich heisst ein Wort f schlicht, wenn $f(i)\neq f(i+1)$ für $i=1,2,\dots,n$ gilt.
Man bestimme die Anzahl $a(n)$ aller verschiedenen schlichten Kreiswörter und die Anzahl $b(n)$ aller verschiedenen schlichten Diederwörter über dem Alphabet A.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 852. $(x_n),(y_n)$ seien reelle Zahlenfolgen mit

$$y_1=x_1 \quad\text{sowie}\quad y_n=k\,x_n+x_{n-1} \quad\text{für}\quad n\geqslant 2.$$

Dabei ist $k\neq 0$ ein reeller Parameter. Genau für welche Werte von k gilt die Äquivalenz

(x_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (y_n) konvergent? W. Janous, Innsbruck, A

Berichtigung zu Aufgabe 848. Auf S. 126, Zeile 10 v.o., muss es heissen: Man zeige, dass dann und nur dann $S=0$ gilt für $h=1,\dots,mn-1$, wenn ...

Literaturüberschau

D. Laugwitz: Infinitesimalkalkül. Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis. 187 Seiten, DM 18.–. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich 1978.
Auf der Basis des Ausbildungsstandes, den ein Mathematikstudent in unteren Semestern mit sich bringt, vermittelt das Buch einen Einstieg, welcher auf die naive Mengenlehre abgestützt ist und, im Gegensatz